BỘ ĐỀ ÔN TẬP MÔN TOÁN

THPT QUỐC GIA

2026

Bám sát đề thi minh họa và chính thức 2025

Các dạng toán đa dạng giúp học sinh có kĩ năng tư duy và tăng kỹ năng phản xạ đề.

1. Trắc nghiệm nhiều phương án
2. Trắc nghiệm đúng sai
3. Trả lời ngắn

MK LÊ MINH KHA - 0399653362

Chương I

PHẦN TRẮC NGHIỆM NHIỀU PHƯƠNG ÁN LỰA CHỌN

Câu 1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2x + 1$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1, x = 2$ được xác định bằng công thức

Ⓐ $S = \pi \displaystyle\int_1^2 (2x+1)\,\mathrm{d}x$.
Ⓑ $S = \displaystyle\int_1^2 (2x+1)^2\,\mathrm{d}x$.
Ⓒ $S = \pi \displaystyle\int_1^2 (2x+1)^2\,\mathrm{d}x$.
Ⓓ $S = \displaystyle\int_1^2 (2x+1)\,\mathrm{d}x$.

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng đi qua gốc tọa độ và nhận một vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (-1; 0; 3)$ có phương trình tổng quát là

Ⓐ $-x + 3y = 0$.
Ⓑ $-y + 3z = 0$.
Ⓒ $-x + 3z = 0$.
Ⓓ $-x - 3z = 0$.

Câu 3. Nghiệm của phương trình $2^{2x+1} = 8$ là

Ⓐ $x = 1$.
Ⓑ $x = \dfrac{5}{2}$.
Ⓒ $x = 3$.
Ⓓ $x = \dfrac{3}{2}$.

Câu 4. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin x + \cos x$ là

Ⓐ $\cos x + \sin x + C$.
Ⓑ $\cos x - \sin x + C$.
Ⓒ $-\cos x - \sin x + C$.
Ⓓ $-\cos x + \sin x + C$.

Câu 5. Cho hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(ac \neq 0, ad - bc \neq 0)$ có bảng biến thiên như hình sau:

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	
y	1	↘	‖	↘	1
		$-\infty$	‖	$+\infty$	

Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho có phương trình là

Ⓐ $y = -2$.
Ⓑ $x = -2$.
Ⓒ $y = 1$.
Ⓓ $x = 1$.

Câu 6. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 2$ và công sai $d = 3$. Giá trị của u_5 bằng

Ⓐ 14.
Ⓑ 15.
Ⓒ 17.
Ⓓ 12.

Câu 7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x-4y+3z-9=0$. Vectơ nào sau đây là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P)?

Ⓐ $\vec{n}_3=(-2;4;3)$. Ⓑ $\vec{n}_1=(2;4;3)$.
Ⓒ $\vec{n}_4=(2;-4;3)$. Ⓓ $\vec{n}_2=(2;4;-3)$.

Câu 8. Một người chia thời lượng (đơn vị: giây) thực hiện các cuộc gọi điện thoại của mình trong một tuần thành sáu nhóm và lập bảng tần số ghép nhóm như sau:

Nhóm	$[0;30)$	$[30;60)$	$[60;90)$	$[90;120)$	$[120;150)$	$[150;180)$
Tần số	10	11	8	6	4	1

Tứ phân vị thứ ba Q_3 (đơn vị: giây) của mẫu số liệu ghép nhóm trên bằng

Ⓐ 105. Ⓑ 95. Ⓒ 90. Ⓓ 100.

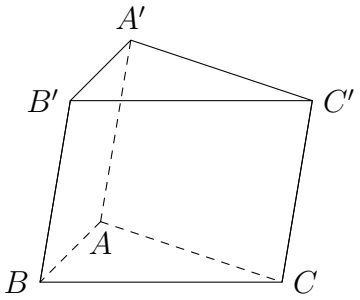
Câu 9. Tập nghiệm của phương trình $\sin x=1$ là

Ⓐ $S=\left\{\dfrac{\pi}{2}+k2\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$. Ⓑ $S=\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.
Ⓒ $S=\{k2\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$. Ⓓ $S=\{k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$.

Câu 10. Cho khối chóp $O.ABC$ có OA vuông góc với mặt phẳng (ABC), tam giác ABC vuông tại A và $OA=2, AB=3, AC=6$. Thể tích của khối chóp $O.ABC$ bằng

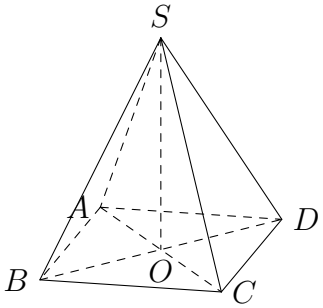
Ⓐ 12. Ⓑ 18. Ⓒ 6. Ⓓ 36.

Câu 11. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ (xem hình bên). Đường thẳng $B'C'$ song song với mặt phẳng nào sau đây?



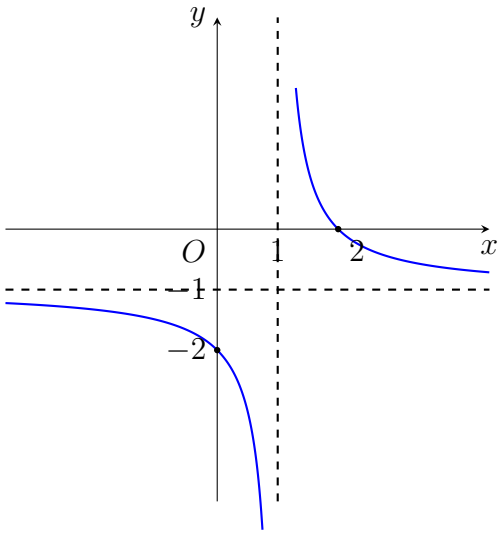
Ⓐ $(A'B'C')$. Ⓑ $(B'BC')$. Ⓒ $(AB'C')$. Ⓓ (ABC).

Câu 12. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ (xem hình bên). Gọi O là giao điểm của AC và BD. Phát biểu nào sau đây đúng?



Ⓐ $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}=4\overrightarrow{SO}$. Ⓑ $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}=2\overrightarrow{SO}$.
Ⓒ $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}=\vec{0}$. Ⓓ $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}=\overrightarrow{SO}$.

Câu 13. Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(ac\neq 0, ad-bc\neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Trong các hệ số a,b,c,d có bao nhiêu số dương?



Ⓐ 2. Ⓑ 1. Ⓒ 3. Ⓓ 0.

Câu 14. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ với tâm O. Chọn đẳng thức sai.

Ⓐ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC_1}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{D_1A}=\vec{0}$.
Ⓑ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{AD_1}+\overrightarrow{D_1O}+\overrightarrow{OC_1}$.
Ⓒ $\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}$.
Ⓓ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DD_1}$.

Câu 15. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 1dm, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=\sqrt{2}$dm. Thể tích V của khối chóp $S.ABCD$ là

Ⓐ $V=\dfrac{\sqrt{2}}{3}\text{dm}^3$. Ⓑ $V=\dfrac{\sqrt{2}}{4}\text{dm}^3$.
Ⓒ $V=\dfrac{\sqrt{2}}{6}\text{dm}^3$. Ⓓ $V=\sqrt{2}\text{dm}^3$.

Câu 16. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_3=8$ và công sai $d=3$. Giá trị của u_5 bằng

Ⓐ 17. Ⓑ 14. Ⓒ 12. Ⓓ 15.

Câu 17. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sin 2x+\cos 2x$ là

Ⓐ $2(-\cos 2x+\sin 2x)+C$. Ⓑ $\dfrac{1}{2}(\cos 2x-\sin 2x)+C$.
Ⓒ $\dfrac{1}{2}(\sin 2x-\cos 2x)+C$. Ⓓ $2(\cos 2x-\sin 2x)+C$.

Câu 18. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng đi qua gốc tọa độ và nhận $\vec{n}=(-4;3;0)$ làm một vectơ pháp tuyến có phương trình tổng quát là

Ⓐ $4x-3z=0$. Ⓑ $-4x+3y=0$.
Ⓒ $-4y+3z=0$. Ⓓ $-4x+3z=0$.

Câu 19. Cho tứ diện $ABCD$, G là trọng tâm tam giác ABD. Trên đoạn BC lấy điểm M sao cho $MB=2MC$. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ MG song song (ACB). Ⓑ MG song song (BCD).

Ⓒ MG song song (ABD). Ⓓ MG song song (ACD).

Câu 20. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 3x - 1$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1, x = 3$ được xác định bằng công thức nào sau đây?

Ⓐ $S = \int_1^3 (3x-1)^2 \,\mathrm{d}x$. Ⓑ $S = \pi \int_1^3 |3x-1| \,\mathrm{d}x$.

Ⓒ $S = \int_1^3 (3x-1) \,\mathrm{d}x$. Ⓓ $S = \pi \int_1^3 (3x-1)^2 \,\mathrm{d}x$.

Câu 21. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P) : 2x - 3z - 5 = 0$. Vectơ nào sau đây là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P)?

Ⓐ $\vec{u} = (2; 0; -3)$. Ⓑ $\vec{a} = (2; -3; -5)$.

Ⓒ $\vec{v} = (2; -3; 0)$. Ⓓ $\vec{b} = (-2; 3; 0)$.

Câu 22. Một người chia thời lượng (đơn vị: giây) thực hiện các cuộc gọi điện thoại của mình trong một tuần thành sáu nhóm và lập bảng tần số ghép nhóm như sau:

Nhóm	$[0; 30)$	$[30; 60)$	$[60; 90)$	$[90; 120)$	$[120; 150)$	$[150; 180)$
Tần số	11	10	6	8	3	2

Trung vị (đơn vị: giây, làm tròn đến hàng đơn vị) của mẫu số liệu ghép nhóm trên bằng

Ⓐ 57. Ⓑ 31. Ⓒ 90. Ⓓ 27.

Câu 23. Tập nghiệm của phương trình $\sin 2x = -1$ là

Ⓐ $S = \left\{-\frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. Ⓑ $S = \left\{k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Ⓒ $S = \left\{-\frac{\pi}{2} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. Ⓓ $S = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Câu 24. Nghiệm của phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2x-1} = 27$ là

Ⓐ $x = 3$. Ⓑ $x = 1$. Ⓒ $x = \frac{5}{2}$. Ⓓ $x = \frac{3}{2}$.

Câu 25. Biết $\int_{-1}^{1} f(x) \,\mathrm{d}x = 3$, khi đó $\int_{-1}^{1} [2f(x) + 1] \,\mathrm{d}x$ bằng:

Ⓐ 8. Ⓑ 10. Ⓒ 7. Ⓓ 6.

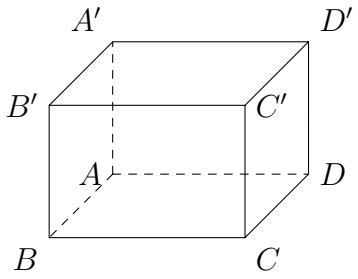
Câu 26. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(2; -2; 1)$, $B(0; 1; 2)$. Tọa độ điểm M thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho 3 điểm A, B, M thẳng hàng là

Ⓐ $M(4; -5; 0)$. Ⓑ $M(2; -3; 0)$. Ⓒ $M(4; 5; 0)$. Ⓓ $M(0; 0; 1)$.

Câu 27. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Biết $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

Ⓐ $a^3\sqrt{3}$. Ⓑ $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. Ⓒ $\frac{a^3}{4}$. Ⓓ $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Câu 28. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$.



Khẳng định nào đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{AD}$ cùng hướng với $\overrightarrow{B'C'}$.
Ⓑ $\overrightarrow{AC'}$ cùng phương với $\overrightarrow{A'C'}$.
Ⓒ $\overrightarrow{CD}$ cùng hướng với $\overrightarrow{D'C'}$.
Ⓓ $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{BD'}$.

Câu 29. Phương trình $3^{x-2} = \dfrac{1}{9}$ có nghiệm

Ⓐ $x = \dfrac{19}{9}$.
Ⓑ $x = 0$.
Ⓒ $x = 4$.
Ⓓ $x = 2$.

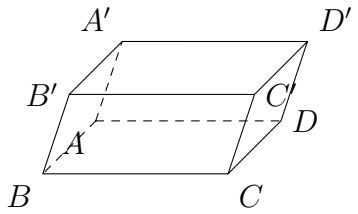
Câu 30. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-2}{x+1}$ là

Ⓐ $x = -1$.
Ⓑ $x = 1$.
Ⓒ $x = -2$.
Ⓓ $x = 2$.

Câu 31. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = (1;2;3)$, $\vec{b} = (2;2;-1)$. Tọa độ $\vec{a} - 2\vec{b}$ là:

Ⓐ $(-3;-2;1)$.
Ⓑ $(3;2;5)$.
Ⓒ $(-3;-2;5)$.
Ⓓ $(-1;0;4)$.

Câu 32. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.



Đường thẳng AB song song với mặt phẳng nào sau đây?

Ⓐ $(CC'A'A)$.
Ⓑ $(BB'C'C)$.
Ⓒ $(A'B'C'D')$.
Ⓓ $(AA'D'D)$.

Câu 33. Tập nghiệm của phương trình $\sin x = 0$

Ⓐ $S = \left\{\dfrac{\pi}{2} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.
Ⓑ $S = \{k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
Ⓒ $S = \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
Ⓓ $S = \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Câu 34. Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2\sin x + 1$ trên $\mathbb{R}$ là

Ⓐ $2\cos x$.
Ⓑ $-2\cos x + x + C$.
Ⓒ $2\cos x + x + C$.
Ⓓ $-2\cos x + 1 + C$.

Câu 35. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, đường thẳng d đi qua điểm $M(-1;4;6)$, nhận $\vec{u}(3;-2;7)$ làm vectơ chỉ phương có phương trình là

Ⓐ $\frac{x-3}{-1} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-7}{6}$.
Ⓑ $\frac{x-1}{3} = \frac{y+4}{-2} = \frac{z+6}{7}$.
Ⓒ $\frac{x+3}{-1} = \frac{y-2}{4} = \frac{z+7}{6}$.
Ⓓ $\frac{x+1}{3} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z-6}{7}$.

Câu 36. Cho cấp số nhân (u_n) thỏa mãn $u_4 = u_1 \cdot 8$. Công bội q của (u_n) bằng

Ⓐ 3. Ⓑ 2. Ⓒ -2. Ⓓ -3.

Câu 37. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$ liên tục trên $[-2;3]$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Biết $\int\limits_{-2}^{1} f'(x)\,\mathrm{d}x=3$ và diện tích $S=\frac{5}{3}$. Giá trị $f(3)-f(-2)$ bằng

Ⓐ $\frac{4}{3}$. Ⓑ $\frac{14}{3}$. Ⓒ $-\frac{4}{3}$. Ⓓ $-\frac{14}{3}$.

Câu 38. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A và $BC=2a$, $AA'=2\sqrt{3}a$, $\widehat{ABC}=60^\circ$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

Ⓐ $6a^3$. Ⓑ a^3. Ⓒ $2a^3$. Ⓓ $3a^3$.

Câu 39. Cho $P(A),P(B)>0$. Công thức xác suất có điều kiện của biến cố A khi biết biến cố B đã xảy ra là

Ⓐ $P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(A)}$. Ⓑ $P(A|B)=\frac{P(B)}{P(A)}$.
Ⓒ $P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$. Ⓓ $P(A|B)=\frac{P(A)}{P(B)}$.

Câu 40. Tập nghiệm của phương trình $\cot x=\sqrt{3}$ là

Ⓐ $S=\left\{\frac{\pi}{3}+k2\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$. Ⓑ $S=\left\{\frac{\pi}{6}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.
Ⓒ $S=\left\{\frac{\pi}{6}+k2\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$. Ⓓ $S=\left\{\frac{\pi}{3}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Câu 41. Cho hình tứ diện $ABCD$ có M,N,O lần lượt là trung điểm của AB,CD,MN. Phát biểu nào sau đây là đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AO}$. Ⓑ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AO}$.
Ⓒ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=4\overrightarrow{AO}$. Ⓓ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AO}$.

Câu 42. Tập xác định của hàm số $y=\log_2(3-x)$ là

Ⓐ $(-\infty;3]$. Ⓑ $(-\infty;3)$. Ⓒ $(2;3)$. Ⓓ $(3;+\infty)$.

Câu 43. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có điểm M thuộc đoạn thẳng AC (M không trùng với A hoặc C). Đường thẳng B_1M song song với mặt phẳng nào sau đây?

Ⓐ (CDD_1). Ⓑ (DA_1C_1). Ⓒ (ADD_1). Ⓓ (BDD_1).

Câu 44. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) đi qua O và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}(2;-2;1)$. Khoảng cách từ điểm $M(3;-1;1)$ đến (P) bằng

Ⓐ 9. Ⓑ 1. Ⓒ $\frac{5}{3}$. Ⓓ 3.

Câu 45. Cho mẫu số liệu ghép nhóm sau:

Nhóm	$[6;7)$	$[7;8)$	$[8;9)$	$[9;10)$	$[10;11)$
Tần số	8	12	10	2	3

Tứ phân vị thứ ba (làm tròn đến hàng phần trăm) của mẫu số liệu bằng

Ⓐ $8,63$. Ⓑ $7,79$. Ⓒ $7,76$. Ⓓ $8,57$.

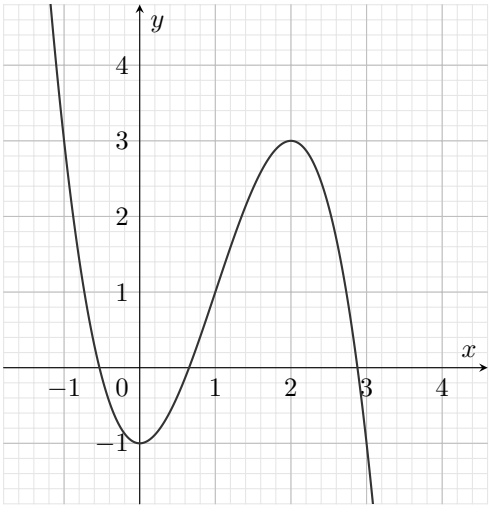
Câu 46. Cô Hằng thống kê đường kính thân gỗ của một số cây xoan đào 6 năm tuổi được trồng ở một lâm trường như sau:

Đường kính (cm)	$[45;50)$	$[50;55)$	$[55;60)$	$[60;65)$	$[65;70)$
Tần số	20	18	7	1	3

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm trên là

Ⓐ 25. Ⓑ 5. Ⓒ 20. Ⓓ 18.

Câu 47. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình sau đây:



Giá trị cực tiểu của hàm số $y = f(x)$ là

Ⓐ $N(0;-1)$. Ⓑ $y = -1$. Ⓒ $x = 0$. Ⓓ $x = -1$.

Câu 48. Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

Ⓐ $y = 3^{-x}$. Ⓑ $y = 2026^x$. Ⓒ $y = \frac{2x-1}{x-1}$. Ⓓ $y = \log_2 x$.

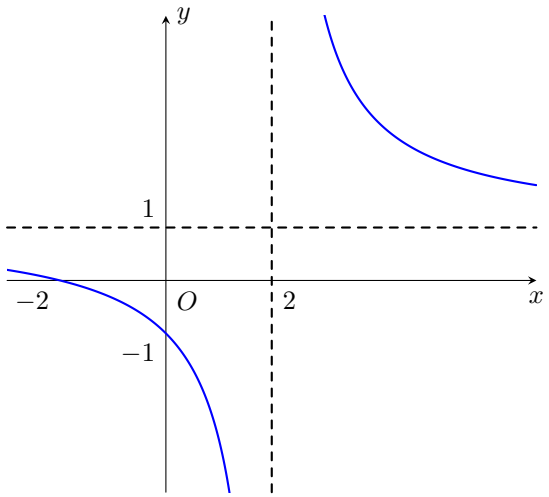
Câu 49. Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{x+3}{2x-4}$ là

Ⓐ $x = \frac{1}{2}$. Ⓑ $y = 2$. Ⓒ $y = \frac{1}{2}$. Ⓓ $x = 2$.

Câu 50. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm M có hình chiếu vuông góc lên mặt phẳng (Oxy) và (Oxz) lần lượt là $M_1(2;3;0)$ và $M_2(2;0;-5)$. Tọa độ của điểm M là

Ⓐ $M(-2;-3;5)$. Ⓑ $M(2;3;-5)$.
Ⓒ $M(2;-5;3)$. Ⓓ $M(2;-3;5)$.

Câu 51. Cho hàm số $y = \frac{ax+2}{x+c}$ có đồ thị như hình sau đây:

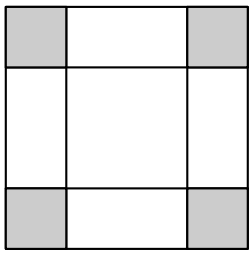


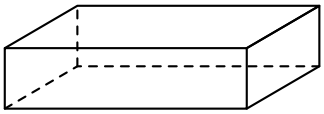
Tính giá trị của biểu thức $P = a - 2c$.

Ⓐ 5. Ⓑ 3. Ⓒ -3. Ⓓ -5.

Câu 52. Bạn An có một tấm bìa hình vuông cạnh 20 cm. Bạn muốn cắt bỏ ở bốn góc bốn hình vuông nhỏ bằng nhau để gấp và dán lại thành một hình hộp chữ nhật không có nắp (tham khảo

hình vẽ). Để hộp có thể tích lớn nhất thì độ dài cạnh của hình vuông nhỏ bị cắt là





Ⓐ $\frac{20}{3}$ cm. Ⓑ $\frac{10}{3}$ cm. Ⓒ 5 cm. Ⓓ 4 cm.

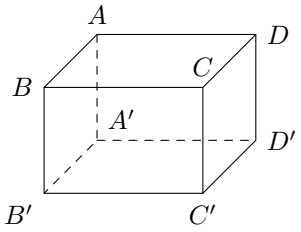
Câu 53. Một cấp số nhân có ba số hạng liên tiếp là $4; 10; a$. Tính $2a$.

Ⓐ 25. Ⓑ 32. Ⓒ 16. Ⓓ 50.

Câu 54. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn (C) có phương trình $(x-2)^2+(y+3)^2=5$. Tọa độ tâm I và bán kính R của đường tròn (C) là

Ⓐ $I(2;-3), R=\sqrt{5}$. Ⓑ $I(2;-3), R=5$.
Ⓒ $I(-2;3), R=5$. Ⓓ $I(-2;3), R=\sqrt{5}$.

Câu 55. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Chọn đẳng thức đúng:



Ⓐ $\overrightarrow{DB'}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DD'}+\overrightarrow{DB}$. Ⓑ $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.
Ⓒ $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AD}$. Ⓓ $\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DD'}+\overrightarrow{DC}$.

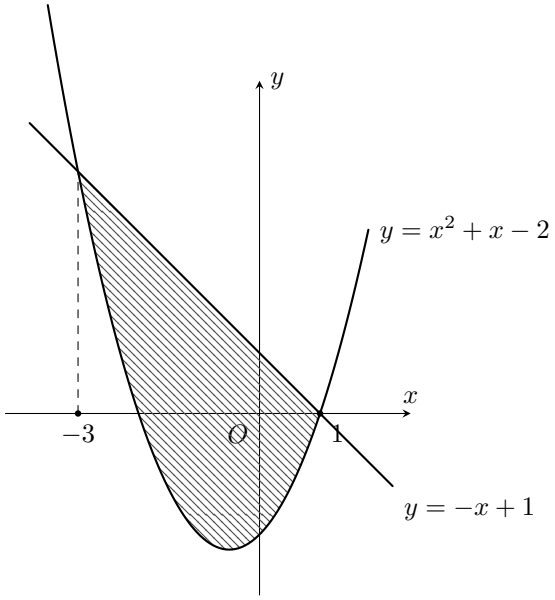
Câu 56. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} & \text{khi } x>1\\ mx+2 & \text{khi } x\le 1\end{cases}$. Tìm giá trị của tham số m để hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ⓐ $\frac{1}{4}$. Ⓑ $-\frac{7}{12}$. Ⓒ $-\frac{7}{4}$. Ⓓ $\frac{1}{12}$.

Câu 57. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}=(1;0;1)$, $\vec{b}=(2;0;0)$. Góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là

Ⓐ 30°. Ⓑ 150°. Ⓒ 60°. Ⓓ 45°.

Câu 58. Diện tích phần gạch sọc trong hình vẽ bằng:



Ⓐ $\int_{-3}^{1} |-x^2 - 2x - 3|\,\mathrm{d}x$.
Ⓑ $\int_{-3}^{1} (x^2 - 2x - 3)\,\mathrm{d}x$.
Ⓒ $\int_{-3}^{1} (x^2 + 2x - 3)\,\mathrm{d}x$.
Ⓓ $\int_{-3}^{1} (-x^2 - 2x + 3)\,\mathrm{d}x$.

Câu 59. Mỗi ngày bác Mạnh đều đi bộ để rèn luyện sức khỏe. Quãng đường đi bộ mỗi ngày của bác trong 20 ngày được thống kê lại ở bảng sau:

Quãng đường	$[2,7;3,0)$	$[3,0;3,3)$	$[3,3;3,6)$	$[3,6;3,9)$	$[3,9;4,2)$
Số ngày	3	6	5	4	2

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm gần nhất với giá trị nào sau đây?

Ⓐ $0,19$. Ⓑ $1,26$. Ⓒ $0,13$. Ⓓ $0,26$.

Câu 60. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-2)(x+1), \forall x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

Ⓐ Hàm số đã cho đồng biến trên $(-1;+\infty)$.
Ⓑ Hàm số đã cho nghịch biến trên $(2;+\infty)$.
Ⓒ Hàm số đã cho nghịch biến trên $(-1;2)$.
Ⓓ Hàm số đã cho đồng biến trên $(-1;2)$.

Câu 61. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng đi qua tâm của mặt cầu $(x-1)^2+(y+2)^2+z^2 = 12$ và song song với mặt phẳng (Oxz) có phương trình là:

Ⓐ $y + 1 = 0$.
Ⓑ $y - 2 = 0$.
Ⓒ $y + 2 = 0$.
Ⓓ $x + z - 1 = 0$.

Câu 62. Biết đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{x^2-4x+5}{x-1}$ có hai điểm cực trị. Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị (C) cắt trục hoành tại điểm M có hoành độ x_M bằng

Ⓐ $x_M = 2$.
Ⓑ $x_M = 1 - \sqrt{2}$.
Ⓒ $x_M = 1$.
Ⓓ $x_M = 1 + \sqrt{2}$.

Câu 63. Với a là số thực dương tùy ý, $\log_3 2 + \log_3 a$ bằng

Ⓐ $\log_3 2 \cdot \log_3 a$.
Ⓑ $\log_3(a+2)$.
Ⓒ $\log_3 a^2$.
Ⓓ $\log_3(2a)$.

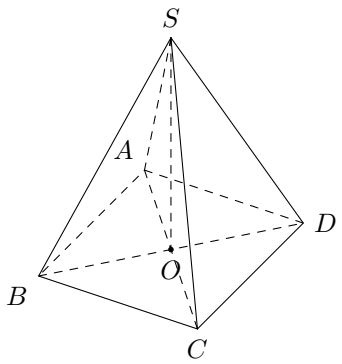
Câu 64. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ:

x	$-\infty$		2		6		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	10	↘	0	↗	$+\infty$

Hàm số nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây?

Ⓐ $(-\infty; 2)$.
Ⓑ $(6; +\infty)$.
Ⓒ $(2; 6)$.
Ⓓ $(-\infty; 6)$.

Câu 65. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O. Giao tuyến giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) là đường thẳng



Ⓐ SA.
Ⓑ SB.
Ⓒ SO.
Ⓓ SC.

Câu 66. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho vectơ $\vec{a} = (1; -2; 0)$ và $\vec{b} = 2\vec{a}$. Tìm tọa độ của vectơ $\vec{b}$.

Ⓐ $\vec{b} = (2; 4; 2)$.
Ⓑ $\vec{b} = (2; -4; 0)$.
Ⓒ $\vec{b} = (3; 0; 2)$.
Ⓓ $\vec{b} = (2; 4; 0)$.

Câu 67. Phương trình $\sin x = \sin \frac{\pi}{5}$ có tập nghiệm là

Ⓐ $S = \left\{\frac{\pi}{5} + k2\pi; \frac{4\pi}{5} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
Ⓑ $S = \left\{\frac{1}{5} + k2\pi; \frac{4}{5} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
Ⓒ $S = \left\{\frac{\pi}{5} + k2\pi; -\frac{\pi}{5} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
Ⓓ $S = \left\{\frac{1}{5} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Câu 68. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = -3; u_6 = 27$. Tính công sai d.

Ⓐ $d = 7$.
Ⓑ $d = 5$.
Ⓒ $d = 8$.
Ⓓ $d = 6$.

Câu 69. Trong không gian $Oxyz$, một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(P)\colon 2x+3y-z+5=0$ là

Ⓐ $\vec{n}_1 = (3; -2; -1)$.
Ⓑ $\vec{n}_2 = (2; -3; -1)$.
Ⓒ $\vec{n}_3 = (-1; 3; 2)$.
Ⓓ $\vec{n}_4 = (2; 3; -1)$.

Câu 70. Một đội văn nghệ có 6 bạn nam và 4 bạn nữ. Có bao nhiêu cách chọn gồm 1 bạn nam và 1 bạn nữ để thể hiện một tiết mục song ca?

Ⓐ 45. Ⓑ 10. Ⓒ 24. Ⓓ 90.

Câu 71. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2 - 4$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -2$; $x = 2$ bằng

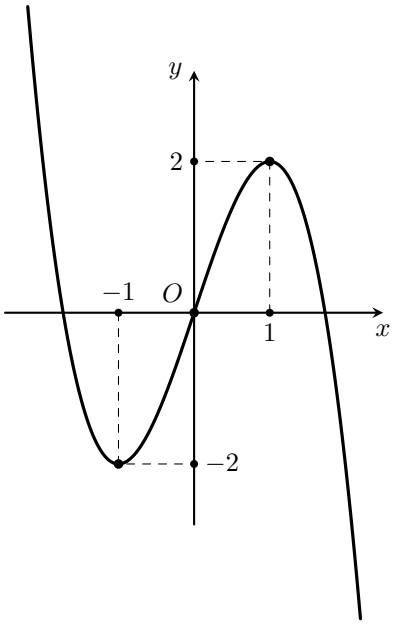
Ⓐ $S = \pi \displaystyle\int_{-2}^{2} (x^2 - 4)\,\mathrm{d}x$. Ⓑ $S = \displaystyle\int_{-2}^{2} |x^2 - 4|\,\mathrm{d}x$.

Ⓒ $S = \displaystyle\int_{-2}^{2} (x^2 - 4)\,\mathrm{d}x$. Ⓓ $S = \pi \displaystyle\int_{-2}^{2} (x^2 - 4)^2\,\mathrm{d}x$.

Câu 72. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x - 1) > 2$ là

Ⓐ $S = \left(\frac{5}{4}; +\infty\right)$. Ⓑ $S = \left(-\infty; \frac{5}{4}\right)$.
Ⓒ $S = \left(1; \frac{5}{4}\right)$. Ⓓ $S = (1; 5)$.

Câu 73. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $[-1; 1]$ và có đồ thị như hình vẽ. Tìm giá trị x_0 để hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị lớn nhất trên $[-1; 1]$.



Ⓐ $x_0 = -2$. Ⓑ $x_0 = 2$. Ⓒ $x_0 = -1$. Ⓓ $x_0 = 1$.

Câu 74. Để đánh giá chất lượng dịch vụ tài xế công nghệ của hãng X, người ta ghi lại thời gian chờ của các khách hàng được thể hiện trong bảng sau:

Thời gian chờ (phút)	$[1; 2, 5)$	$[2, 5; 4)$	$[4; 5, 5)$	$[5, 5; 7)$	$[7; 8, 5)$
Số khách hàng	10	5	23	6	3

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu trên gần nhất với giá trị nào sau đây?

Ⓐ $2,3$. Ⓑ $1,9$. Ⓒ $2,6$. Ⓓ $3,1$.

Câu 75. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2^x$ là

Ⓐ $\frac{2^{x+1}}{x+1} + C$. Ⓑ $\frac{2^x}{\ln 2} + C$.
Ⓒ $\frac{2^x}{x} + C$. Ⓓ $x \cdot 2^{x-1} + C$.

Câu 76. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

Ⓐ 3. Ⓑ 2. Ⓒ -2. Ⓓ -3.

Câu 77. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_2=2; u_5=11$. Công sai d của cấp số cộng là

Ⓐ 1. Ⓑ 2. Ⓒ 4. Ⓓ 3.

Câu 78. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x+1$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

Ⓐ $(-1;+\infty)$. Ⓑ $(1;+\infty)$. Ⓒ $(-\infty;-1)$. Ⓓ $(-\infty;1)$.

Câu 79. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng d đi qua điểm $M(1;-1;3)$ và song song với đường thẳng $\Delta\colon \frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+3}{-1}$ có phương trình là

Ⓐ $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-1+t \\ z=3-t \end{cases}$. Ⓑ $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-1+t \\ z=3+t \end{cases}$.

Ⓒ $\begin{cases} x=2+t \\ y=1-t \\ z=-1+3t \end{cases}$. Ⓓ $\begin{cases} x=1+2t \\ y=1+t \\ z=3-t \end{cases}$.

Câu 80. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(9-x^2)<0$ chứa bao nhiêu số nguyên?

Ⓐ 1. Ⓑ 5. Ⓒ 3. Ⓓ 4.

Câu 81. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u}=(1;-4;0)$ và $\vec{v}=(-1;-2;1)$. Vectơ $\vec{u}+3\vec{v}$ có tọa độ là

Ⓐ $(-2;-10;3)$. Ⓑ $(-2;-6;3)$.
Ⓒ $(-4;-8;4)$. Ⓓ $(-2;-10;-3)$.

Câu 82. Tâm đối xứng của đồ thị hàm số $y=\frac{3x+1}{x-2}$ có tọa độ là

Ⓐ $(3;-2)$. Ⓑ $(3;2)$. Ⓒ $(-2;3)$. Ⓓ $(2;3)$.

Câu 83. Cho hàm số $f(x)=x^2+\sin x+1$. Biết rằng $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và thỏa mãn $F(0)=1$. Khi đó $F(x)$ bằng

Ⓐ $F(x)=x^3-\cos x+x+2$. Ⓑ $F(x)=\frac{x^3}{3}-\cos x+x+2$.
Ⓒ $F(x)=\frac{x^3}{3}+\cos x+x$. Ⓓ $F(x)=\frac{x^3}{3}+\cos x+2$.

Câu 84. Cho mẫu số liệu ghép nhóm ở bảng sau. Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép

nhóm (làm tròn đến hàng phần trăm) là:

Nhóm	Tần số
$[20;30)$	3
$[30;40)$	7
$[40;50)$	6
$[50;60)$	4
$[60;70)$	5
	$n=25$

Ⓐ $19,15$. Ⓑ $21,32$. Ⓒ $20,07$. Ⓓ $22,23$.

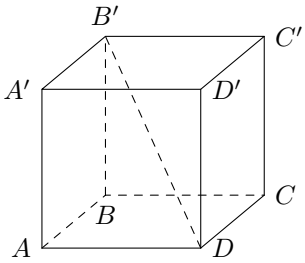
Câu 85. Người ta thống kê lại đường kính thân gỗ của một số cây xoan đào 6 năm tuổi được trồng ở một lâm trường ở bảng sau:

Đường kính (cm)	$[40;45)$	$[45;50)$	$[50;55)$	$[55;60)$	$[60;65)$
Tần số	5	20	18	7	3

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm trên là

Ⓐ 25. Ⓑ 30. Ⓒ 6. Ⓓ $69,8$.

Câu 86. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ (xem hình vẽ). Phát biểu nào sau đây là đúng?



Ⓐ $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{AD}$. Ⓑ $\overrightarrow{DB'}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DD'}+\overrightarrow{DC}$.
Ⓒ $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$. Ⓓ $\overrightarrow{DB'}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DD'}+\overrightarrow{DC}$.

Câu 87. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-2	↗	4	↘	$-\infty$

Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng nào?

Ⓐ $(-\infty;-1)$. Ⓑ $(-2;4)$. Ⓒ $(2;+\infty)$. Ⓓ $(-1;2)$.

Câu 88. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2;-1;4)$ và mặt phẳng $(P)\colon 3x-2y+z+1=0$. Phương trình của mặt phẳng đi qua M và song song với mặt phẳng (P) là

Ⓐ $2x-2y+4z-21=0$. Ⓑ $x-2z+1=0$.

Ⓒ $10x+9y+5z-74=0$. Ⓓ $3x-2y+z-12=0$.

Câu 89. Điều tra về mức lương khởi điểm (đơn vị: triệu đồng) của 20 công nhân, ta có bảng số liệu sau:

Mức lương	$[5;6)$	$[6;7)$	$[7;8)$	$[8;9)$	$[9;10)$
Tần số	4	5	5	4	2

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là (làm tròn đến hàng phần trăm):

Ⓐ $s^2=0,63$. Ⓑ $s^2=2,52$. Ⓒ $s^2=1,26$. Ⓓ $s^2=1,59$.

Câu 90. Hàm số nào sau đây không là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=3x^2+2x-1$?

Ⓐ $F(x)=x^3+x^2-1$. Ⓑ $F(x)=x^3+x^2-x$.
Ⓒ $F(x)=x^3+x^2-x+2025$. Ⓓ $F(x)=x^3+x^2-x-1$.

Câu 91. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $M(1;1;1), N(2;3;4), P(7;7;5)$. Tìm tọa độ điểm Q để tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành

Ⓐ $Q(6;5;2)$. Ⓑ $Q(-6;-5;-2)$.
Ⓒ $Q(-2;-3;-4)$. Ⓓ $Q(-4;-3;0)$.

Câu 92. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1=\frac{1}{4}$ và công sai $d=-\frac{1}{4}$. Tổng 5 số hạng đầu tiên của cấp số cộng là

Ⓐ $S_5=\frac{5}{4}$. Ⓑ $S_5=\frac{4}{5}$. Ⓒ $S_5=-\frac{5}{4}$. Ⓓ $S_5=-\frac{4}{5}$.

Câu 93. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1=2$ và $u_4=16$. Công bội của cấp số nhân đã cho bằng

Ⓐ $q=4$. Ⓑ $q=2$. Ⓒ $q=-2$. Ⓓ $q=-4$.

Câu 94. Cho khối lăng trụ đứng có cạnh bên bằng 5, đáy là hình vuông có cạnh bằng 4. Hỏi thể tích của khối lăng trụ bằng bao nhiêu?

Ⓐ 100. Ⓑ 20. Ⓒ 64. Ⓓ 80.

Câu 95. Cho hàm số đa thức bậc ba $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

Giá trị cực đại của hàm số $y=f(x)$ bằng

Ⓐ $y_{C\text{Đ}}=-2$. Ⓑ $y_{C\text{Đ}}=2$. Ⓒ $y_{C\text{Đ}}=-1$. Ⓓ $y_{C\text{Đ}}=1$.

Câu 96. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-4x+2y-2z-3=0$. Tìm tọa độ tâm I và bán kính R của (S).

Ⓐ $I(2;-1;1)$ và $R=3$. Ⓑ $I(-2;1;-1)$ và $R=3$.
Ⓒ $I(2;-1;1)$ và $R=9$. Ⓓ $I(-2;1;-1)$ và $R=9$.

Câu 97. Mệnh đề nào **sai** trong các mệnh đề sau?

Ⓐ $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x=-\cot x+C$. Ⓑ $\displaystyle\int \cos x\,\mathrm{d}x=\sin x+C$.

Ⓒ $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \tan x + C.$ Ⓓ $\displaystyle\int \sin x\,\mathrm{d}x = \cos x + C.$

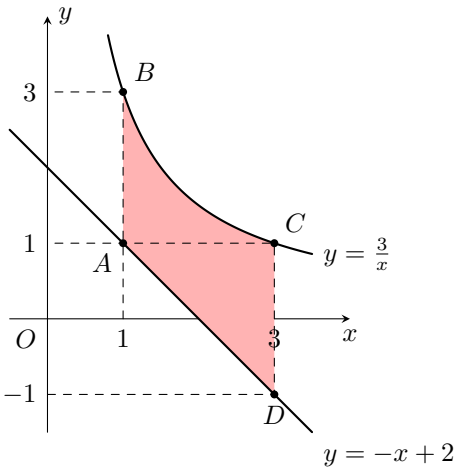
Câu 98. Với a là số thực dương tùy ý, $\log_{\sqrt{3}}(9a^3)$ bằng

Ⓐ $4 + 6\log_3 a.$ Ⓑ $1 + \frac{3}{2}\log_3 a.$ Ⓒ $4 - 6\log_3 a.$ Ⓓ $1 - \frac{3}{2}\log_3 a.$

Câu 99. Phương trình $\cot 3x = \cot x$ có các nghiệm là

Ⓐ $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$ Ⓑ $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$
Ⓒ $x = \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$ Ⓓ $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Câu 100. Hình thang cong $ABCD$ ở hình vẽ bên có diện tích bằng



Ⓐ $\displaystyle\int_1^3 \left(\frac{3}{x} - x + 2\right)\mathrm{d}x.$ Ⓑ $\displaystyle\int_1^3 \left(\frac{3}{x} - x - 2\right)\mathrm{d}x.$

Ⓒ $\displaystyle\int_1^3 \left(\frac{3}{x} + x + 2\right)\mathrm{d}x.$ Ⓓ $\displaystyle\int_1^3 \left(\frac{3}{x} + x - 2\right)\mathrm{d}x.$

Câu 101. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x - y - 2z + 3 = 0$. Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(4;1;-3)$ và vuông góc với (P) có phương trình chính tắc là

Ⓐ $\frac{x+4}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{-2}.$ Ⓑ $\frac{x-2}{4} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{-3}.$
Ⓒ $\frac{x+2}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{-2}.$ Ⓓ $\frac{x-4}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+3}{-2}.$

Câu 102. Cho mẫu số liệu ghép nhóm về điểm số và số học sinh như bảng sau.

Điểm số	$[2;4)$	$[4;6)$	$[6;8)$	$[8;10)$	$[10;12)$	$[12;14)$
Số học sinh	7	3	8	10	7	10

Tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm đã cho (làm tròn đến hàng phần trăm).

Ⓐ $7,31.$ Ⓑ $5,33.$ Ⓒ $2,74.$ Ⓓ $2,59.$

Câu 103. Tìm đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \frac{3x^2+4x-5}{x-1}$.

Ⓐ $y = x - 1.$ Ⓑ $y = 3x + 3.$ Ⓒ $y = 5x + 10.$ Ⓓ $y = 3x + 7.$

Câu 104. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x - 2y + z - 5 = 0$. Điểm nào dưới đây thuộc (P)?

Ⓐ $P(0;0;-5).$ Ⓑ $M(1;1;6).$ Ⓒ $Q(2;-1;5).$ Ⓓ $N(-5;0;0).$

Câu 105. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào sau đây là phương trình tổng quát của mặt phẳng?

Ⓐ $2x+y^2+z+1=0$.
Ⓑ $x^2+y+z+2=0$.
Ⓒ $2x+y+z+3=0$.
Ⓓ $2x+y+z^2+4=0$.

Câu 106. Thời gian (phút) đọc sách mỗi ngày của 60 học sinh được cho trong bảng sau

Thời gian (phút)	$[10;15)$	$[15;20)$	$[20;25)$	$[25;30)$	$[30;35)$
Số học sinh	3	10	12	15	20

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm (làm tròn đến hàng phần trăm) là

Ⓐ $6,18$.
Ⓑ $7,2$.
Ⓒ $5,3$.
Ⓓ $6,45$.

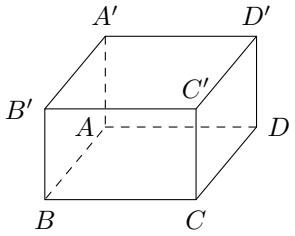
Câu 107. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục, không âm trên đoạn $[a;b]$ như hình vẽ. Hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a, x=b$ quay quanh trục Ox tạo thành một khối tròn xoay có thể tích bằng

Ⓐ $V=\pi\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
Ⓑ $V=\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.
Ⓒ $V=\displaystyle\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$.
Ⓓ $V=\pi\displaystyle\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$.

Câu 108. Cho tập $M=\{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$. Số các số tự nhiên gồm 4 chữ số phân biệt lập từ M là

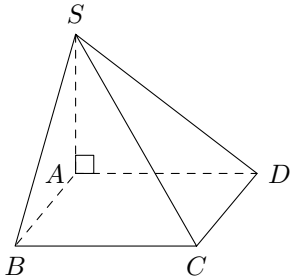
Ⓐ $4!$.
Ⓑ A_9^4.
Ⓒ 4^9.
Ⓓ C_9^4.

Câu 109. Trong không gian, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?



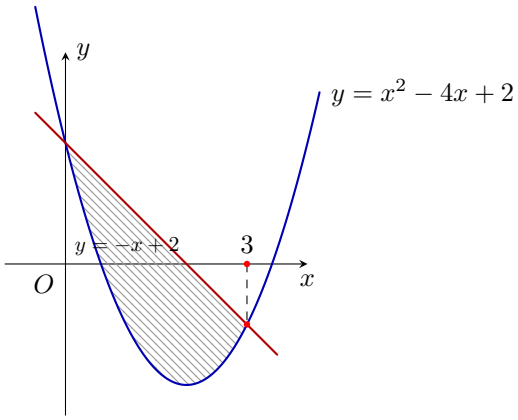
Ⓐ $\overrightarrow{CA'}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CC'}$.
Ⓑ $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}$.
Ⓒ $\overrightarrow{BD'}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BB'}$.
Ⓓ $\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}$.

Câu 110. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và $SA\perp(ABCD)$. Đường thẳng nào sau đây vuông góc với SA?



Ⓐ SC. Ⓑ BD. Ⓒ SB. Ⓓ SD.

Câu 111. Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào dưới đây?



Ⓐ $\int_0^3 (x^2 - 3x)\,\mathrm{d}x$.

Ⓑ $\int_0^3 (-x^2 + 3x)\,\mathrm{d}x$.

Ⓒ $\int_0^3 (x^2 - 4x + 2)\,\mathrm{d}x - \int_0^3 (-x + 2)\,\mathrm{d}x$.

Ⓓ $\int_0^3 (-x + 2)\,\mathrm{d}x + \int_0^3 (x^2 - 4x + 2)\,\mathrm{d}x$.

Câu 112. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (1; 2; -3)$. Độ dài của vectơ $\vec{a}$ là

Ⓐ $\sqrt{13}$. Ⓑ 0. Ⓒ $\sqrt{14}$. Ⓓ $\sqrt{12}$.

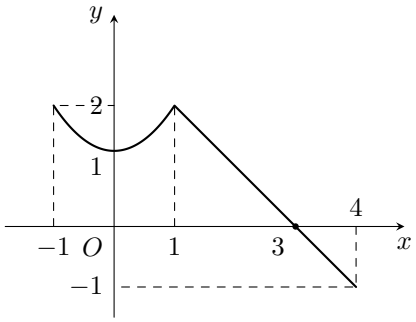
Câu 113. Cho cấp số nhân (u_n) biết $u_1 = 2, u_2 = 1$. Công bội của cấp số nhân đó là

Ⓐ -2. Ⓑ 2. Ⓒ $-\frac{1}{2}$. Ⓓ $\frac{1}{2}$.

Câu 114. Tích phân $\int_0^1 e^x\,\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ e. Ⓑ $e - 1$. Ⓒ $\frac{e-1}{2}$. Ⓓ $e^2 - 1$.

Câu 115. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

Ⓐ $(0; 1)$. Ⓑ $(1; 2)$. Ⓒ $(0; 3)$. Ⓓ $(1; 4)$.

Câu 116. Cho khối chóp có thể tích bằng 18 cm^3 và diện tích đáy bằng 9 cm^2. Chiều cao của khối chóp đó là

Ⓐ 2 cm. Ⓑ 6 cm. Ⓒ 3 cm. Ⓓ 4 cm.

Câu 117. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(3x+1)<2$ là

Ⓐ $\left[-\frac{1}{3};1\right)$. Ⓑ $\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$. Ⓒ $\left(-\frac{1}{3};1\right)$. Ⓓ $(-\infty;1)$.

Câu 118. Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x)=-\frac{1}{\sin^2 x}$ là

Ⓐ $\tan x+C$. Ⓑ $-\cot x+C$. Ⓒ $\cot x+C$. Ⓓ $-\tan x+C$.

Câu 119. Một mẫu số liệu ghép nhóm về chiều cao của một lớp (đơn vị là centimet) có phương sai là $6,25$. Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu đó bằng

Ⓐ $2,5$ cm. Ⓑ $12,5$ cm. Ⓒ $3,125$ cm. Ⓓ $42,25$ cm.

Câu 120. Tập xác định của hàm số $y=\log_{\frac{1}{5}}(x-2)$ là

Ⓐ $(-\infty;+\infty)$. Ⓑ $(2;+\infty)$. Ⓒ $[2;+\infty)$. Ⓓ $\left(\frac{1}{5};+\infty\right)$.

Câu 121. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình sau:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	4	↘	$-\infty$

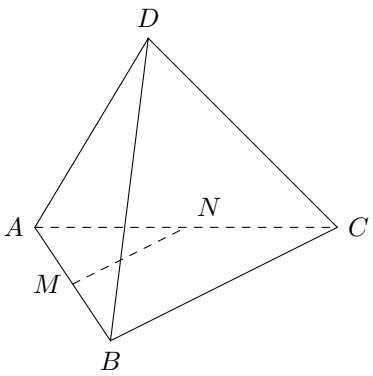
Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

Ⓐ $(1;2)$. Ⓑ $(-2;+\infty)$. Ⓒ $(-1;2)$. Ⓓ $(-\infty;0)$.

Câu 122. Cho $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=2$ và $\int_0^2 g(x)\,\mathrm{d}x=3$. Tích phân $\int_0^2 [2f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ 5. Ⓑ 7. Ⓒ -1. Ⓓ 1.

Câu 123. Cho tứ diện $ABCD$ có M,N lần lượt là trung điểm của AB,AC. Mặt phẳng nào sau đây song song với đường thẳng MN?



Ⓐ (ACD). Ⓑ (ABD). Ⓒ (ABC). Ⓓ (BCD).

Câu 124. Trong không gian $Oxyz$, phương trình của mặt cầu có tâm O và đi qua điểm $M(1;2;-2)$ là

Ⓐ $x^2+y^2+z^2=9$. Ⓑ $x^2+y^2+z^2=1$.
Ⓒ $x^2+y^2+z^2=0$. Ⓓ $x^2+y^2+z^2=3$.

Câu 125. Hàm số $y=\frac{x^2+2x+4}{x+2}$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

Ⓐ $(-2;0)$. Ⓑ $(-\infty;-2)$. Ⓒ $(0;+\infty)$. Ⓓ $(-4;0)$.

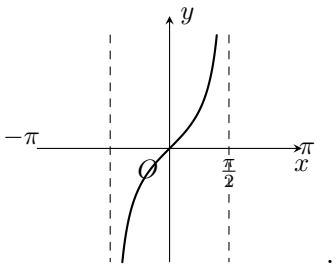
Câu 126. Biết rằng $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[1;4]$ và $F(4)=9, F(1)=3$. Giá trị của $\displaystyle\int_1^4 [f(x)+2]\,\mathrm{d}x$ bằng

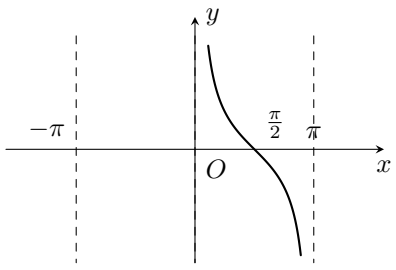
Ⓐ 0. Ⓑ 8. Ⓒ -4. Ⓓ 12.

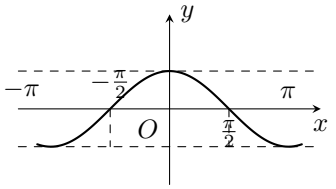
Câu 127. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3(x-2)<1$ là

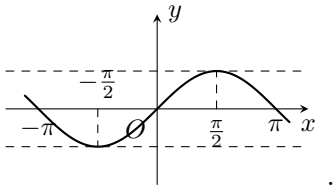
Ⓐ $(5;+\infty)$. Ⓑ $(-\infty;5)$. Ⓒ $(0;5)$. Ⓓ $(2;5)$.

Câu 128. Đồ thị nào dưới đây là đồ thị của hàm số $y=\sin x$?

Ⓐ 

Ⓑ 

Ⓒ 

Ⓓ 

Câu 129. Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a}=(2;-1;0)$, $\vec{b}=(-1;-3;2)$, $\vec{c}=(-2;-4;-3)$. Tọa độ của vectơ $\vec{u}=2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}$ là

Ⓐ $(3;7;9)$. Ⓑ $(-3;-7;-9)$.
Ⓒ $(5;3;-9)$. Ⓓ $(-5;-3;9)$.

Câu 130. Mỗi ngày ông An đều đi bộ để rèn luyện sức khỏe. Quãng đường đi bộ mỗi ngày (đơn vị: km) của ông An trong 20 ngày được thống kê lại ở bảng sau:

Quãng đường (km)	$[2,7;3,0)$	$[3,0;3,3)$	$[3,3;3,6)$	$[3,6;3,9)$	$[3,9;4,2]$
Số ngày	3	6	5	4	2

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu trên là

Ⓐ $1,2$. Ⓑ $0,9$. Ⓒ $1,5$. Ⓓ $0,3$.

Câu 131. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ có bảng biến thiên như hình bên. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có bao nhiêu đường tiệm cận ngang?

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$-$		$-$	
y	2	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	-2

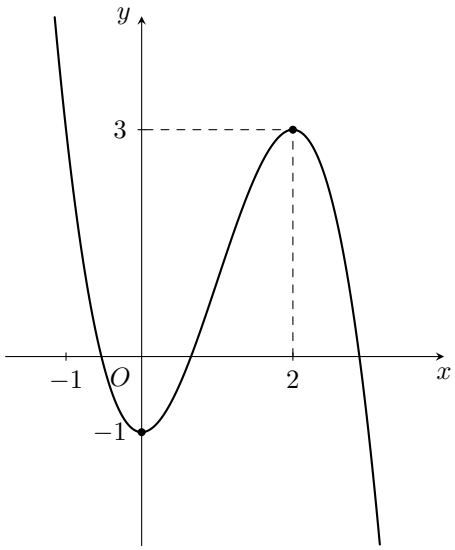
Ⓐ 0. Ⓑ 2. Ⓒ 3. Ⓓ 1.

Câu 132. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ

thị hàm số $y=f(x)$, trục Ox và các đường thẳng $x=a, x=b$ là

Ⓐ $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.
Ⓑ $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|$.
Ⓒ $\displaystyle\pi\int_a^b [f(x)]^2\,\mathrm{d}x$.
Ⓓ $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Câu 133. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



Ⓐ $(-1;2)$.
Ⓑ $(2;+\infty)$.
Ⓒ $(-1;3)$.
Ⓓ $(0;2)$.

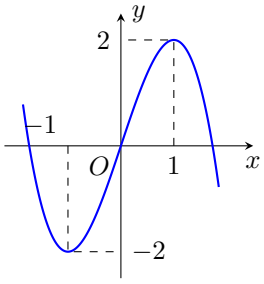
Câu 134. Cho cấp số nhân (u_n) với số hạng đầu $u_1=6$ và công bội $q=-\frac{1}{2}$. Tính u_5.

Ⓐ $\frac{3}{8}$.
Ⓑ -3.
Ⓒ $-\frac{3}{8}$.
Ⓓ $\frac{4}{3}$.

Câu 135. Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^x<\frac{1}{8}$ là

Ⓐ $(3;+\infty)$.
Ⓑ $(-\infty;3)$.
Ⓒ $[3;+\infty)$.
Ⓓ $(-\infty;3]$.

Câu 136. Cho hàm số có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào sau đây?



Ⓐ $(-\infty;-1)$.
Ⓑ $(-\infty;1)$.
Ⓒ $(-1;1)$.
Ⓓ $(1;+\infty)$.

Câu 137. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và $SA\perp(ABCD)$. Đường thẳng nào sau đây vuông góc với mặt phẳng (SAD)?

Ⓐ SC.
Ⓑ SB.
Ⓒ BC.
Ⓓ CD.

Câu 138. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho vectơ $\vec{u}=\vec{j}-4\vec{k}$. Tọa độ vectơ $\vec{u}$

là

Ⓐ $(1;-4)$. Ⓑ $(0;1;-4)$. Ⓒ $(1;0;-4)$. Ⓓ $(0;-1;4)$.

Câu 139. Cho $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 1$ và $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = -4$. Tích phân $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ 5. Ⓑ -3. Ⓒ -5. Ⓓ 3.

Câu 140. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào sau đây là phương trình tổng quát của mặt phẳng?

Ⓐ $2x + y^2 + z + 1 = 0$.
Ⓑ $x^2 + y + z + 2 = 0$.
Ⓒ $2x + y + z + 3 = 0$.
Ⓓ $2x + y + z^2 + 4 = 0$.

Câu 141. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{4x+3}$ là

Ⓐ $e^{4x+3} + C$.
Ⓑ $4e^{4x+3} + C$.
Ⓒ $(4x + 3)e^{4x+2}$.
Ⓓ $\frac{1}{4}e^{4x+3} + C$.

Câu 142. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;-1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P) : 2x - 2y - z - 8 = 0$ có phương trình là

Ⓐ $(S) : (x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 9$.
Ⓑ $(S) : (x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 3$.
Ⓒ $(S) : (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 3$.
Ⓓ $(S) : (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$.

Câu 143. Phương trình $2^x = 7$ có nghiệm là

Ⓐ $x = \log_2 7$. Ⓑ $x = \log_7 2$. Ⓒ $x = 3$. Ⓓ $x = 2$.

Câu 144. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, đường thẳng nào sau đây có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (2;3;-1)$?

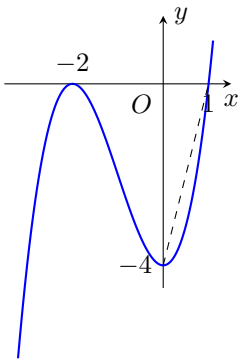
Ⓐ $\begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = 2 - 6t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$.
Ⓑ $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 2 + 6t \\ z = -1 - 4t \end{cases}$.
Ⓒ $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 - 3t \\ z = -1 - t \end{cases}$.
Ⓓ $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 3t \\ z = -1 - t \end{cases}$.

Câu 145. Hàm số nào sau đây **không** có cực trị?

Ⓐ $y = \frac{x^2-3}{x-2}$.
Ⓑ $y = \frac{2x-1}{x+2}$.
Ⓒ $y = x^3 - 2x - 1$.
Ⓓ $y = -x^4 - x^2 + 1$.

Câu 146. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số đã cho đồng biến trên

khoảng nào dưới đây?



Ⓐ $(0;+\infty)$. Ⓑ $(-1;+\infty)$. Ⓒ $(-2;0)$. Ⓓ $(-4;+\infty)$.

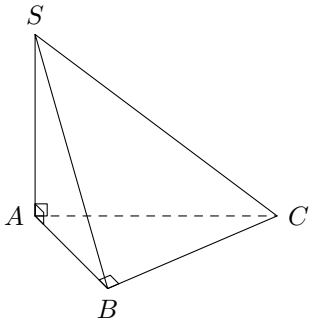
Câu 147. Cho cấp số nhân (u_n), biết $u_1=1; u_4=64$. Tìm công bội q của cấp số nhân.

Ⓐ $q=2$. Ⓑ $q=8$. Ⓒ $q=4$. Ⓓ $q=2\sqrt{2}$.

Câu 148. Tập xác định của hàm số $y=\log_2(x-3)$ là

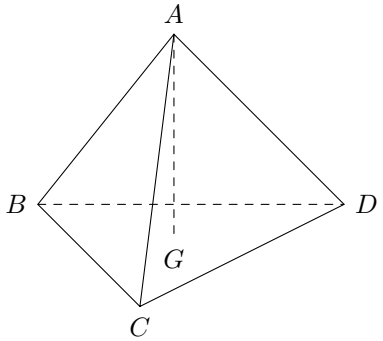
Ⓐ $(3;+\infty)$. Ⓑ $(0;3)$. Ⓒ $[3;+\infty)$. Ⓓ $[0;3]$.

Câu 149. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B và cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Phát biểu nào sau đây là **sai**?



Ⓐ $(SAB)\perp(ABC)$.
Ⓑ $(SAC)\perp(ABC)$.
Ⓒ $(SAC)\perp(SBC)$.
Ⓓ $(SAB)\perp(SBC)$.

Câu 150. Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm của tam giác BCD. Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{x}, \overrightarrow{AC}=\vec{y}, \overrightarrow{AD}=\vec{z}$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

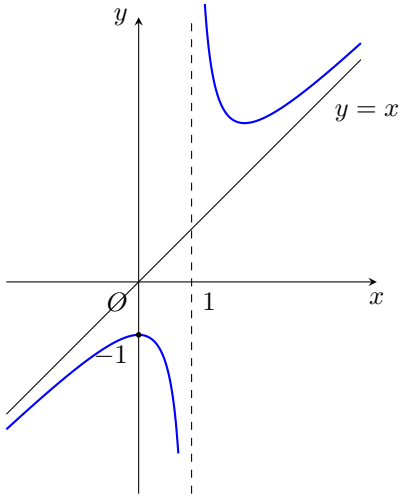


Ⓐ $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}(\vec{x}+\vec{y}+\vec{z})$.
Ⓑ $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}(\vec{x}+\vec{y}+\vec{z})$.
Ⓒ $\overrightarrow{AG}=-\frac{1}{3}(\vec{x}+\vec{y}+\vec{z})$.
Ⓓ $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}(\vec{x}+\vec{y}+\vec{z})$.

Câu 151. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $\Delta : \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{-1}$ song song với mặt phẳng nào sau đây?

Ⓐ $(P) : x + y - z = 0$.
Ⓑ $(\beta) : x + z = 0$.
Ⓒ $(Q) : x + y + 2z = 0$.
Ⓓ $(\alpha) : x - y + 1 = 0$.

Câu 152. Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



Ⓐ $y = \frac{x^2+x-1}{x-1}$.
Ⓑ $y = \frac{x^2-x+1}{x-1}$.
Ⓒ $y = \frac{x^2-4x-1}{x+1}$.
Ⓓ $y = \frac{x^2-4x+5}{x-2}$.

Câu 153. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình của đường thẳng đi qua điểm $M(1;-3;5)$ và có một véc-tơ chỉ phương $\vec{u}(2;-1;1)$ là

Ⓐ $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-5}{1}$.
Ⓑ $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+5}{1}$.
Ⓒ $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-5}{1}$.
Ⓓ $\frac{x+1}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-5}{1}$.

Câu 154. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(x-1) < 3$ là

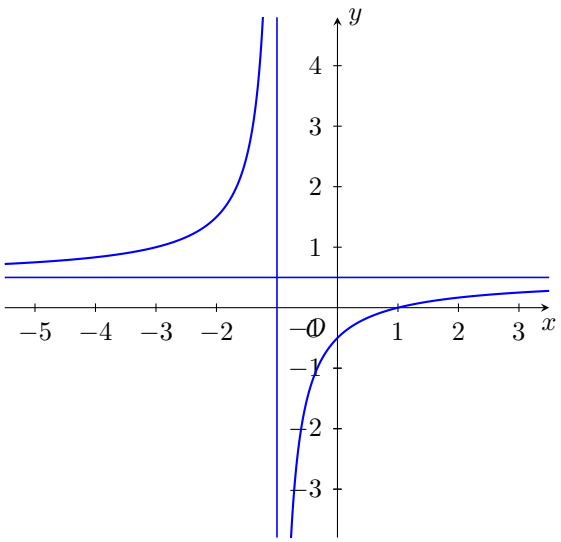
Ⓐ $(1;9)$.
Ⓑ $(-\infty;9)$.
Ⓒ $(9;+\infty)$.
Ⓓ $(1;7)$.

Câu 155. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và $SA \perp (ABCD)$. Mặt phẳng nào sau đây vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$?

Ⓐ (SAB).
Ⓑ (SBC).
Ⓒ (SCD).
Ⓓ (SBD).

Câu 156. Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ $(c \neq 0, ad - bc \neq 0)$ có đồ thị như hình bên. Tiệm cận ngang

của đồ thị hàm số là



Ⓐ $x=-1$. Ⓑ $y=\frac{1}{2}$. Ⓒ $y=-1$. Ⓓ $x=\frac{1}{2}$.

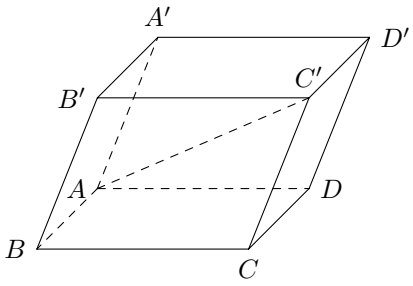
Câu 157. Nghiệm của phương trình $2^x=6$ là

Ⓐ $x=\log_6 2$. Ⓑ $x=3$. Ⓒ $x=4$. Ⓓ $x=\log_2 6$.

Câu 158. Cấp số cộng (u_n) có $u_1=1$ và $u_2=3$. Số hạng u_5 của cấp số cộng là

Ⓐ 5. Ⓑ 7. Ⓒ 9. Ⓓ 11.

Câu 159. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ (minh họa như hình dưới). Phát biểu nào sau đây là đúng?



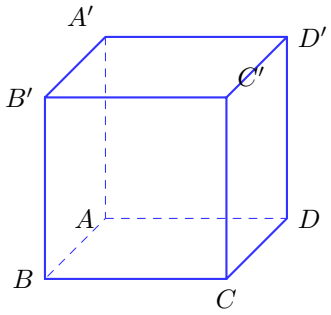
Ⓐ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{B'A'}=\overrightarrow{AC'}$. Ⓑ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC'}+\overrightarrow{C'D'}=\overrightarrow{AC'}$.
Ⓒ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$. Ⓓ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC'}$.

Câu 160. Tập nghiệm của bất phương trình $3^{2x-3}\le\frac{1}{3}$ là

Ⓐ $(-\infty;1]$. Ⓑ $[1;+\infty)$. Ⓒ $(-\infty;2]$. Ⓓ $[2;+\infty)$.

Câu 161. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Độ dài của vectơ $\vec{u}=$

$\overrightarrow{A'C'} - \overrightarrow{A'A}$ bằng



Ⓐ $\sqrt{2}a$. Ⓑ $\frac{\sqrt{3}a}{2}$. Ⓒ $\sqrt{6}a$. Ⓓ $\sqrt{3}a$.

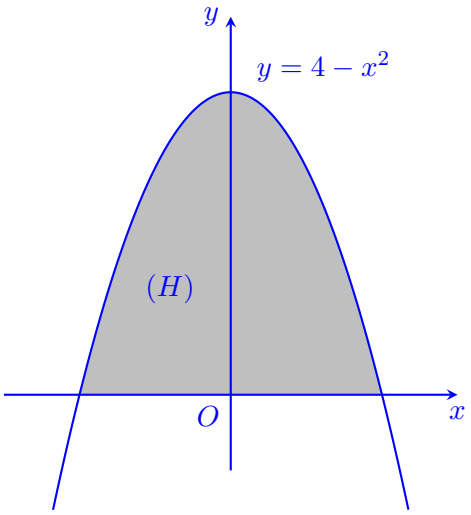
Câu 162. Một vườn thú ghi lại tuổi thọ (đơn vị: năm) của 20 con hổ và thu được kết quả như sau:

Tuổi thọ	$[14;15)$	$[15;16)$	$[16;17)$	$[17;18)$	$[18;19)$
Số con hổ	1	3	8	6	2

Nhóm chứa tứ phân vị thứ nhất là

Ⓐ $[14;15)$. Ⓑ $[15;16)$. Ⓒ $[16;17)$. Ⓓ $[17;18)$.

Câu 163. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 4 - x^2$ và trục hoành. Thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox bằng



Ⓐ $\frac{32\pi}{3}$. Ⓑ $\frac{512}{15}$. Ⓒ $\frac{512\pi}{15}$. Ⓓ $\frac{32}{3}$.

Câu 164. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(2) = 2$ và $F(x) = \int [x - f(x)]\mathrm{d}x, \forall x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $F(4)$ bằng

Ⓐ 5. Ⓑ 6. Ⓒ 8. Ⓓ 9.

Câu 165. Mặt phẳng đi qua ba điểm $A(0;0;2)$, $B(1;0;0)$ và $C(0;3;0)$ có phương trình là

Ⓐ $\frac{x}{1} + \frac{y}{3} + \frac{z}{2} = 1$. Ⓑ $\frac{x}{1} + \frac{y}{3} + \frac{z}{2} = -1$.
Ⓒ $\frac{x}{2} + \frac{y}{1} + \frac{z}{3} = 1$. Ⓓ $\frac{x}{2} + \frac{y}{1} + \frac{z}{3} = -1$.

Câu 166. Nếu $\int_{-1}^{2} f(x)\mathrm{d}x = 5$ thì $\int_{-1}^{2} 4f(x)\mathrm{d}x$ bằng:

Ⓐ 20. Ⓑ 10. Ⓒ $\frac{5}{2}$. Ⓓ $\frac{5}{4}$.

Câu 167. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S) có tâm $I(2;1;-1)$ và đường kính bằng 6 có phương trình là

Ⓐ $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=36$.
Ⓑ $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=9$.
Ⓒ $(x+2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=9$.
Ⓓ $(x+2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=36$.

Câu 168. Một mẫu số liệu ghép nhóm về chiều cao của một lớp (đơn vị là centimét) có phương sai bằng $6,25$. Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu đó bằng:

Ⓐ $2,5$(cm). Ⓑ $12,5$(cm). Ⓒ $3,125$(cm). Ⓓ $42,25$(cm).

Câu 169. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y=\frac{3x-1}{x-3}$ trên đoạn $[0;2]$.

Ⓐ $M=5$. Ⓑ $M=-5$. Ⓒ $M=\frac{1}{3}$. Ⓓ $M=-\frac{1}{3}$.

Câu 170. Cho hai biến cố A, B với $0<P(B)<1$. Phát biểu nào sau đây là **đúng**?

Ⓐ $P(A)=P(\overline{B})\cdot P(A|B)+P(B)\cdot P(A|\overline{B})$.
Ⓑ $P(A)=P(B)\cdot P(A|B)-P(\overline{B})\cdot P(A|\overline{B})$.
Ⓒ $P(A)=P(\overline{B})\cdot P(A|\overline{B})-P(B)\cdot P(A|B)$.
Ⓓ $P(A)=P(B)\cdot P(A|B)+P(\overline{B})\cdot P(A|\overline{B})$.

Câu 171. Một thư viện ghi lại số giờ đọc sách của 50 sinh viên trong một ngày và thu được mẫu số liệu ghép nhóm sau:

Nhóm giờ	$[0;1)$	$[1;2)$	$[2;3)$	$[3;4)$	$[4;5)$
Số sinh viên	8	11	15	9	7

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm gần nhất với giá trị nào sau đây?

Ⓐ $1,69$. Ⓑ $1,85$. Ⓒ $2,02$. Ⓓ $1,98$.

Câu 172. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_5(2x-1)<\log_5(x+2)$ là

Ⓐ $S=(3;+\infty)$. Ⓑ $S=(-\infty;3)$.
Ⓒ $S=\left(\frac{1}{2};3\right)$. Ⓓ $S=(-2;3)$.

Câu 173. Cho cấp số nhân (u_n) có tổng n số hạng đầu tiên là $S_n=5^n-1$ với $n\in\mathbb{N}^*$. Tìm số hạng đầu u_1 và công bội q của cấp số nhân đó.

Ⓐ $u_1=5, q=4$. Ⓑ $u_1=4, q=6$.
Ⓒ $u_1=4, q=5$. Ⓓ $u_1=6, q=5$.

Câu 174. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-2;1)$ và $B(0;1;2)$. Tọa độ điểm M thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho ba điểm A, B, M thẳng hàng là:

Ⓐ $M(4;-5;0)$. Ⓑ $M(2;-3;0)$. Ⓒ $M(0;0;1)$. Ⓓ $M(4;5;0)$.

Câu 175. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\frac{x^2+3}{x-1}$ trên đoạn $[2;4]$ là

Ⓐ $\min\limits_{[2;4]} y=6$. Ⓑ $\min\limits_{[2;4]} y=-2$.
Ⓒ $\min\limits_{[2;4]} y=-3$. Ⓓ $\min\limits_{[2;4]} y=\frac{19}{3}$.

Câu 176. Tập nghiệm của bất phương trình $5^{x-1}\geq 5^{x^2-x-9}$ là

Ⓐ $[-2;4]$. Ⓑ $[-4;2]$.

Ⓒ $(-\infty;-2]\cup[4;+\infty)$. Ⓓ $(-\infty;-4]\cup[2;+\infty)$.

Câu 177. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=x^2-1$ và $y=x-1$ bằng

Ⓐ $\frac{\pi}{6}$. Ⓑ $\frac{13}{6}$. Ⓒ $\frac{13\pi}{6}$. Ⓓ $\frac{1}{6}$.

Câu 178. Cho hàm số $y=\frac{x-2}{x+3}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

Ⓐ Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.
Ⓑ Hàm số nghịch biến trên từng khoảng $(-\infty;-3)$ và $(-3;+\infty)$.
Ⓒ Hàm số đồng biến trên từng khoảng $(-\infty;-3)$ và $(-3;+\infty)$.
Ⓓ Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

Câu 179. Cho hai biến cố A và B với $P(A)=0,3; P(B)=0,4$ và $P(AB)=0,2$. Xác suất để A hoặc B xảy ra bằng

Ⓐ $0,3$. Ⓑ $0,4$. Ⓒ $0,6$. Ⓓ $0,5$.

Câu 180. Biết $F(x)=x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\int_1^3[1+f(x)]\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ 10. Ⓑ 8. Ⓒ $\frac{26}{3}$. Ⓓ $\frac{32}{3}$.

Câu 181. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1=2$ và công bội $q=3$. Tìm số hạng thứ 4 của cấp số nhân?

Ⓐ 24. Ⓑ 54. Ⓒ 162. Ⓓ 48.

Câu 182. Cho hai hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ liên tục trên $[a;b]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)$ và các đường thẳng $x=a$, $x=b$ bằng

Ⓐ $\left|\int_a^b[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x\right|$. Ⓑ $\int_a^b|f(x)+g(x)|\mathrm{d}x$.
Ⓒ $\int_a^b|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x$. Ⓓ $\int_a^b[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$.

Câu 183. Trong không gian, biết $|\vec{u}|=2, |\vec{v}|=1$ và góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ bằng $\frac{2\pi}{3}$. Tính tích vô hướng của hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$.

Ⓐ -1. Ⓑ 1. Ⓒ 2. Ⓓ $\frac{4\pi}{3}$.

Câu 184. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=1-2t\\y=-1\\z=3+t\end{cases}$. Vectơ nào sau đây là một vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ?

Ⓐ $\vec{u}_\Delta=(-2;-1;1)$. Ⓑ $\vec{u}_\Delta=(1;-1;3)$.
Ⓒ $\vec{u}_\Delta=(-2;0;1)$. Ⓓ $\vec{u}_\Delta=(2;0;1)$.

Câu 185. Cho tích phân $\int_0^1[f(x)+2x]\mathrm{d}x=2$. Khi đó tích phân $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng?

Ⓐ 1. Ⓑ 4. Ⓒ 2. Ⓓ 0.

Câu 186. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;1), B(0;2;1)$ và $C(1;-1;2)$. Mặt phẳng đi qua A và vuông góc với BC có phương trình là

Ⓐ $\frac{x+1}{1}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z+1}{1}$. Ⓑ $x-3y+z-1=0$.

Ⓒ $x-3y+z+1=0$. Ⓓ $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z-1}{1}$.

Câu 187. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^{2x}+\frac{3}{x}$ là

Ⓐ $\int f(x)\mathrm{d}x=e^{2x}+3\ln x+C$. Ⓑ $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{e^{2x}}{2}+3\ln|x|+C$.

Ⓒ $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{e^{2x}}{2}+3\ln x+C$. Ⓓ $\int f(x)\mathrm{d}x=e^{2x}+3\ln|x|+C$.

Câu 188. Cho cấp số cộng (u_n) với năm số hạng đầu là $2;7;12;17;22$. Số hạng tổng quát của cấp số cộng là

Ⓐ $u_n=3n+5$. Ⓑ $u_n=3n-5$.

Ⓒ $u_n=5n+3$. Ⓓ $u_n=5n-3$.

Câu 189. Cho A,B là hai biến cố của một phép thử. Biết $P(A)=0,8;P(B)=0,6;P(A|B)=0,72$. Hãy tính $P(B|A)$.

Ⓐ $0,54$. Ⓑ $0,46$. Ⓒ $0,6$. Ⓓ $0,48$.

Câu 190. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P):2x-y-z-3=0$ và $(Q):x-z-2=0$. Góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng

Ⓐ $30°$. Ⓑ $45°$. Ⓒ $60°$. Ⓓ $90°$.

Câu 191. Khảo sát thời gian tập thể dục của một số học sinh khối 11 thu được mẫu số liệu ghép nhóm sau:

Thời gian (phút)	$[0;20)$	$[20;40)$	$[40;60)$	$[60;80)$	$[80;100)$
Số học sinh	5	9	12	10	6

Mốt của mẫu số liệu ghép nhóm trên là:

Ⓐ 52. Ⓑ 42. Ⓒ 53. Ⓓ 54.

Câu 192. Một vật chuyển động có phương trình $s(t)=3\cos t$. Khi đó, vận tốc tức thời tại thời điểm t của vật là:

Ⓐ $v(t)=-3\sin t$. Ⓑ $v(t)=-3\cos t$.

Ⓒ $v(t)=3\cos t$. Ⓓ $v(t)=3\sin t$.

Câu 193. Trong không gian $Oxyz$, một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $\frac{x}{-2}+\frac{y}{-1}+\frac{z}{3}=1$ là

Ⓐ $\vec{n}=(3;6;-2)$. Ⓑ $\vec{n}=(2;-1;3)$.

Ⓒ $\vec{n}=(-3;-6;-2)$. Ⓓ $\vec{n}=(-2;-1;3)$.

Câu 194. Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{a}=(-1;0;2)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

Ⓐ $2\vec{a}=(2;0;-4)$. Ⓑ $2\vec{a}=(-2;0;-4)$.

Ⓒ $2\vec{a}=(-2;0;4)$. Ⓓ $2\vec{a}=(2;0;4)$.

Câu 195. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-2)(x+1),\forall x\in\mathbb{R}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

Ⓐ Hàm số đồng biến trên $(-1;+\infty)$.

Ⓑ Hàm số đồng biến trên $(-\infty;2)$.

Ⓒ Hàm số đồng biến trên $(-1;2)$.

Ⓓ Hàm số nghịch biến trên $(-1;2)$.

Câu 196. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-3}$. Mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(1;0;1)$ và vuông góc với đường thẳng d có phương trình là:

Ⓐ $2x + y - 3z + 1 = 0$.
Ⓑ $2x + y - 3z - 1 = 0$.
Ⓒ $x + z + 1 = 0$.
Ⓓ $x + z - 1 = 0$.

Câu 197. Cho hai biến cố A, B với $P(B) = 0,7; P(A|B) = 0,6$ và $P(A|\overline{B}) = 0,4$. Khi đó $P(A)$ bằng:

Ⓐ $0,5$.
Ⓑ $0,54$.
Ⓒ $0,46$.
Ⓓ $0,3$.

Câu 198. Tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x-3) \geq \log_{\frac{1}{2}} 4$ là

Ⓐ $S = (3;7]$.
Ⓑ $S = [3;7]$.
Ⓒ $S = (-\infty;7]$.
Ⓓ $S = [7;+\infty)$.

Câu 199. Một công ty thống kê lương của nhân viên theo tuần (đơn vị: USD) theo bảng sau:

Lương theo tuần (USD)	$[10;20)$	$[20;30)$	$[30;40)$	$[40;50)$	$[50;60)$
Số công nhân	4	6	10	20	10

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu này bằng bao nhiêu (làm tròn tới hàng phần chục)?

Ⓐ $11,7$.
Ⓑ 12.
Ⓒ $11,4$.
Ⓓ $12,5$.

Câu 200. Cho hàm số $f(x) = x^2 - \frac{4}{x}$. Giá trị của $\int_1^2 f'(x)\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ $\frac{7}{3} - \ln 2$.
Ⓑ 3.
Ⓒ $\frac{7}{3}$.
Ⓓ 5.

Câu 201. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

Ⓐ 4.
Ⓑ 3.
Ⓒ 2.
Ⓓ 1.

Câu 202. Biết $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x = 3$. Giá trị của $\int_1^3 2f(x)\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ 5.
Ⓑ 6.
Ⓒ 9.
Ⓓ $\frac{3}{2}$.

Câu 203. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(2;2;1)$ và có một vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (5;2;-3)$. Phương trình mặt phẳng (P) là

Ⓐ $5x + 2y - 3z - 17 = 0$.
Ⓑ $2x + 2y + z - 11 = 0$.
Ⓒ $5x + 2y - 3z - 11 = 0$.
Ⓓ $2x + 2y + z - 17 = 0$.

Câu 204. Nếu cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 3$ và công bội $q = 3$ thì số hạng tổng quát u_n của cấp số nhân đó bằng

Ⓐ 3^n.
Ⓑ 3^{n-1}.
Ⓒ 3^{n+1}.
Ⓓ $3 + (n-1).3$.

Câu 205. Tập nghiệm của bất phương trình $2^x \leq 4$ là

Ⓐ $(-\infty;2]$.
Ⓑ $[0;2]$.
Ⓒ $(-\infty;2)$.
Ⓓ $(0;2)$.

Câu 206. Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bên và cạnh đáy bằng nhau và $ABCD$

là hình vuông tâm O. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

Ⓐ $SA \perp (ABCD)$.
Ⓑ $SO \perp (ABCD)$.
Ⓒ $AB \perp (SBC)$.
Ⓓ $AC \perp (SBC)$.

Câu 207. Phát biểu nào sau đây là đúng?

Ⓐ $\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = |x| + C$.
Ⓑ $\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C$.
Ⓒ $\int \ln x \mathrm{d}x = x + C$.
Ⓓ $\int \ln|x| \mathrm{d}x = \ln x + C$.

Câu 208. Phương trình nào sau đây vô nghiệm?

Ⓐ $\pi \sin x = 4$.
Ⓑ $\tan x = \pi$.
Ⓒ $4 \sin x = \pi$.
Ⓓ $\tan x = 4$.

Câu 209. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P) : x - 3z + 5 = 0$. Tọa độ một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là

Ⓐ $\vec{n} = (1; -3; 5)$.
Ⓑ $\vec{n} = (1; 3; 0)$.
Ⓒ $\vec{n} = (1; 0; -3)$.
Ⓓ $\vec{n} = (1; -3; 0)$.

Câu 210. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Hãy chọn khẳng định đúng.

Ⓐ $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{B'D}$.
Ⓑ $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{DB'}$.
Ⓒ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC'}$.
Ⓓ $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} = \vec{0}$.

Câu 211. Với a là một số thực dương tùy ý, $a^{\frac{2}{3}}$ bằng

Ⓐ $\sqrt{a^3}$.
Ⓑ a^{-1}.
Ⓒ $\frac{a^2}{a^3}$.
Ⓓ $\sqrt[3]{a^2}$.

Câu 212. Trong các dãy số sau, dãy số nào **không** phải cấp số cộng?

Ⓐ $\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \frac{5}{2}; \frac{7}{2}; \frac{9}{2}$.
Ⓑ $1; 1; 1; 1; 1$.
Ⓒ $-8; -6; -4; -2; 0$.
Ⓓ $3; 1; -1; -2; -4$.

Câu 213. Hàm số nào dưới đây là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 - \frac{2}{x}$?

Ⓐ $y = x^3 - 2\ln|x|$.
Ⓑ $y = 6x - 2\ln|x|$.
Ⓒ $y = x^3 + \frac{2}{x^2}$.
Ⓓ $y = 6x + \frac{2}{x^2}$.

Câu 214. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Góc giữa hai đường thẳng SB và AD bằng bao nhiêu?

Ⓐ $60°$.
Ⓑ $45°$.
Ⓒ $90°$.
Ⓓ $30°$.

Câu 215. Giá trị của $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ 1.
Ⓑ -1.
Ⓒ 0.
Ⓓ 2.

Câu 216. Nếu $\log_a b = 3$ thì $\log_a b^2$ bằng

Ⓐ 9.
Ⓑ 4.
Ⓒ 6.
Ⓓ 7.

Câu 217. Cho cấp số nhân có $u_1 = 4$, $q = 3$. Hãy tính giá trị của u_3.

Ⓐ $u_3 = -2$.
Ⓑ $u_3 = 7$.
Ⓒ $u_3 = 10$.
Ⓓ $u_3 = 36$.

Câu 218. Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Hãy xác định góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{EG}$?

Ⓐ $45°$.
Ⓑ $90°$.
Ⓒ $60°$.
Ⓓ $120°$.

Câu 219. Biết $\int_2^3 f(x)\mathrm{d}x = 3$. Giá trị của $\int_2^3 [f(x)+3]\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ 6. Ⓑ 3. Ⓒ 9. Ⓓ 5.

Câu 220. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}} x \geq -3$ là

Ⓐ $S = (0;8]$. Ⓑ $S = [0;8]$.
Ⓒ $S = (-\infty;8]$. Ⓓ $S = [8;+\infty)$.

Câu 221. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2+8x-4y+10z-4=0$. Khi đó (S) có tâm I và bán kính R lần lượt là

Ⓐ $I(-4;2;-5), R=7$. Ⓑ $I(-4;2;-5), R=4$.
Ⓒ $I(-4;2;-5), R=49$. Ⓓ $I(-4;2;5), R=7$.

Câu 222. Biết rằng thể tích của một khối lập phương bằng 8. Tính tổng diện tích các mặt của hình lập phương đó.

Ⓐ 16. Ⓑ 24. Ⓒ 36. Ⓓ 27.

Câu 223. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=e^x, y=-1, x=0$ và $x=1$ được tính bởi công thức nào dưới đây?

Ⓐ $S = \pi\int_0^1 (e^x+1)\mathrm{d}x$. Ⓑ $S = \pi\int_0^1 (e^{2x}+1)\mathrm{d}x$.
Ⓒ $S = \int_0^1 (e^x+1)\mathrm{d}x$. Ⓓ $S = \int_0^1 (e^x-1)\mathrm{d}x$.

Câu 224. Hàm số nào dưới đây là hàm số mũ?

Ⓐ $y = x^{2025}$. Ⓑ $y = x^{-5}$. Ⓒ $y = \log_3 x$. Ⓓ $y = 2025^x$.

Câu 225. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;2;1)$. Tính độ dài đoạn thẳng OA.

Ⓐ $OA = 3$. Ⓑ $OA = 9$. Ⓒ $OA = \sqrt{5}$. Ⓓ $OA = 5$.

Câu 226. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

Ⓐ $\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1$. Ⓑ $1+\cot^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$.
Ⓒ $\tan\alpha + \cot\alpha = 2$. Ⓓ $1+\tan^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$.

Câu 227. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng $(ABCD)$ là

Ⓐ $\widehat{BSA}$. Ⓑ $\widehat{SAB}$. Ⓒ $\widehat{SBA}$. Ⓓ $\widehat{SBC}$.

Câu 228. Với a, b là các số thực dương tuỳ ý và $a \neq 1$, $\log_a \frac{1}{b^3}$ bằng

Ⓐ $3\log_a b$. Ⓑ $\log_a b$. Ⓒ $-3\log_a b$. Ⓓ $\frac{1}{3}\log_a b$.

Câu 229. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int_0^2 f'(x)\mathrm{d}x = 45$, $f(0) = 3$. Giá trị của biểu thức $f(2)$ bằng

Ⓐ 42. Ⓑ 15. Ⓒ 48. Ⓓ 135.

Câu 230. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P): 2x+y-1=0$ có một vectơ pháp tuyến là

Ⓐ $\vec{n}_4 = (2;1;0)$. Ⓑ $\vec{n}_3 = (1;2;0)$.

Ⓒ $\vec{n}_2 = (2;1;-1)$. Ⓓ $\vec{n}_1 = (-2;-1;1)$.

Câu 231. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$ là

Ⓐ $x^3 + x^2$. Ⓑ $x^3 + x - C$.
Ⓒ $x^3 + x^2 - x + C$. Ⓓ $6x + 2$.

Câu 232. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(1;1;0)$ và bán kính bằng 5. Phương trình của (S) là

Ⓐ $(x+1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 25$. Ⓑ $(x+1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 5$.
Ⓒ $(x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 25$. Ⓓ $(x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 5$.

Câu 233. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho điểm $M(3;2;-1)$ và vectơ $\vec{v} = (2;-1;-2)$. Tọa độ của điểm N thỏa mãn điều kiện $\vec{v} = \overrightarrow{MN}$ là

Ⓐ $(1;5;-3)$. Ⓑ $(1;3;1)$.
Ⓒ $(-1;-3;-1)$. Ⓓ $(5;1;-3)$.

Câu 234. Để chuẩn bị cho tiết học "Mạng xã hội: lợi và hại", giáo viên đã khảo sát thời gian sử dụng mạng xã hội trong một ngày của học sinh trong lớp 10A1 và thu được mẫu số liệu như sau:

Thời gian sử dụng (phút)	$[10;20)$	$[20;30)$	$[30;40)$	$[40;50)$	$[50;60)$	$[60;70)$
Số học sinh	5	10	15	7	5	3

Thời gian trung bình (phút) sử dụng mạng xã hội của học sinh lớp 10A1 xấp xỉ bằng

Ⓐ 35. Ⓑ 36,3. Ⓒ 33,6. Ⓓ 30,5.

Câu 235. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 2$ và công bội $q = 3$. Số hạng u_3 của cấp số nhân đã cho là

Ⓐ 5. Ⓑ 6. Ⓒ 18. Ⓓ 8.

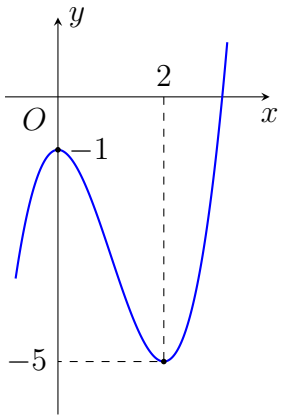
Câu 236. Nghiệm của phương trình $\log_2(x-1) = 3$ là

Ⓐ 10. Ⓑ 9. Ⓒ 8. Ⓓ 7.

Câu 237. Phương trình $\tan x = -1$ có tất cả các nghiệm là

Ⓐ $\frac{\pi}{4} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$. Ⓑ $-\frac{\pi}{4} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.
Ⓒ $\frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$. Ⓓ $-\frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 238. Cho đồ thị như hình vẽ. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào sau đây?



Ⓐ $(-\infty;-1)$. Ⓑ $(2;+\infty)$. Ⓒ $(-1;2)$. Ⓓ $(0;2)$.

Câu 239. Tập nghiệm của bất phương trình $(0,21)^x < 1$ là

Ⓐ $(-\infty;0]$. Ⓑ $[0;+\infty)$. Ⓒ $(-\infty;0)$. Ⓓ $(0;+\infty)$.

Câu 240. Tổ một của chi đoàn lớp 12C có 15 đoàn viên trong đó có 8 đoàn viên nam và 7 đoàn viên nữ. Chọn ngẫu nhiên 3 đoàn viên trong tổ. Tính xác suất để chọn được ít nhất 1 đoàn viên nữ.

Ⓐ $\frac{7}{15}$. Ⓑ $\frac{8}{65}$. Ⓒ $\frac{57}{65}$. Ⓓ $\frac{12}{13}$.

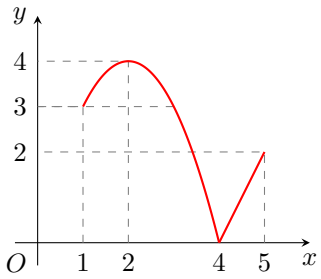
Câu 241. Tập nghiệm của bất phương trình $3^{3x+1} < \frac{1}{9}$ là

Ⓐ $(-1;+\infty)$. Ⓑ $(-\infty;1)$. Ⓒ $(1;+\infty)$. Ⓓ $(-\infty;-1)$.

Câu 242. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 2$ và $u_6 = -64$. Số hạng u_3 của cấp số nhân đã cho là

Ⓐ 8. Ⓑ -8. Ⓒ 16. Ⓓ -2.

Câu 243. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[1;5]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Trên đoạn $[1;5]$ hàm số đã cho có giá trị lớn nhất tại điểm



Ⓐ $x = 1$. Ⓑ $x = 5$. Ⓒ $x = 2$. Ⓓ $x = 4$.

Câu 244. Cho hai biến cố A, B có $P(A) = 0,6$; $P(B) = 0,8$; $P(AB) = 0,48$. Tính $P(\overline{B}|A)$.

Ⓐ $0,48$. Ⓑ $0,6$. Ⓒ $0,75$. Ⓓ $0,2$.

Câu 245. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x = 3$, $\int_{0}^{3} f(x)\mathrm{d}x = 1$. Tích phân $\int_{-1}^{3} f(x)\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ 6. Ⓑ 4. Ⓒ 2. Ⓓ 0.

Câu 246. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;2;1)$, $B(3;0;1)$, $C(1;0;0)$. Phương trình mặt phẳng (ABC) là

Ⓐ $2x - 3y - 4z + 2 = 0$. Ⓑ $4x + 6y - 8z + 2 = 0$.
Ⓒ $2x + 3y - 4z - 2 = 0$. Ⓓ $2x - 3y - 4z - 2 = 0$.

Câu 247. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P) : x - 4y + 3z - 2 = 0$. Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ pháp tuyến của (P)?

Ⓐ $\vec{n} = (0;-4;3)$. Ⓑ $\vec{n} = (1;4;3)$.
Ⓒ $\vec{n} = (-1;4;-3)$. Ⓓ $\vec{n} = (-4;3;-2)$.

Câu 248. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Tiệm cận đứng của đồ thị

hàm số đã cho là đường thẳng có phương trình

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'	$-$	$-$	
y	$2 \searrow$	$+\infty \searrow$	
	$-\infty$	2	

Ⓐ $x = 2$. Ⓑ $y = 2$. Ⓒ $x = 1$. Ⓓ $y = 1$.

Câu 249. Cho $f(x)$ và $g(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

Ⓐ $\int [f(x) + g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x$.

Ⓑ $\int kf(x)\mathrm{d}x = k\int f(x)\mathrm{d}x$ (số thực $k \neq 0$).

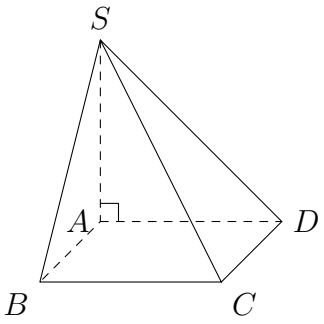
Ⓒ $\int f(x)g(x)\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x \cdot \int g(x)\mathrm{d}x$.

Ⓓ $\int f'(x)\mathrm{d}x = f(x) + C (C \in \mathbb{R})$.

Câu 250. Với a là số thực dương tùy ý, $\log \frac{a^2}{100}$ bằng

Ⓐ $2\log a - 10$. Ⓑ $\frac{1}{2}(\log a - 2)$. Ⓒ $2\log a - 2$. Ⓓ $\log a - 5$.

Câu 251. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình vuông cạnh a, $SA = a\sqrt{3}$. Đường thẳng $SA \perp (ABCD)$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng $(ABCD)$ là



Ⓐ $90°$. Ⓑ $30°$. Ⓒ $45°$. Ⓓ $60°$.

Câu 252. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 3; q = \frac{1}{2}$. Số $\frac{3}{512}$ là số hạng thứ mấy?

Ⓐ 11. Ⓑ 9. Ⓒ 10. Ⓓ 12.

Câu 253. Nhiệt độ trong 55 ngày của một địa phương được cho trong bảng ghép lớp sau:

Nhiệt độ ($°C$)	$[19;22)$	$[22;25)$	$[25;28)$	$[28;31)$	$[31;34)$	$[34;37)$
Số ngày	5	7	8	16	12	7

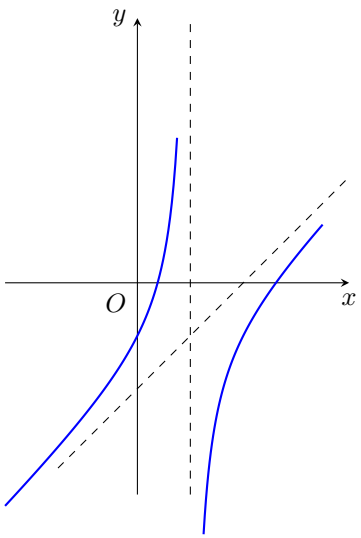
Phương sai của mẫu số liệu được làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất nằm trong khoảng

Ⓐ $(17;19)$. Ⓑ $(20;21)$. Ⓒ $(19;20)$. Ⓓ $(23;25)$.

Câu 254. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^x \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{-x+2}$.

Ⓐ $(-\infty;1)$. Ⓑ $[1;+\infty)$. Ⓒ $(-\infty;1]$. Ⓓ $(1;+\infty)$.

Câu 255. Đồ thị trong hình vẽ là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số dưới đây?



Ⓐ $y=\frac{2x+1}{x-1}$. Ⓑ $y=\frac{2x-1}{x-1}$.
Ⓒ $y=\frac{-x^2+3x+1}{x-1}$. Ⓓ $y=\frac{x^2-3x+1}{x-1}$.

Câu 256. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;1;1)$ và $B(0;3;-1)$. Mặt cầu đường kính AB có phương trình là

Ⓐ $(x-1)^2+(y-2)^2+z^2=9$.
Ⓑ $x^2+(y-2)^2+z^2=3$.
Ⓒ $(x-1)^2+(y-2)^2+z^2=3$.
Ⓓ $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$.

Câu 257. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-1}{2}$ và mặt phẳng $(P):2x-y-z-5=0$. Hãy tính côsin góc tạo bởi đường thẳng (d) và mặt phẳng (P).

Ⓐ $\frac{1}{\sqrt{6}}$. Ⓑ $\frac{1}{2}$. Ⓒ $\frac{\sqrt{30}}{6}$. Ⓓ $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 258. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên dưới.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		$+$		$+$	0	$-$	
y	-1	↗	$+\infty$	$-\infty$	↗	2	↘ $-\infty$

Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có tổng số bao nhiêu đường tiệm cận đứng và ngang?

Ⓐ 2. Ⓑ 0. Ⓒ 1. Ⓓ 3.

Câu 259. Hai khẩu pháo cao xạ cùng bắn độc lập với nhau vào một mục tiêu. Xác suất bắn trúng mục tiêu của hai khẩu pháo cao xạ lần lượt là $\frac{1}{4}$ và $\frac{1}{3}$. Xác suất để mục tiêu bị trúng đạn là:

Ⓐ $\frac{1}{2}$. Ⓑ $\frac{7}{12}$. Ⓒ $\frac{5}{12}$. Ⓓ $\frac{1}{4}$.

Câu 260. Phương trình $\sin x=-1$ có nghiệm là

Ⓐ $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
Ⓑ $x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
Ⓒ $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
Ⓓ $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 261. Khảo sát thu nhập theo tháng của người lao động ở một công ty thu được mẫu số ghép nhóm như bảng sau:

Thu nhập (triệu đồng)	$[5;8)$	$[8;11)$	$[11;14)$	$[14;17)$	$[17;20)$
Số người	30	55	45	30	20

Tính mức thu nhập trung bình của người lao động ở công ty trên (đơn vị: triệu đồng)

Ⓐ $10,5$.
Ⓑ $11,75$.
Ⓒ $12,5$.
Ⓓ 11.

Câu 262. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	-4	↗	$+\infty$

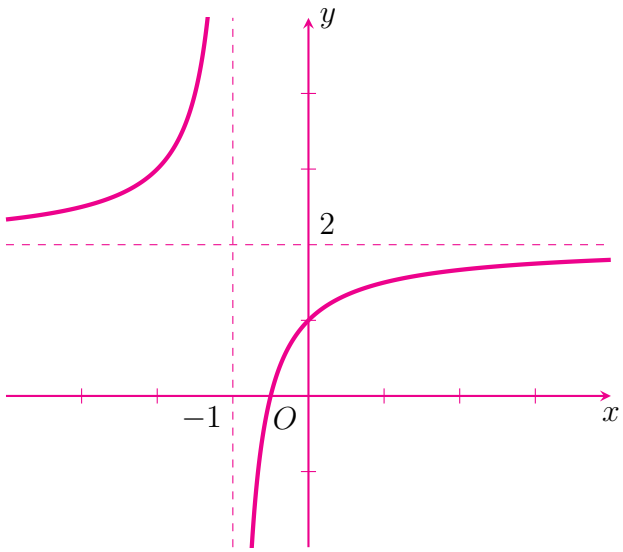
Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm

Ⓐ $y = 0$.
Ⓑ $x = -4$.
Ⓒ $y = -4$.
Ⓓ $x = 3$.

Câu 263. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;0;1)$. Tìm tọa độ điểm C thỏa mãn $\overrightarrow{AC} = (3;3;0)$?

Ⓐ $C(2;3;1)$.
Ⓑ $C(3;3;0)$.
Ⓒ $C(-3;-3;-1)$.
Ⓓ $C(4;3;1)$.

Câu 264. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C) như hình vẽ. Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là đường thẳng có phương trình:



Ⓐ $x = -1$.
Ⓑ $x = 1$.
Ⓒ $y = 2$.
Ⓓ $y = -2$.

Câu 265. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	1	↗	2	↘	$-\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

Ⓐ $(-1;1)$. Ⓑ $(1;+\infty)$. Ⓒ $(0;1)$. Ⓓ $(-1;0)$.

Câu 266. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 3$, công sai $d = -4$. Số hạng thứ năm của cấp số cộng là

Ⓐ -3072. Ⓑ -13. Ⓒ -17. Ⓓ 768.

Câu 267. Một chất điểm chuyển động có phương trình $s = 2t^2 + 3t$ (t tính bằng giây, s tính bằng mét). Vận tốc của chất điểm tại thời điểm $t_0 = 2$ (giây) bằng

Ⓐ $19(m/s)$. Ⓑ $22(m/s)$. Ⓒ $11(m/s)$. Ⓓ $9(m/s)$.

Câu 268. Doanh thu bán hàng trong 20 ngày được lựa chọn ngẫu nhiên của một cửa hàng được ghi lại ở bảng sau (đơn vị: triệu đồng):

Doanh thu	$[5;7)$	$[7;9)$	$[9;11)$	$[11;13)$	$[13;15)$
Số ngày	2	7	7	3	1

Số trung bình của mẫu số liệu trên thuộc khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

Ⓐ $[11;13)$. Ⓑ $[13;15)$. Ⓒ $[9;11)$. Ⓓ $[7;9)$.

Câu 269. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 4$ và công bội $q = 3$. Giá trị của u_2 bằng

Ⓐ 64. Ⓑ 81. Ⓒ 12. Ⓓ $\frac{4}{3}$.

Câu 270. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 + 2x + \cos x$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

Ⓐ $f'(x) = 3x^2 + 2 + \sin x$.
Ⓑ Hàm số đồng biến trên $(-\pi;\pi)$.
Ⓒ Hàm số nghịch biến trên $(\pi;2\pi)$.
Ⓓ $f(2025) > f(2026)$.

Câu 271. Có bao nhiêu cách xếp 8 học sinh thành một hàng dọc?

Ⓐ 8. Ⓑ 1. Ⓒ $40\,320$. Ⓓ 64.

Câu 272. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B, $AB = a$, $BC = a\sqrt{2}$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$ (tham khảo hình bên). Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng

Ⓐ $90°$. Ⓑ $45°$. Ⓒ $60°$. Ⓓ $30°$.

Câu 273. Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn $9^{\log_3(a^2b)} = 4a^3$. Giá trị của ab^2 bằng

Ⓐ 4. Ⓑ 2. Ⓒ 3. Ⓓ 6.

Câu 274. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có bảng xét dấu đạo hàm $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

Ⓐ Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;0)$..
Ⓑ Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$..
Ⓒ Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$..
Ⓓ Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$..

Câu 275. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(x-5)\leq 4$ chứa bao nhiêu số nguyên?

Ⓐ 15. Ⓑ 16. Ⓒ 17. Ⓓ 18.

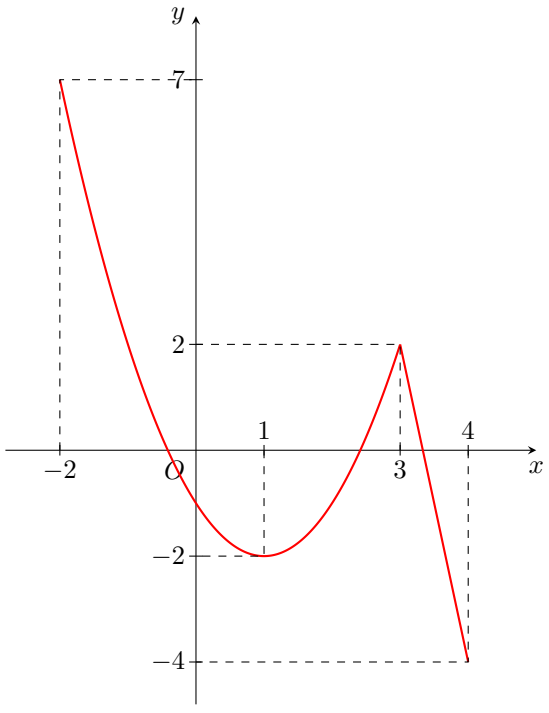
Câu 276. Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y=x\ln x$ tại điểm có hoành độ $x=e$ bằng

Ⓐ 1. Ⓑ 0. Ⓒ 2. Ⓓ e.

Câu 277. Hàm số nào sau đây nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

Ⓐ $y=x^3+x$. Ⓑ $y=-x^3-3x$.
Ⓒ $y=-x^4-x^2$. Ⓓ $y=\frac{x+1}{x-3}$.

Câu 278. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2;4]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-2;4]$ bằng



Ⓐ 5. Ⓑ -2. Ⓒ 3. Ⓓ 0.

Câu 279. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định sai?

Ⓐ $(\overrightarrow{A'C'},\overrightarrow{AD})=45°$.
Ⓑ $(\overrightarrow{A'C'},\overrightarrow{B'B})=90°$.
Ⓒ $(\overrightarrow{A'A},\overrightarrow{CB'})=45°$.
Ⓓ $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})=180°$.

Câu 280. Cho hình hộp $ABCD.EFGH$. Vectơ nào sau đây bằng vectơ $\overrightarrow{FH}$

Ⓐ $\overrightarrow{BD}$. Ⓑ $\overrightarrow{DB}$. Ⓒ $\overrightarrow{BA}$. Ⓓ $\overrightarrow{AB}$.

Câu 281. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, với $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ là các vectơ đơn vị trên trục Ox, Oy, Oz tương ứng và vectơ $\vec{a} = (1;0;1)$. Kết quả nào sau đây đúng?

Ⓐ $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$. Ⓑ $\vec{a} = \vec{j} + \vec{k}$.
Ⓒ $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$. Ⓓ $\vec{a} = \vec{i} + \vec{k}$.

Câu 282. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Tổng $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD}$ bằng

Ⓐ $4\overrightarrow{SO}$. Ⓑ $8\overrightarrow{SO}$. Ⓒ $3\overrightarrow{SO}$. Ⓓ $2\overrightarrow{SO}$.

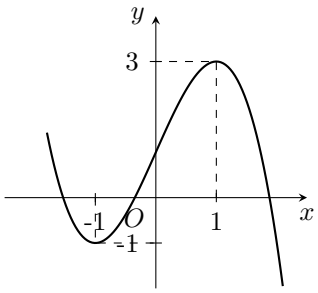
Câu 283. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 2$ trên đoạn $[-3;3]$ bằng

Ⓐ 0. Ⓑ -16. Ⓒ 4. Ⓓ 20.

Câu 284. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho vectơ $\vec{u} = \vec{j} - 4\vec{k}$. Tọa độ của vectơ $\vec{u}$ là

Ⓐ $(1;-4)$. Ⓑ $(0;1;-4)$. Ⓒ $(1;0;-4)$. Ⓓ $(0;-1;4)$.

Câu 285. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$ có đồ thị trên $\mathbb{R}$ là đường cong trong hình bên. Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng



Ⓐ 1. Ⓑ 3. Ⓒ 0. Ⓓ -1.

Câu 286. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
y'		$+$		$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	4	↘	$-\infty$

Ⓐ Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$ và $(3;+\infty)$..
Ⓑ Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$..
Ⓒ Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(3;+\infty)$..
Ⓓ Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;3)$..

Câu 287. Hình chiếu vuông góc của điểm $A(2;3;-1)$ trên mặt phẳng (Oyz) là điểm

Ⓐ $M(2;0;0)$.
Ⓑ $N(0;-3;1)$.
Ⓒ $P(0;3;-1)$.
Ⓓ $Q(-2;3;-1)$.

Câu 288. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai véc-tơ $\vec{x}=(2;1;-3)$ và $\vec{y}=(1;0;-1)$. Tìm tọa độ của véc-tơ $\vec{a}=\vec{x}+2\vec{y}$.

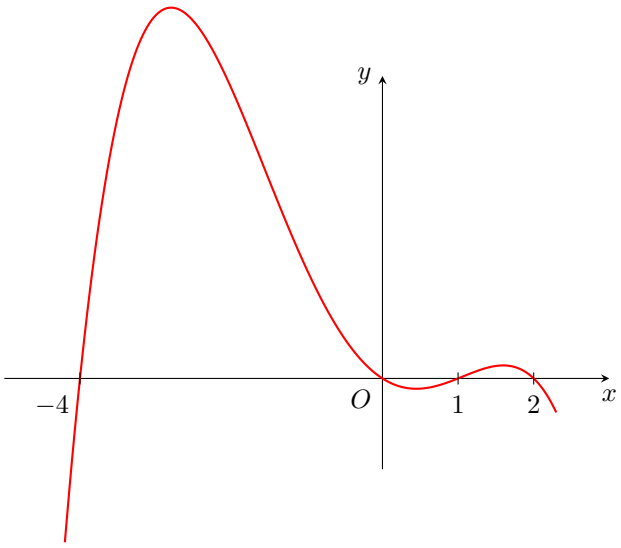
Ⓐ $\vec{a}=(4;1;-1)$.
Ⓑ $\vec{a}=(3;1;-4)$.
Ⓒ $\vec{a}=(0;1;-1)$.
Ⓓ $\vec{a}=(4;1;-5)$.

Câu 289. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

x	$-\infty$		-5		-1		3		4		5		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	

Ⓐ 3.
Ⓑ 4.
Ⓒ 5.
Ⓓ 2.

Câu 290. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên. Hỏi hàm số $y=f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?



Ⓐ 3.
Ⓑ 2.
Ⓒ 1.
Ⓓ 4.

Câu 291. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{3x^3-2x^2+5}{x}$ là

Ⓐ $x^3-x^2+5\ln x+C$.
Ⓑ $x^3-x^2+5\ln x+C$.
Ⓒ $x^3-x^2+5\ln|x|$.
Ⓓ $x^3-x^2+5\ln|x|+C$.

Câu 292. Có 8 học sinh và 3 thầy giáo A,B,C. Hỏi có bao nhiêu cách xếp chỗ 11 người đó ngồi trên một hàng ngang có 11 chỗ sao cho mỗi thầy giáo ngồi giữa hai học sinh?

Ⓐ 3 991 6800.
Ⓑ 241 920.
Ⓒ 3 386 880.
Ⓓ 8 467 200.

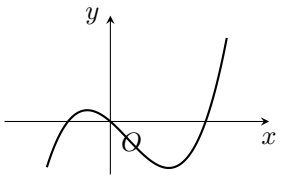
Câu 293. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a}=(2;3;1)$, $\vec{b}=(-1;5;2)$, $\vec{c}=(4;-1;3)$ và $\vec{x}=(-3;22;5)$. Đẳng thức nào đúng trong các đẳng thức sau?

Ⓐ $\vec{x}=2\vec{a}-3\vec{b}-\vec{c}$.
Ⓑ $\vec{x}=-2\vec{a}+3\vec{b}+\vec{c}$.
Ⓒ $\vec{x}=2\vec{a}+3\vec{b}-\vec{c}$.
Ⓓ $\vec{x}=2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}$.

Câu 294. Cho $\int_1^4 g(x)\mathrm{d}x = \int_1^0 g(x)\mathrm{d}x = 3$. Khi đó $\int_0^4 (g(x)+1)\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ 4. Ⓑ 9. Ⓒ 14. Ⓓ 6.

Câu 295. Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2$, $(a, b, c \in \mathbb{R})$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $4f(x) + 5 = 0$ là



Ⓐ 4. Ⓑ 2. Ⓒ 3. Ⓓ 1.

Câu 296. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-10; 10]$ để đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+4m}}$ có đúng 4 đường tiệm cận?

Ⓐ 11. Ⓑ 10. Ⓒ 8. Ⓓ 9.

Câu 297. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1;2;-1)$, $B(2;-1;3)$, $C(-4;7;5)$. Gọi $D(a;b;c)$ là chân đường phân giác trong góc B của tam giác ABC. Giá trị của $a+b+2c$ bằng

Ⓐ 5. Ⓑ 4. Ⓒ 14. Ⓓ 15.

Câu 298. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(3;-1;1)$, $B(0;-3;3)$, $C(1;7;1)$. Biết rằng tọa độ điểm M thỏa mãn $|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất có dạng $M(a;b;c)$. Giá trị $T = abc$ bằng

Ⓐ 10. Ⓑ 4. Ⓒ 0. Ⓓ 3.

Câu 299. Đầu mùa thu hoạch sầu riêng, ông A đã bán cho người thứ nhất nửa số sầu riêng thu hoạch được và tặng thêm 1 quả, bán cho người thứ hai nửa số sầu riêng còn lại và tặng thêm 1 quả. Ông cứ tiếp tục cách bán như trên thì đến người thứ bảy số sầu riêng của ông được bán hết. Số sầu riêng mà ông A thu hoạch được là

Ⓐ 216 quả. Ⓑ 128 quả. Ⓒ 256 quả. Ⓓ 254 quả.

Câu 300. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(2;1;1)$, $B(1;2;3)$, $C(-1;2;0)$. Điểm $M(x;y;z)$ thỏa mãn $\cos(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) + \cos(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MC}) = 0$ và tồn tại số thực k sao cho

$$\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB} + k(3k+1)\overrightarrow{AC}.$$

Tổng $x + 2y + 3z - k$ bằng

Ⓐ $\frac{19}{3}$. Ⓑ 5. Ⓒ 7. Ⓓ 6.

Chương II

PHẦN TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

Bài 1. Cho hàm số $f(x) = 2\cos x + x$.

a) $f(0) = 2; f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$.

b) Đạo hàm của hàm số đã cho là $f'(x) = 2\sin x + 1$.

c) Nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$ trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ là $\frac{\pi}{6}$.

d) Giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ là $\sqrt{3} + \frac{\pi}{6}$.

Bài 2. Một người điều khiển ô tô đang ở đường dẫn muốn nhập làn vào đường cao tốc. Khi ô tô cách điểm nhập làn 200 m, tốc độ của ô tô là 36 km/h. Hai giây sau đó, ô tô bắt đầu tăng tốc với tốc độ $v(t) = at + b$ $(a, b \in \mathbb{R}, a > 0)$, trong đó t là thời gian tính bằng giây kể từ khi bắt đầu tăng tốc. Biết rằng ô tô nhập làn cao tốc sau 12 giây và duy trì sự tăng tốc trong 24 giây kể từ khi bắt đầu tăng tốc.

a) Quãng đường ô tô đi được từ khi bắt đầu tăng tốc đến khi nhập làn là 180 m.

b) Giá trị của b là 10.

c) Quãng đường $S(t)$ (đơn vị: mét) mà ô tô đi được trong thời gian t giây $(0 \leq t \leq 24)$ kể từ khi tăng tốc được tính theo công thức $S(t) = \int_0^{24} v(t)\mathrm{d}t$.

d) Sau 24 giây kể từ khi tăng tốc, tốc độ của ô tô không vượt quá tốc độ tối đa cho phép là 100 km/h.

Bài 3. Trước khi đưa một loại sản phẩm ra thị trường, người ta đã phỏng vấn ngẫu nhiên 200 khách hàng về sản phẩm đó. Kết quả thống kê như sau: có 105 người trả lời "sẽ mua"; có 95 người trả lời "không mua". Kinh nghiệm cho thấy tỉ lệ khách hàng thực sự sẽ mua sản phẩm tương ứng với những cách trả lời "sẽ mua" và "không mua" lần lượt là 70% và 30%. Gọi A là biến cố "Người được phỏng vấn thực sự sẽ mua sản phẩm". Gọi B là biến cố "Người được phỏng vấn trả lời sẽ mua sản phẩm".

a) Xác suất $P(B) = \frac{21}{40}$ và $P(\overline{B}) = \frac{19}{40}$.

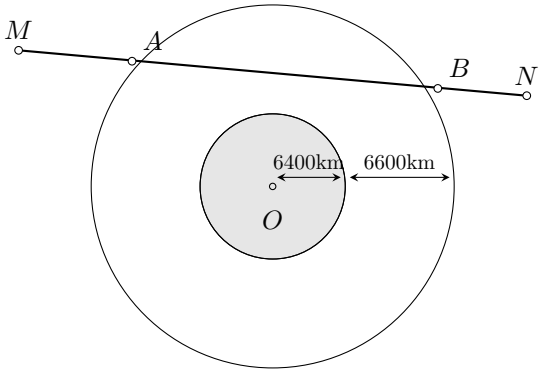
b) Xác suất có điều kiện $P(A \mid B) = 0,3$.

c) Xác suất $P(A) = 0,51$.

d) Trong số những người được phỏng vấn thực sự sẽ mua sản phẩm có 70% người đã trả lời "sẽ mua" khi được phỏng vấn (kết quả tính theo phần trăm được làm tròn đến hàng đơn vị).

Bài 4. Các thiên thạch có đường kính lớn hơn 140m và có thể lại gần Trái Đất ở khoảng cách nhỏ hơn 7 500 000 km được coi là những vật thể có khả năng va chạm gây nguy hiểm cho Trái Đất. Để theo dõi những thiên thạch này, người ta đã thiết lập các trạm quan sát các vật thể bay gần

Trái Đất. Giả sử có một hệ thống quan sát có khả năng theo dõi các vật thể ở độ cao không vượt quá 6 600 km so với mực nước biển. Coi Trái Đất là khối cầu có bán kính 6 400 km. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ trong không gian có gốc O tại tâm Trái Đất và đơn vị độ dài trên mỗi trục tọa độ là 1 000 km. Một thiên thạch (coi như một hạt) chuyển động với tốc độ không đổi theo một đường thẳng từ điểm $M(6;20;0)$ đến điểm $N(-6;-12;16)$.



a) Đường thẳng MN có phương trình tham số là $\begin{cases} x = 6 + 3t \\ y = 20 + 8t \\ z = -4t \end{cases}, (t \in \mathbb{R})$.

b) Vị trí đầu tiên thiên thạch di chuyển vào phạm vi theo dõi của hệ thống quan sát là điểm $A(-3;-4;12)$.

c) Khoảng cách giữa vị trí đầu tiên và vị trí cuối cùng mà thiên thạch di chuyển trong phạm vi theo dõi của hệ thống quan sát là 18 900 km (kết quả làm tròn đến hàng trăm theo đơn vị ki-lô-mét).

d) Nếu thời gian di chuyển của thiên thạch trong phạm vi theo dõi của hệ thống quan sát là 3 phút thì thời gian nó di chuyển từ M đến N là 6 phút.

Bài 5. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 91$.

a) Hàm số đã cho có đạo hàm là $f'(x) = 3x^2 - 3$.

b) Phương trình $f'(x) = 0$ có tập nghiệm là $S = \{1\}$.

c) $f(1) = 89$.

d) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-2;2]$ bằng 89.

Bài 6. Một phần mềm nhận dạng tin nhắn quảng cáo trên điện thoại bằng cách dựa theo từ khóa để đánh dấu một số tin nhắn được gửi đến. Qua một thời gian dài sử dụng, người ta thấy rằng trong số tất cả tin nhắn gửi đến, có 20% số tin nhắn bị đánh dấu. Trong số các tin nhắn bị đánh dấu, có 10% số tin nhắn không phải quảng cáo. Trong các tin nhắn không bị đánh dấu, có 10% số tin nhắn là quảng cáo. Chọn ngẫu nhiên một tin nhắn được gửi đến điện thoại.

a) Xác suất để tin nhắn đó không bị đánh dấu là $0,8$.

b) Xác suất để tin nhắn đó không phải là quảng cáo, biết rằng nó không bị đánh dấu, bằng $0,95$.

c) Xác suất để tin nhắn đó không phải là quảng cáo bằng $0,76$.

d) Xác suất để tin nhắn đó không bị đánh dấu, biết rằng nó không phải là quảng cáo, nhỏ hơn $0,95$.

Bài 7. Đối với ngành nuôi trồng thủy sản, việc kiểm soát lượng thuốc tồn dư trong nước là một nhiệm vụ quan trọng nhằm đáp ứng các tiêu chuẩn an toàn về môi trường. Khi nghiên cứu

một loại thuốc trị bệnh trong nuôi trồng thủy sản, người ta sử dụng thuốc đó một lần và theo dõi nồng độ thuốc tồn dư trong nước kể từ lúc sử dụng thuốc. Kết quả cho thấy nồng độ thuốc $y(t)$ (đơn vị: mg/lít) tồn dư trong nước tại thời điểm t ngày ($t \geq 0$) kể từ lúc sử dụng thuốc, thỏa mãn $y(t) > 0$ và $y'(t) = k \cdot y(t)$ $(t \geq 0)$, trong đó k là hằng số khác không. Đo nồng độ thuốc tồn dư trong nước tại các thời điểm $t = 6$ (ngày); $t = 12$ (ngày) nhận được kết quả lần lượt là 2 mg/lít; 1 mg/lít. Cho biết $y(t) = e^{g(t)}$ $(t \geq 0)$.

a) $g(t) = kt + C$ $(t \geq 0)$ với C là một hằng số xác định.

b) $k = -\dfrac{\ln 2}{6}$.

c) $C = 4 \ln 2$.

d) Nồng độ thuốc tồn dư trong nước tại thời điểm $t = 21$ (ngày) kể từ lúc sử dụng thuốc lớn hơn $0,4$ mg/lít.

Bài 8. Mô hình toán học sau đây được sử dụng trong quan sát chuyển động của một vật. Trong không gian cho hệ tọa độ $Oxyz$ có $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ lần lượt là các vectơ đơn vị trên các trục Ox, Oy, Oz và độ dài của mỗi vectơ đơn vị đó bằng 1 mét. Cho hai điểm A và B, trong đó điểm A có tọa độ là $(7; 7; 0)$. Một vật (coi như là một hạt) chuyển động thẳng với tốc độ phụ thuộc thời gian t (giây) theo công thức $v(t) = \beta t + 300$ (m/giây), trong đó β là hằng số dương và $0 \leq t \leq 6$. Ở thời điểm ban đầu ($t = 0$) vật đi qua điểm A với tốc độ 300 m/giây và hướng tới B. Sau 2 giây kể từ thời điểm ban đầu, vật đi được quãng đường 606 mét. Gọi $\vec{u} = (a; b; c)$ là vectơ cùng hướng với vectơ $\overrightarrow{AB}$. Biết rằng $|\vec{u}| = 1$ và góc giữa vectơ $\vec{u}$ lần lượt với các vectơ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ có số đo tương ứng bằng $60°, 60°, 45°$.

a) $a = \cos 60°$.

b) Phương trình đường thẳng AB là $\dfrac{x-7}{1} = \dfrac{y-7}{1} = \dfrac{z}{2}$.

c) $\beta = 3$.

d) Giả sử sau 5 giây kể từ thời điểm ban đầu, vật đến điểm $B(x_B; y_B; z_B)$. Khi đó $x_B > 776$.

Bài 9. Một miếng thịt sống được lấy ra khỏi ngăn đá của tủ lạnh và để trên bàn để rã đông. Nhiệt độ của miếng thịt khi nó được lấy ra khỏi ngăn đá là $-4°$C và sau t giờ thì nhiệt độ của miếng thịt tăng với tốc độ $T'(t) = 7e^{-0,35t}$ °C/giờ. Miếng thịt này được rã đông khi nhiệt độ của nó đạt đến 10°C. Khi đó:

a) Sau 2 giờ tốc độ thay đổi nhiệt độ của miếng thịt bằng $3,48°$C/giờ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

b) Nhiệt độ của miếng thịt bằng 0°C sau 43 phút (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của phút).

c) Cần mất $2,44$ giờ để miếng thịt được rã đông (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm của giờ).

d) Sau khi rã đông được 2 tiếng, miếng thịt được đem đi nướng trong lò nướng. Tốc độ thay đổi nhiệt độ của miếng thịt trong lò nướng sau t giờ được xác định bởi hàm số $L'(t) = 80e^{0,2t}$ °C/giờ. Miếng thịt được coi là chín đều nếu nhiệt độ của nó là 77°C. Thời gian để nướng chín đều miếng thịt là 48 phút (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của phút).

Bài 10. Cho hàm số $f(x) = x - 4 \ln x$.

a) Tập xác định của hàm số $f(x)$ là $D = (0; +\infty)$.

b) $f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$ $(\forall x > 0)$.

c) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1; 2)$.

d) Hàm số $f(x)$ có giá trị cực tiểu bằng $4 - 4\ln 4$.

Bài 11. Một công ty công nghệ thiết kế một hệ thống dự phòng cho máy chủ hoạt động. Hệ thống này bao gồm hai thành phần độc lập: Nguồn điện chính (A) và nguồn điện dự phòng (B). Xác suất nguồn điện chính (A) hoạt động ổn định là $P(A) = 0,95$, xác suất nguồn điện dự phòng (B) hoạt động ổn định là $P(B) = 0,8$. Biết việc hoạt động ổn định hay không ổn định của hai nguồn điện này là độc lập với nhau và hệ thống hoạt động ổn định khi ít nhất một nguồn hoạt động ổn định.

a) Xác suất nguồn điện chính gặp sự cố là $0,05$.

b) Xác suất chỉ có nguồn dự phòng hoạt động ổn định, còn nguồn chính gặp sự cố là $0,06$.

c) Xác suất cả hai nguồn đều không hoạt động ổn định là $0,24$.

d) Xác suất hệ thống hoạt động ổn định là $0,99$.

Bài 12. Sản lượng táo trên mỗi cây khi thu hoạch lệ thuộc vào mật độ cây được trồng. Với cùng một phương pháp chăm sóc như nhau, nếu trên mỗi sào đất được trồng n cây táo thì người ta ước tính trung bình sản lượng mỗi cây táo khi thu hoạch là $f(n) = -0,06n^2 - 0,4n + 320$ (kg/cây) (1 sào Trung bộ bằng 500m^2). Biết rằng bình quân chi phí giống và chăm sóc cho mỗi cây táo từ lúc trồng cho đến khi thu hoạch là 560 nghìn đồng mỗi cây. Giá bán ra mỗi kg táo là 50 nghìn đồng/kg, với giá bán này thì tất cả lượng táo thu hoạch đều được bán hết. Cần trồng trung bình bao nhiêu cây táo trên mỗi sào đất để mang về lợi nhuận cao nhất? (*Kết quả làm tròn đến hàng phần mười*)

a) Số lượng cây táo tối đa mà có thể trồng trên mỗi sào là 70 cây.

b) Tổng sản lượng táo trên mỗi sào đất được mô phỏng bởi hàm số $S(n) = nf(n)$ (kg).

c) Tổng doanh thu mà người này bán được trên mỗi sào là $D(n) = 50(320n - 0,4n^2 - 0,06n^3)$ nghìn đồng với $n \in \mathbb{N}$.

d) Nên trồng 40 cây táo trên mỗi sào để có lợi nhuận lớn nhất.

Bài 13. Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t) = \dfrac{1}{120}t^2 + \dfrac{58}{45}t$ (m/s), trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O, chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 3 giây so với A và có gia tốc bằng a (m/s^2) (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 15 giây thì đuổi kịp A.

a) Thời điểm chất điểm B đuổi kịp chất điểm A thì chất điểm B đi được 15 giây, chất điểm A đi được 18 giây.

b) Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng 30 (m/s).

c) $a = 2$.

d) Sau khi B xuất phát được 10 giây thì quãng đường A đi được không quá 100 (m).

Bài 14. Một cửa hàng điện thoại khảo sát thời gian sử dụng pin liên tục (đơn vị: giờ) của 40 điện thoại thuộc hai dòng: Dòng A và dòng B. Kết quả được thu thập và tổng hợp trong bảng tần số ghép nhóm sau:

Thời gian (Giờ)	$[8;10)$	$[10;12)$	$[12;14)$	$[14;16)$	$[16;18)$
Dòng A	2	4	8	4	2
Dòng B	5	3	4	3	5
Tổng số	7	7	12	7	7

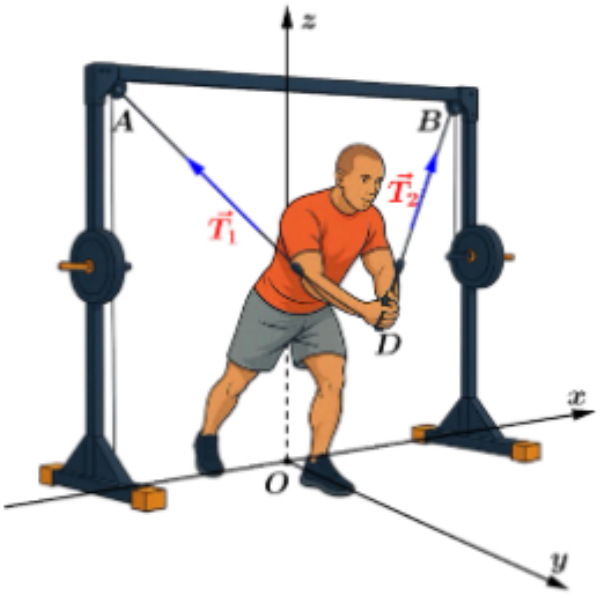
a) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm cho cả 40 điện thoại là $R = 10$ (giờ).

b) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm cho cả 40 điện thoại là $4,5$ giờ (làm tròn đến hàng phần chục).

c) Thời gian sử dụng pin của điện thoại dòng B đồng đều hơn điện thoại dòng A.

d) Chọn ngẫu nhiên 4 điện thoại từ 40 máy trên. Xác suất để trong 4 điện thoại được chọn có cả hai dòng A, B và có đúng 2 máy có thời gian sử dụng pin từ 16 giờ trở lên là $\dfrac{9885}{91390}$.

Bài 15. Bạn Mạnh rất yêu thích tập Gym và bạn thường thực hiện bài tập ép ngực với máy tập cáp chéo có tên Tiếng Anh là "Cable Crossover". Thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ với đơn vị trên mỗi trục là mét có gốc tọa độ $O(0;0;0)$ nằm trên sàn ngay chính giữa hai trụ của máy tập, các trục Ox, Oy, Oz được chọn như hình vẽ minh họa. Các ròng rọc của hai dây cáp được gắn tại các điểm $A(-1,4;0;1,9)$ và $B(1,4;0;1,9)$. Khi tập thì Mạnh kéo và giữ hai tay cầm tại điểm $D(0;0,8;1,2)$ và tại đó hai tay sẽ chịu tác dụng của hai lực căng $\vec{T}_1$ và $\vec{T}_2$. Biết rằng mức tạ được cài đặt sao cho độ lớn lực căng trên mỗi sợi dây cáp đều là 330 (N) (kết quả tính được ở các ý đều làm tròn đến hàng phần trăm).



a) Chiều dài đoạn dây cáp tính từ ròng rọc A đến tay cầm D bằng $1,76$ (m).

b) Vecto hợp lực tác dụng lên tay Mạnh có phương song song với trục Oz.

c) Để giữ yên hai tay tại vị trí D thì Mạnh phải tác dụng một lực giữ có độ lớn bằng $369,52$ N.

d) Để tối ưu hóa nhóm cơ ngực, huấn luyện viên yêu cầu Mạnh điều chỉnh vị trí giữ tay (thay đổi tung độ y của điểm D) sao cho góc tạo bởi hai dây cáp tại D đúng bằng $90°$. Biết cao độ của tay vẫn giữ nguyên ở $z_D = 1,2$ (m) thì khi đó Mạnh cần giữ tay cầm ở vị trí sao cho $y_D = 1,21$ (m).

Bài 16. Cho hàm số $y = \dfrac{-x^2 + 2x - 5}{x - 1}$, có đồ thị (C).

a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$.

b) Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị (C) bằng $2\sqrt{5}$.

c) Đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là đường thẳng $y = -x + 1$.

d) Giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[2;2026]$ bằng -4.

Bài 17. Một hãng công nghệ dự định tung ra thị trường một loại tai nghe không dây mới. Chi phí sản xuất mỗi chiếc tai nghe là 500 nghìn đồng với giá bán ra niêm yết là $1,2$ triệu đồng. Bộ phận bán hàng ước tính rằng, số lượng tai nghe bán được $n(x)$ phụ thuộc vào chi phí quảng cáo x (đơn vị: triệu đồng) theo công thức $n(x) = A + 40 \cdot \ln(1+x)$. Biết rằng nếu chi (e^2-1) triệu đồng cho quảng cáo thì bán được 190 sản phẩm.

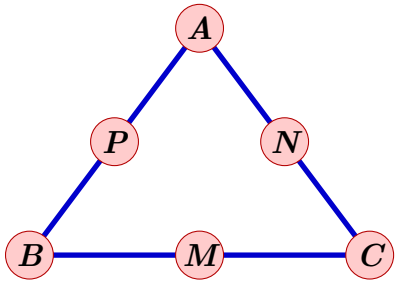
a) $A = 110$.

b) Hàm lợi nhuận của hãng (tính theo triệu đồng) là $L(x) = 77 + 28 \cdot \ln(1+x) - x$.

c) Khi chi phí quảng cáo đang ở mức 10 triệu đồng thì lợi nhuận đạt 150 triệu đồng (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

d) Để đạt lợi nhuận lớn nhất thì số tiền chi cho quảng cáo là $26,799$ triệu đồng (kết quả làm tròn đến hàng phần nghìn).

Bài 18. Chọn 6 số phân biệt từ tập hợp $X = \{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$ để xếp vào 6 ô hình tròn tại các đỉnh $(A;B;C)$ và các trung điểm $(M;N;P)$ của một tam giác như hình vẽ. Gọi Ω là tập hợp tất cả các cách xếp sao cho 3 số trên mỗi cạnh của tam giác luôn lập thành một cấp số cộng. Chọn ngẫu nhiên một cách sắp xếp từ tập Ω.



a) $n(\Omega) = 48$

b) Xác suất để ba số ở các đỉnh $(A;B;C)$ đều là số chẵn bằng $0,25$

c) Xác suất để chữ số 5 nằm ở vị trí trung điểm bằng $0,65$

d) Biết rằng ba số ở các đỉnh đều là số lẻ thì xác suất để chữ số 7 có mặt trong cách sắp xếp đó bằng $0,83$ (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

Bài 19. Cho hàm số $f(x) = x + \cos x - \sqrt{3}\sin x$.

a) Đạo hàm của hàm số là $f'(x) = 1 - \sin x + \sqrt{3}\cos x$.

b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

c) Trên khoảng $(0;2\pi)$ thì hàm số có đúng hai điểm cực trị.

d) Giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[0;\pi]$ bằng 1.

Bài 20. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ với đơn vị trên mỗi trục là dm, mặt ngoài của một quả bóng được mô hình hóa bởi phương trình mặt cầu $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 6$. Quả bóng nằm yên trên sàn nhà. Người ta nhìn thấy một tấm ván ngã xuống đè lên quả bóng, phần giao của tấm ván và sàn nhà là đường thẳng $d: \begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = -1 - 3t \\ z = t \end{cases}$. Gọi A, B lần lượt là hai tiếp điểm của tấm ván, sàn nhà với quả bóng và I là tâm quả bóng.

a) Quả bóng có tâm $I(2;-1;-1)$ và bán kính $R = \sqrt{6}$.

b) Khoảng cách từ tâm quả bóng đến đường thẳng d bằng $2\sqrt{6}$.

c) Nếu $\cos\angle AIB = \dfrac{a}{b}$ (với $\dfrac{a}{b}$ phân số tối giản và $a, b \in \mathbb{Z}$) thì giá trị biểu thức $a^2 + b^2 = 82$.

d) Một con kiến bò từ vị trí A đến vị trí B trên quả bóng với tốc độ 2 (cm/s) thì thời gian ngắn nhất cho chuyến đi này là 21 giây (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

Bài 21. Người ta nhận thấy rằng xác suất để kinh tế thế giới phát triển là 60%. Trong trường hợp này, xác suất sinh lời khi đầu tư vào bất động sản là 80% và đầu tư vào vàng là 30%. Xác suất để kinh tế thế giới suy thoái là 40%. Khi đó, xác suất sinh lời khi đầu tư vào bất động sản là 10% và đầu tư vào việc mua vàng là 70%.

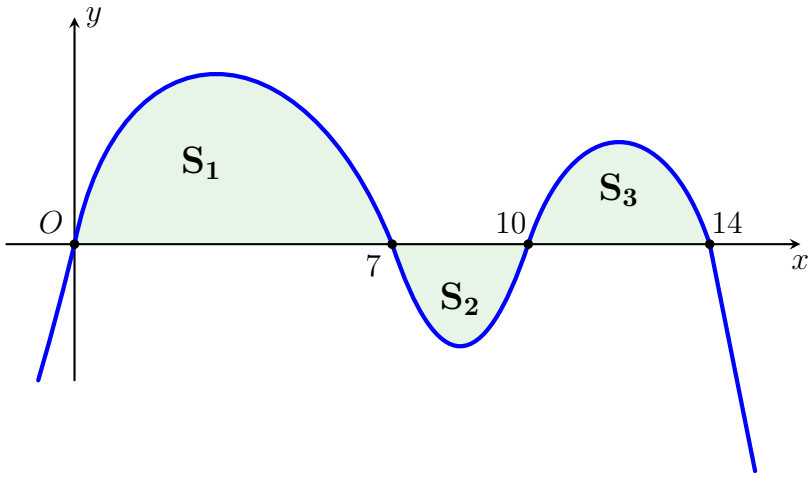
a) Nếu biết một người đầu tư bất động sản không sinh lời thì xác suất kinh tế suy thoái vượt quá $0,4$.

b) Một nhà đầu tư chọn ngẫu nhiên một trong hai hình thức là bất động sản hoặc vàng thì xác suất để sinh lời trong trường hợp này lớn hơn $0,5$.

c) Nếu biết nhà đầu tư sinh lời thì xác suất kinh tế đang phát triển là lớn hơn $0,5$.

d) Giả định độc lập trong cùng điều kiện kinh tế, một nhà đầu tư có lợi nhuận ở cả hai kênh bất động sản và vàng trong cùng một năm. Anh ta tin rằng điều này chắc chắn chứng tỏ kinh tế đang phát triển.

Bài 22. Cho hàm số $y = g(x)$ có đồ thị như hình vẽ và đặt $f(x) = \int\limits_0^x g(t)\mathrm{d}t$. Gọi S_1, S_2 và S_3 lần lượt là diện tích của các phần hình phẳng được tô màu.



a) Hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 7$

b) Giá trị của hàm số tại $x = 10$ là $f(10) = S_1 - S_2$

c) Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(7; 10)$

d) Phương trình $f(x) = 0$ có đúng hai nghiệm phân biệt trên $[0; 14]$

Bài 23. Một công ty dược phẩm đang thử nghiệm một loại thuốc mới. Nồng độ thuốc trong máu có thể được mô tả bằng hàm số $f(t) = A \cdot te^{kt}$ (mg/ml), trong đó t là thời gian tính bằng giờ kể từ khi tiêm và A, k là các hằng số thực. Biết rằng sau 1 giờ tiêm nồng độ thuốc trong máu là $0,3$ mg/ml và tại thời điểm ban đầu ($t = 0$), nồng độ thuốc tăng với tốc độ $0,5$ mg/ml mỗi giờ. Khi đó:

a) Đạo hàm của hàm số $f(t)$ là $f'(t) = Ae^{kt}(1 + kt)$.

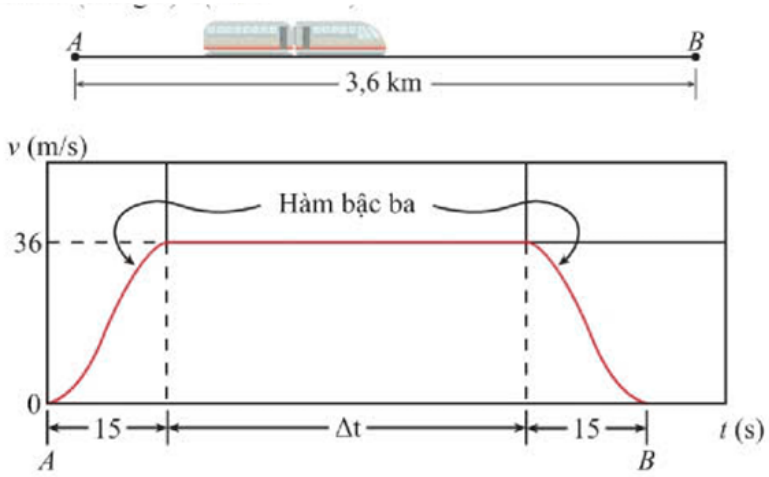
b) $A = 2$.

c) $k = \ln \dfrac{3}{5}$.

d) Nồng độ thuốc trong máu lớn nhất là $0,38$ mg/ml (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Bài 24. Trên một đường sắt, có hai nhà ga A và ga B cách nhau $3,6$ kilomet. Để đảm bảo an toàn thì các kĩ sư đường sắt thiết kế tốc độ của tàu như sau:

- Khi đi qua nhà ga A tàu phải tăng tốc trong 15 giây với phương trình tốc độ (m/s) là $v(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$ $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$ trong đó $M(15; 36)$ và $O(0; 0)$ là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = v(t)$.
- Khi đạt tốc độ lớn nhất thì tàu tiếp tục di chuyển với vận tốc đó trong Δt giây.
- Sau đó tàu giảm tốc trong 15 giây với tốc độ là một hàm bậc ba có đồ thị đối xứng với đồ thị hàm số $y = v(t)$ (như hình vẽ).



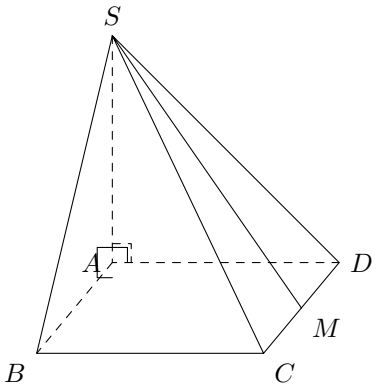
a) $v'(t) = 0$ có 2 nghiệm là $t = 0$ và $t = 15$.

b) $\dfrac{4b}{a} = 90$.

c) Tổng quãng đường tàu đi được trong 15 giây đầu và 15 giây cuối bằng 540 mét.

d) Tổng thời gian tàu di chuyển từ ga A đến ga B lớn hơn 120 giây.

Bài 25. Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với đáy, $SA = a$, $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = 2a$, $AD = 3a$ và M là trung điểm của CD (tham khảo hình vẽ).



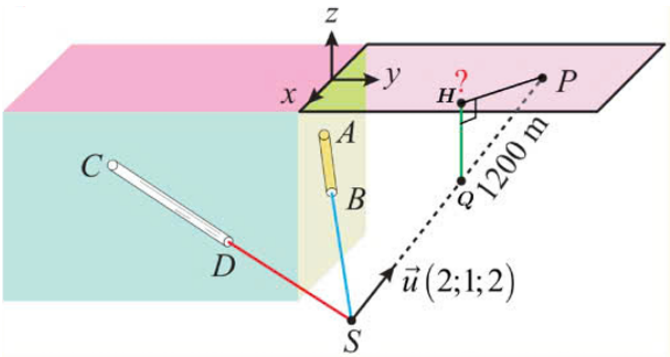
a) $\overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SM}$.

b) $|\overrightarrow{SM}| = a\sqrt{11}$.

c) $\overrightarrow{SM} \cdot \overrightarrow{AB} = 3a^2$.

d) Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{SM}$ và $\overrightarrow{AB}$ bằng $72,45^\circ$ (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm của độ).

Bài 26. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, đơn vị trên mỗi trục tính bằng 100 mét, mặt đất nằm trên mặt phẳng (Oxy), trục Oz hướng lên. Từ điểm $A(-7;-3;-8)$, một đường hầm X được dự kiến đào xuyên thẳng qua điểm $B(-2;0;-9)$ vào trong lòng núi. Cùng lúc đó, một đường hầm Y được xây thẳng từ điểm $C(4;-6;-6)$ xuyên qua điểm $D(7;-1;-8)$. Hai đường hầm cùng được đào đến S vào cùng một thời điểm. Sau đó từ điểm S này, các kỹ sư tiếp tục khoan một đường hầm khác theo hướng $\vec{u}(2;1;2)$ đâm ra mặt đất tại điểm P (tham khảo hình vẽ). Biết rằng việc khoan đường hầm X được tiến hành với tốc độ 5 mét mỗi ngày.



a) Phương trình đường thẳng AB là $\dfrac{x+2}{5}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z-9}{-1}$.

b) Hoành độ điểm S là 13.

c) Đường hầm Y được khoan với tốc độ lớn hơn 4 mét mỗi ngày.

d) Trên đường hầm SP, một lối thoát hiểm được khoan từ điểm Q cách P 1200 mét, khoan thẳng đứng lên trên mặt đất. Vậy chiều dài của lối thoát hiểm đó lớn hơn 2000 mét.

Bài 27. Một tấm thép được nung đến nhiệt độ 800 °C, ngay sau đó được chuyển sang buồng ủ có nhiệt độ 600 °C. Biết tốc độ giảm nhiệt của tấm thép được tính theo công thức $T'(t)=200\cdot k\cdot e^{kt}$ (°C/giờ) (trong đó k là hằng số thực). Biết rằng sau 1 giờ, nhiệt độ của tấm thép bằng 750 °C. Gọi $T(t)$ là nhiệt độ của tấm thép sau t (giờ) từ lúc bắt đầu đặt vào buồng ủ.

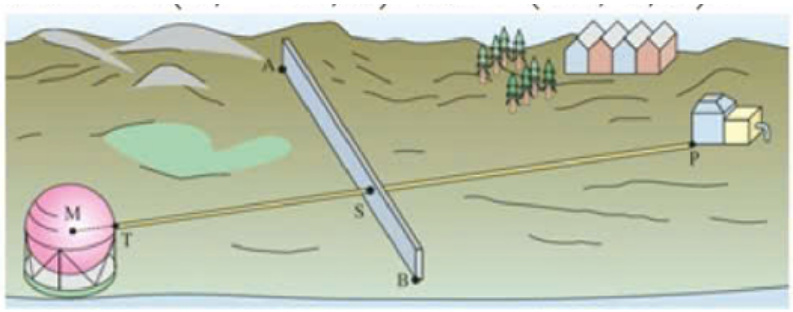
a) $T(0)=800\,(^\circ\text{C})$ và $T(1)=750\,(^\circ\text{C})$.

b) $T(t)=650+200e^{kt}$.

c) Giá trị của k là $k=0,286$ (kết quả làm tròn đến hàng phần nghìn).

d) Nhiệt độ của tấm thép còn 700 °C sau 2,4 giờ (làm tròn đến hàng phần chục của giờ).

Bài 28. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, đơn vị mỗi trục là mét, mặt đất là mặt phẳng (Oxy), trục Oz hướng lên, một bể chứa nước hình cầu có tâm đặt tại điểm M và bán kính $r=7$ (mét). Một đường ống từ trạm bơm từ điểm $P(-2;4;0)$ nối đến điểm $T(28;-11;10)$ nằm trên bể chứa nước sao cho P,T,M thẳng hàng (T nằm giữa P và M như hình vẽ). Một bức tường cao 6 mét vuông góc với mặt đất trên đoạn thẳng AB với các điểm $A(6;-10;0)$ và $B(14;6;0)$.



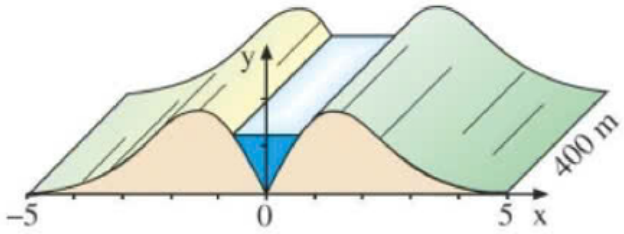
a) Phương trình mặt phẳng chứa bức tường là $2x - y - 22 = 0$.

b) Phương trình đường thẳng PT là $\dfrac{x-22}{-8} = \dfrac{y+8}{3} = \dfrac{z-8}{-2}$.

c) Đường ống đâm xuyên qua bức tường tại điểm $S(a;b;c)$ thì $a+b+c = 12$.

d) Điểm M có hoành độ lớn hơn 32.

Bài 29. Một kênh đào nằm giữa hai lớp đất, lớp đất này có độ rộng là 10 mét và chiều dài là 400 mét. Mặt cắt ngang của kênh đào được cho như hình vẽ. Trên hệ tọa độ Oxy, trục Ox là phương ngang, trục Oy hướng lên trời, lớp đất phía bên phải được mô hình hoá thông qua hàm số $f(x) = 2x.e^{-0,25x^2}$ (x và $f(x)$ được tính bằng mét), lớp đất phía bên trái đối xứng với lớp đất bên phải qua trục Oy. Cho biết độ dốc của một đồ thị được xác định dựa vào góc giữa tiếp tuyến của đồ thị đó với trục Ox.



a. Biết hàm số $F(x) = A.e^{-0,25x^2}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Vậy $A = -4$.

b. Độ cao lớn nhất của lớp đất nhỏ hơn $1,7$ mét.

c. Khi nước trong kênh đào đạt độ cao lớn nhất, thể tích nước lúc đó lớn hơn 340 mét khối.

d. Xe cắt cỏ nằm trên sườn dốc của lớp đất có khả năng leo dốc tối đa là $40°$, vậy xe cắt cỏ này có thể leo hết sườn dốc của lớp đất trên.

Bài 30. Một nhà máy sản xuất xe mô tô được bán với giá mỗi chiếc là 60 triệu đồng. Chi phí hàng ngày có thể được mô tả bằng hàm số $C(x) = 0,01x^3 - 1,5x^2 + 86x + 1200$ (triệu đồng), trong đó x ($x \in \mathbb{N}$) là số xe mô tô được sản xuất mỗi ngày. Biết rằng mỗi ngày nhà máy có thể sản xuất tối đa 150 chiếc xe mô tô. Hàm số $L(x)$ mô tả lợi nhuận hằng ngày. Giả định rằng các chiếc xe sản xuất ra đều bán hết. Khi đó

a) Lợi nhuận mỗi ngày của nhà máy là $L(x) = -0,01x^3 + 1,5x^2 + 26x - 1200$.

b) Lợi nhuận lớn nhất nhà máy thu được trong một ngày là 1320 triệu đồng.

c) Nhà máy cần sản xuất ít nhất 50 chiếc xe để không bị lỗ.

d) Nếu sản xuất hết công suất (tức là mỗi ngày nhà máy sản xuất và bán ra 150 chiếc xe mô tô). Để không bị lỗ thì giá của mỗi chiếc xe khi này tối thiểu là 94 triệu đồng.

Bài 31. Những ngày giáp Tết Nguyên Đán cũng là dịp bước vào vụ Đông Xuân, bà con nông dân tích cực xuống đồng cấy lúa. Cây lúa sau khi được cấy trải qua quá trình tăng trưởng đẻ nhánh và phát triển chiều cao trước khi làm đòng, trổ bông. Qua nghiên cứu một giống lúa mới, các nhà khoa học nhận thấy một cây lúa tính từ lúc được cấy bằng một cây mạ với chiều cao 20 cm có tốc độ tăng trưởng chiều cao cho bởi hàm số $v(t) = -0,1t^3 + 1,1t^2$, trong đó t tính theo tuần, $v(t)$ tính bằng cm/tuần. Gọi $h(t)$ là chiều cao của cây lúa ở tuần thứ t $(t \geq 0)$.

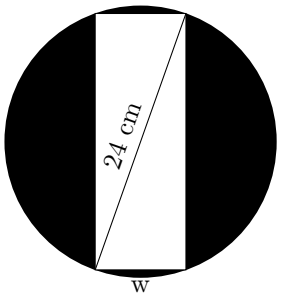
a) $h(t) = -\frac{1}{40}t^4 + \frac{11}{30}t^3 + 20$.

b) Giai đoạn tăng trưởng chiều cao của cây lúa kéo dài 12 tuần.

c) Chiều cao tối đa của cây lúa là 150 cm.

d) Vào thời điểm cây lúa phát triển nhanh nhất, chiều cao của cây đã lớn hơn 80 cm.

Bài 32. Độ cứng S của một thanh gỗ hình chữ nhật tỉ lệ thuận với tích của chiều rộng w và bình phương chiều dài d của nó (theo đơn vị mét). Biết rằng nếu thanh gỗ có chiều dài là 6 cm, chiều rộng là 3 cm thì độ cứng của nó bằng 108. Một khúc gỗ hình tròn có đường kính là 24 cm, người ta cắt thành một thanh gỗ hình chữ nhật như hình vẽ bên.



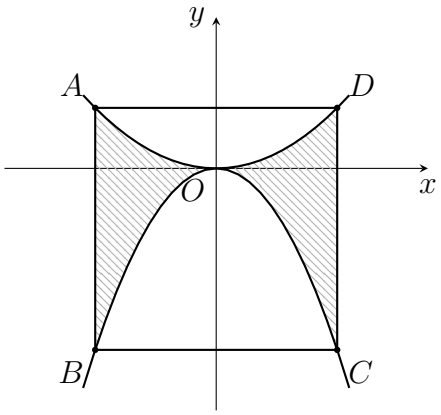
a) Chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật liên hệ bởi công thức $d^2 + w^2 = 576$.

b) Độ cứng của thanh gỗ là $S = 2dw^2$.

c) Độ cứng của thanh gỗ được mô phỏng bằng hàm số $S(w) = 576w - w^3, \forall w \in (0; 24)$.

d) Độ cứng lớn nhất của miếng gỗ cắt ra được là $S_{\max} = 5321$ (làm tròn đến hàng đơn vị).

Bài 33. Một công ty thiết kế mẫu huy hiệu như hình vẽ để tặng cho khách hàng thân thiết của mình. Trong đó $ABCD$ là hình vuông có cạnh bằng 4 cm, các đường cong AOD và BOC là một phần của các parabol đỉnh O. Với hệ trục tọa độ Oxy (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là centimet) thì điểm A có tung độ bằng 1. Biết phần tô đậm trong hình vẽ được phủ vàng với chi phí 1 triệu đồng/cm^2, phần còn lại được phủ bạc với chi phí 300 nghìn đồng/cm^2, các chi phí còn lại là 500 nghìn đồng.



a) Parabol chứa đường cong AOD có phương trình là $y = \frac{1}{16}x^2$.

b) Parabol chứa đường cong BOC có phương trình là $y = -\frac{3}{4}x^2$.

c) Diện tích phần tô đậm trong hình vẽ lớn hơn $5,5$ cm^2.

d) Chi phí sản xuất một chiếc huy hiệu như trên nhỏ hơn 9 triệu đồng.

Bài 34. Quan sát quá trình sinh trưởng và phát triển của một giống cà chua mới trong 18 tuần kể từ khi trồng, các kĩ sư thuộc một trung tâm giống cây trồng nhận thấy: Chiều cao thân cây sau t tuần kể từ khi trồng được tính xấp xỉ bởi hàm số $h(t) = 50\log_3(2t+1) + 10$ (đơn vị: centimet, $0 \le t \le 18$). Sau 8 tuần kể từ khi trồng, hoa bắt đầu kết trái. Kể từ đó, đường kính trái cà chua ở tuần thứ t xấp xỉ bởi hàm số $d(t) = 3^{\frac{2t-15}{t-7}} - 3$ (đơn vị: centimet, $8 \le t \le 18$).

a) Tốc độ tăng trưởng chiều cao của thân cây cà chua ở tuần thứ 7 (làm tròn đến hàng phần trăm) là $6,07$ (cm/tuần).

b) Khi được 4 tuần tuổi, chiều cao của thân cây cà chua là 110 cm.

c) Sau 4 tuần kể từ khi kết trái, đường kính trái cà chua lớn hơn $9,98$ cm.

d) Chiều cao của thân cây cà chua liên tục tăng trong suốt 18 tuần.

Bài 35. Cho hàm số $y = \frac{x^2+3x+6}{x+1}$.

a) Đạo hàm của hàm số là $y' = \frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}, \forall x \ne -1$.

b) Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là $(1;5)$.

c) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3;1)$.

d) Tổng khoảng cách từ các điểm cực trị của đồ thị hàm số đến trục hoành bằng 2.

Bài 36. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ với a, b, c đều dương.

a) Mặt phẳng (ABC) đi qua điểm $M(2;-2;3)$ sao cho độ dài OA, OB, OC theo thứ tự lập thành cấp số cộng có công sai bằng 2. Khoảng cách từ điểm $D(1;1;1)$ tới mặt phẳng (ABC) bằng $\frac{m}{n}$ với $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Khi đó $T = m + n = 8$.

b) Mặt phẳng (ABC) có phương trình $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

c) Mặt phẳng (ABC) đi qua điểm $H(1;1;1)$ sao cho H là trực tâm tam giác ABC là $x+y+z-3 = 0$.

d) Mặt phẳng (ABC) đi qua điểm $G(1;2;3)$ sao cho G là trọng tâm tam giác ABC là $6x+3y+2z+18 = 0$.

Bài 37. Một công ty bất động sản thực hiện cuộc khảo sát khách hàng xem họ có nhu cầu mua ở mức giá nào cho một căn nhà, để tiến hành dự án xây dựng khu đô thị mới sắp tới. Kết quả khảo sát 500 khách hàng được ghi lại ở bảng sau:

Mức giá (triệu đồng) $/m^2$	$[10;14)$	$[14;18)$	$[18;22)$	$[22;26)$	$[26;30)$
Số khách hàng	75	105	197	80	43

a) Phương sai xấp xỉ $20,52$.

b) Biết rằng công ty sẽ xây dựng phân khúc nhà giá rẻ cho 25% số khách hàng có nhu cầu mua ở mức giá thấp nhất theo khảo sát, xây dựng phân khúc nhà giá cao cấp cho 25% số khách hàng có nhu cầu mua ở mức giá cao nhất theo khảo sát. Tuy nhiên trước hết sẽ ưu tiên xây dựng phân khúc nhà tầm trung hướng tới 50% số khách hàng còn lại. Khi đó theo khảo sát, độ chênh lệch giá cao nhất và giá thấp nhất (đúng đến hàng phần mười, đơn vị triệu đồng) dành cho phân khúc nhà tầm trung là $6,1$ triệu.

c) Tứ phân vị thứ ba là 25.

d) Độ dài mỗi nhóm là 4.

Bài 38. Một quần thể vi khuẩn (A) có số lượng cá thể là $P(t)$ sau t phút quan sát được phát hiện thay đổi với tốc độ là $P'(t) = ae^{0,1t} + 150e^{-0,03t}$ (vi khuẩn/phút) $(a \in \mathbb{R})$. Biết rằng lúc bắt đầu quan sát, quần thể có 200 000 vi khuẩn và đạt tốc độ tăng trưởng là 350 vi khuẩn/phút. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

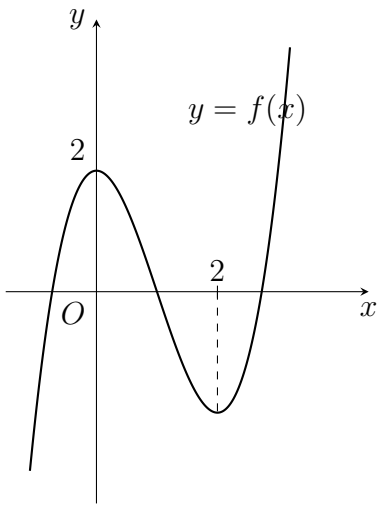
a) Giá trị của $a = 200$.

b) $P(t) = 2000e^{0,1t} - 5000e^{-0,03t} + 200\,000$.

c) Sau 12 phút số lượng vi khuẩn trong quần thể là 206 152 con (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

d) Sau 12 phút, một quần thể vi khuẩn (B) có tốc độ tăng trưởng là $G'(t) = 500e^{0,2t}$ (vi khuẩn/phút) bắt đầu cạnh tranh nguồn thức ăn trực tiếp với quần thể (A), một cá thể tại quần thể (B) triệt tiêu một cá thể tại quần thể (A). Sau 5 phút cạnh tranh quần thể (A) bị triệt tiêu hoàn toàn. Số lượng vi khuẩn của quần thể (B) ở thời điểm bắt đầu cạnh tranh là 191 967 con (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Bài 39. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình vẽ.



a) Hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị là 0 và 2.

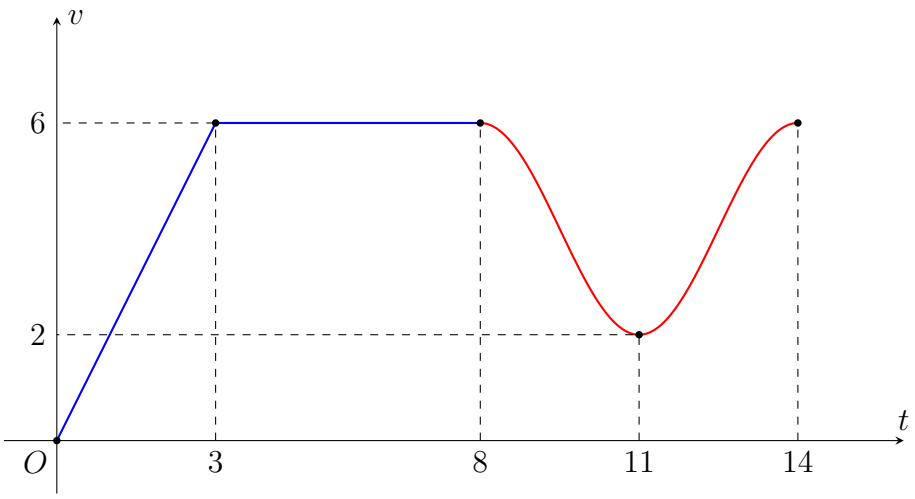
b) Giá trị b bằng 0.

c) Giá trị $c = -2$.

d) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 2$.

Bài 40. Một vật bắt đầu chuyển động trên trục Ox với đồ thị vận tốc theo thời gian $v(t)$ được mô tả như hình vẽ. Biết rằng từ giây thứ 11 đến giây thứ 14 thì đồ thị có dạng hình sin và vận tốc

của vật được biểu diễn bởi phương trình $v(t) = a + b\cos\left[\frac{\pi}{3}(t-8)\right]$.



Các khẳng định sau đây Đúng hay Sai?

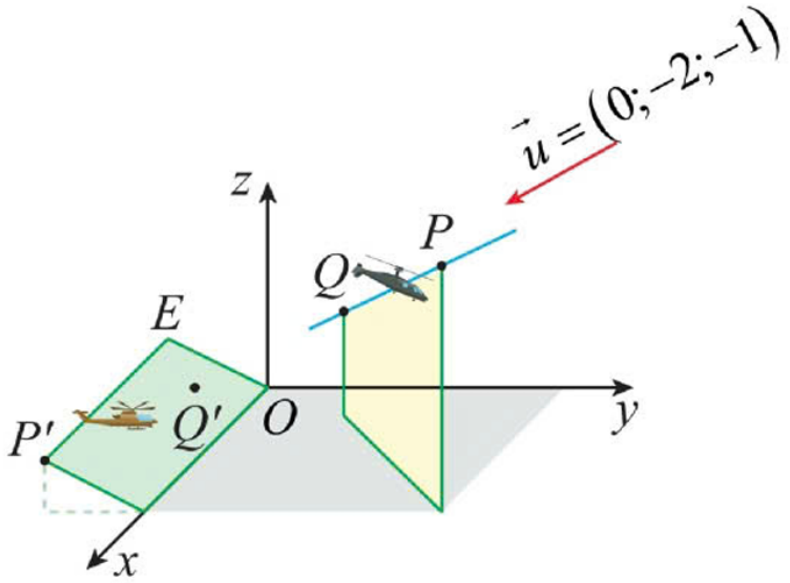
a) Quãng đường vật đi được trong 3 giây đầu tiên là 9 m.

b) Biểu thức vận tốc của vật trong khoảng thời gian $t \in [8;14]$ là $v(t) = 4 + 2\cos\left[\frac{\pi}{3}(t-8)\right]$.

c) Tổng quãng đường vật đi được trong 14 giây là 63 m.

d) Quãng đường vật đi được trong 10 giây đầu tiên là $48,7$ m (Kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

Bài 41. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, mặt đất trùng với mặt phẳng (Oxy), trục Oz hướng lên. Một máy bay trực thăng đang tiếp cận và hạ cánh trên một sườn đồi, sườn đồi được coi là một mặt phẳng nghiêng có phương trình $(E): y + 2z = 0$. Máy bay đi thẳng đều từ vị trí $P(16;16;16)$ và hạ cánh trên sườn đồi tại điểm $H(4;-2;1)$ (đơn vị mỗi trục là 100m). Ánh sáng mặt trời song song theo hướng vectơ $\vec{u} = (0;-2;-1)$ tạo ra bóng của máy bay trên sườn đồi. Biết bóng của máy bay này di động với tốc độ 30 m/s.



a) Phương trình đường thẳng PH là

$$\frac{x+16}{4} = \frac{y+16}{6} = \frac{z+16}{5}.$$

b) Khi máy bay ở điểm P bóng của nó trên sườn đồi là $P'(16;-8;4)$.

c) Khi bóng của máy bay trên sườn đồi có tọa độ $(12;-6;3)$ thì máy bay cách mặt đất 1100 mét.

d) Tốc độ di chuyển của máy bay lớn hơn 50 m/s.

Bài 42. Hưng có một đồng xu không cân đối, mà khả năng xuất hiện mặt sấp là 60% và một con xúc xắc không cân đối, mà khả năng xuất hiện mặt 1 chấm nhiều gấp đôi so với các mặt còn lại. An gieo đồng xu và quan sát mặt xuất hiện. Nếu mặt xuất hiện là mặt sấp thì An gieo con xúc xắc 2 lần liên tiếp. Nếu mặt xuất hiện là mặt ngửa thì An gieo con xúc xắc 1 lần.

Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

a) Xác suất của biến cố: "Con xúc xắc xuất hiện mặt 1 chấm" là $\dfrac{2}{7}$.

b) Biết rằng Hưng gieo đồng xu ra mặt sấp, xác suất để Hưng gieo con xúc xắc xuất hiện mặt 1 chấm bằng $\dfrac{24}{49}$.

c) Xác suất để Hưng tung con xúc xắc có mặt 1 chấm bằng 42% (*làm tròn đến hàng đơn vị*).

d) Biết rằng Hưng gieo xúc xắc xuất hiện mặt 1 chấm. Khi đó, xác suất của biến cố: "Đồng xu xuất hiện mặt sấp" là 28%.

Bài 43. Sau khi bệnh nhân uống một liều thuốc, lượng thuốc còn lại trong cơ thể giảm dần theo công thức $D(t) = D_0 \cdot a^t$ (mg), trong đó D_0 là lượng thuốc ban đầu bệnh nhân uống và a là hằng số dương, t là thời gian tính bằng giờ kể từ thời điểm uống thuốc. Biết ban đầu, bệnh nhân đã uống 100 mg thuốc và sau 1 giờ thì lượng thuốc trong cơ thể còn 80 mg.

Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

a) $D_0 = 80$.

b) $a = 0,8$.

c) Sau 5 giờ, lượng thuốc còn lại trong cơ thể là $40,96$ (mg).

d) Nếu sau 5 giờ, lượng thuốc giảm đi $m\%$ so với lượng thuốc ban đầu thì giá trị của m là $76,2\%$ (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

Bài 44. Một người có 5 con gà mái, 2 con gà trống nhốt chung trong một cái lồng. Một người đến mua, người bán gà bắt ngẫu nhiên 1 con. Người mua chấp nhận mua con gà đó, người bán gà quên mất rằng con gà bán cho người thứ nhất là gà trống hay gà mái.

Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

a) Xác suất để người thứ nhất mua được con gà mái là $\dfrac{5}{7}$.

b) Người thứ hai lại đến mua gà, người bán gà lại bắt ngẫu nhiên ra 1 con, xác suất để người thứ hai mua được con gà trống khi người thứ nhất mua được một con gà mái là $\dfrac{1}{3}$.

c) Xác suất để người thứ hai mua được gà trống bằng $\dfrac{3}{7}$.

d) Biết người thứ hai mua được gà trống, xác suất con gà mà người thứ nhất mua cũng là gà trống là $\dfrac{1}{6}$.

Bài 45. Lưu lượng nước chảy của một con sông trong 15 phút đầu tiên sau khi bắt đầu một cơn mưa lớn được mô hình hóa bằng hàm đa thức bậc ba $L(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$ (đơn vị m^3/phút,

t tính bằng phút và $0 \le t \le 15$, a, b, c, d là các hằng số thực). Tại thời điểm bắt đầu mưa ($t = 0$), lưu lượng nước chảy là 200 m^3/phút và sau 10 phút thì đạt mức lớn nhất bằng 400 m^3/phút. Cảnh báo sẽ phát ra nếu lưu lượng nước chảy đạt từ 300 m^3/phút trở lên. Biết rằng thời điểm bắt đầu phát ra cảnh báo là sau 4 phút tính từ lúc bắt đầu mưa.

Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

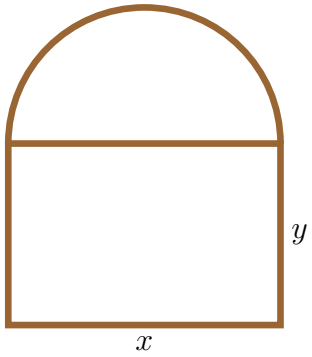
a) $d = 200$.

b) $L'(10) = 300a + 20b + c = 0$.

c) Giá trị của b lớn hơn 2.

d) Khoảng thời gian phát ra cảnh báo là 10,8 phút (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

Bài 46. Để làm một cửa sổ có dạng một hình bán nguyệt và một hình chữ nhật ghép lại như hình vẽ bên dưới, người ta dùng 8 m dây thép để làm các đường viền. Gọi x, y là độ dài cạnh của khung hình chữ nhật.



a) Chiều dài dây để uốn ra bán nguyệt là $\dfrac{\pi x}{2}$.

b) Giá trị của y tính theo x là $4 - \dfrac{x(4+\pi)}{4}$.

c) Diện tích của cửa sổ là $S = 4x - x^2$.

d) Khi diện tích của cửa sổ lớn nhất thì $y = \dfrac{16}{8+\pi}$.

Bài 47. Một viên muối hình cầu có đường kính 8 cm đang tan trong nước với tốc độ giảm thể tích tại bất kỳ thời điểm nào tỷ lệ thuận với diện tích bề mặt quả cầu tại thời điểm đó. Sau 30 giây thì viên muối tan được một nửa. Gọi $V(t)$ và $r(t)$ lần lượt là thể tích và bán kính của viên muối sau t phút.

a) Thể tích của viên muối sau t phút là $V(t) = \dfrac{4}{3}\pi r^3(t)$.

b) Tốc độ giảm thể tích của viên muối là $V'(t) = k\pi r^2(t)$ với k là hằng số.

c) Giá trị của $k = -4$.

d) Sau 45 giây thì thể tích của viên muối còn lại là 4,2 cm^3 (làm tròn đến hàng phần mười).

Bài 48. Trong lễ hội thường niên của một địa phương, tốc độ khách vào và tốc độ khách ra lễ hội tại thời điểm t lần lượt được xác định bằng hàm số $a(t) = -24t^2 + 190t + 500$ và $b(t) = -7,8t^3 + kt^2$ (k là số thực). Trong đó $a(t)$ và $b(t)$ được tính bằng người/giờ, t tính bằng giờ kể từ lúc 12 giờ trưa, giờ đóng cửa lễ hội là 22 giờ đêm và khi đóng cửa thì không còn ai có mặt trong lễ hội. Biết tại mọi thời điểm, người đã ra sẽ không vào lại.

Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

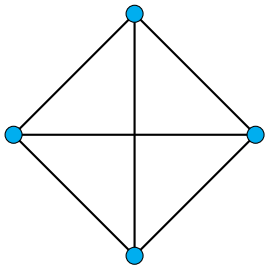
a) Tổng lượng khách tham dự lễ hội là 6000 người.

b) $k = 78$.

c) Số lượng khách có mặt trong lễ hội tại thời điểm t được ước lượng theo công thức $N(t) = \int_0^t (7,8x^3 - 102x^2 + 190x + 500)dx$.

d) Số lượng khách có mặt trong lễ hội khi lớn nhất không vượt quá 1970 người.

Bài 49. Xét một đồ thị đầy đủ K_4 có 4 đỉnh, các đỉnh đó được kết nối với nhau thông qua các cạnh và 2 đường chéo (tham khảo hình vẽ). Với 6 cạnh của đồ thị, tung một đồng xu cân đối ngẫu nhiên: nếu mặt ngửa xuất hiện, ta giữ nguyên cạnh đó; nếu mặt sấp xuất hiện, ta loại bỏ cạnh đó. Gọi P là biến cố "sau khi tung đồng xu 6 lần, đồ thị vẫn được kết nối" (tức là tồn tại tối thiểu một con đường nối 4 đỉnh với nhau).



Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

a) Số phần tử của không gian mẫu là 16.

b) Sau 6 lần tung đồng xu, nếu chỉ còn 1 hoặc 2 cạnh thì đồ thị chắc chắn không kết nối.

c) Sau 6 lần tung đồng xu đồ thị còn 3 cạnh, có 4 trường hợp đồ thị không được kết nối.

d) Xác suất xảy ra biến cố P lớn hơn $0,6$.

Bài 50. Cho hàm số $f(x) = \sin 2x$

Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

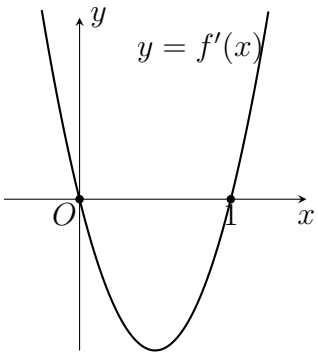
a) Tập giá trị của hàm số $f(x)$ là $[-1;1]$.

b) $f'(x) = \cos 2x$.

c) Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x)$ tại điểm có hoành độ $x_0 = \pi$ là $k = 1$.

d) Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x)$ tại điểm có hoành độ $x_0 = \pi$ có phương trình là $y = 2x - 2\pi$.

Bài 51. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của đạo hàm $y = f'(x)$ là một parabol đi qua gốc tọa độ O và cắt trục hoành tại điểm $A(1;0)$ như hình vẽ.



Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

a) $f'(x) = 0$ khi $x = 0$ hoặc $x = 1$.

b) Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$.

c) Hàm số $y = f(x)$ có 2 điểm cực trị.

d) $f\left(\frac{1}{2}\right) > f(1)$.

Bài 52. Một sự kiện diễn ra trong một rạp hát có n hàng ghế xếp theo hình quạt. Hàng thứ nhất có 15 ghế, hàng thứ 2 có 18 ghế, hàng thứ ba có 21 ghế,... cứ tiếp tục theo quy luật như vậy thì hàng cuối cùng có 72 ghế. Trong một buổi biểu diễn ca nhạc của ca sĩ Sơn Tùng MTP, rạp hát đó đã bán được vừa hết số vé tương ứng với số ghế trong rạp. Biết rằng giá bán vé mỗi ghế ở ba hàng đầu là 800 nghìn đồng, giá vé mỗi ghế ở các hàng còn lại là 500 nghìn đồng và mỗi ghế chỉ một người ngồi. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?



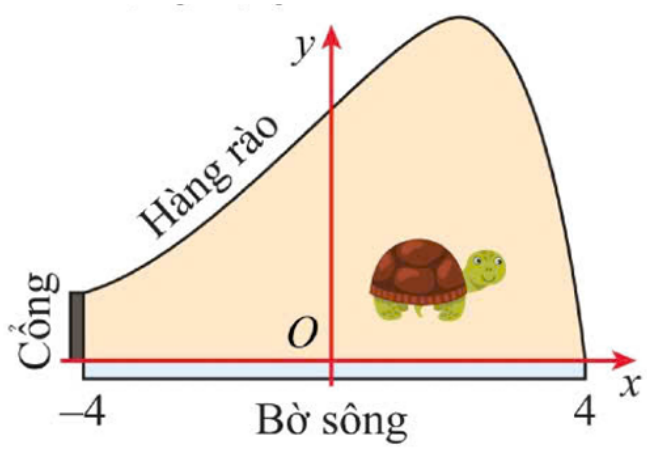
a) Số ghế ở hàng thứ n $(n \in \mathbb{N}^*)$ được xác định bởi công thức $u_n = 3n + 12$.

b) Có tổng cộng 18 hàng ghế trong rạp hát trên.

c) Tổng số ghế trong rạp hát trên là 870 ghế.

d) Số tiền thu được từ việc bán vé của sự kiện trên nhỏ hơn 500 triệu đồng.

Bài 53. Trong mặt phẳng tọa độ, trục Ox được coi là bờ sông, đơn vị trên mỗi trục được tính bằng 10 mét. Một khu chuồng thú cạnh bờ hồ được giới hạn bởi hàng rào có phương trình $f(x) = (4 - x)e^{\frac{x}{2}}$, cánh cổng vào chuồng thú tại $x = -4$ và bờ sông. Biết rằng $F(x) = (b - ax)e^{\frac{x}{2}}$ $(a, b \in \mathbb{R})$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-4; 4]$.



Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

a) Diện tích (m^2) của khu chuồng đã rào được tính bởi công thức $100[F(4) - F(-4)]$.

b) $b = 12$.

c) Khoảng cách lớn nhất từ một điểm thuộc hàng rào đến bờ sông lớn hơn 50 mét.

d) Diện tích khu chuồng được rào là 2685 m^2 (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

Bài 54. Một hồ nước có diện tích 245 m^2. Thí nghiệm cho thấy bèo phủ mặt hồ trên theo quy luật: diện tích bèo tăng thêm tỉ lệ thuận với diện tích đã có, tức là nếu $S(t)$ là diện tích bèo đã phủ sau t ngày thì $S'(t) = k \cdot S(t) \quad (k \in \mathbb{R})$. Biết rằng vào thời điểm ban đầu, diện tích bèo phủ 10 m^2 và sau 5 ngày thì bèo đã phủ được 50 m^2.

Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

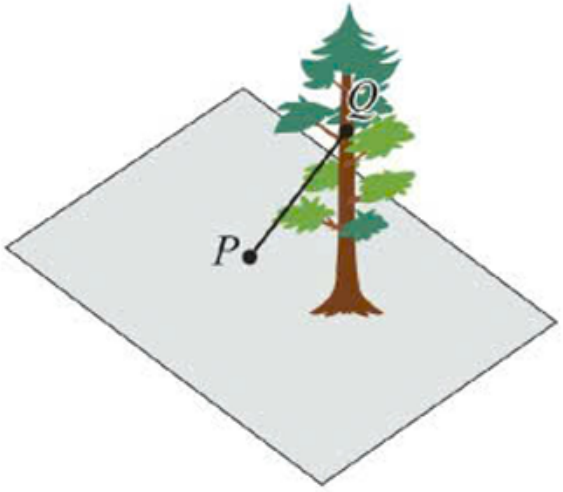
a) Hàm số $\ln[S(t)]$ là một nguyên hàm của hàm số $\dfrac{S'(t)}{S(t)}$.

b) Hàm số $S(t)$ biểu diễn diện tích bèo phủ sau t ngày là $S(t) = 10 \cdot e^{kt}$.

c) Giá trị $k = 0,31$ (làm tròn đến hàng phần trăm).

d) Sau 9 ngày (làm tròn đến hàng đơn vị), bèo đã phủ kín mặt hồ.

Bài 55. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, đơn vị trên mỗi trục tọa độ tính bằng mét, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất, một sườn dốc được mô hình hoá bởi mặt phẳng (α) : $2x + 3y + 6z - 35 = 0$. Tại chân sườn dốc có một cây thông mọc thẳng đứng (vuông góc với mặt đất) với đỉnh của cây là điểm S có tọa độ là $S(5; 7; 26)$. Để cố định cây thông, một sợi dây bảo vệ được buộc tại điểm Q trên cây thông ở độ cao 17 mét so với mặt đất và được kéo vuông góc với mặt sườn tại điểm P.



Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

a) Chiều cao của cây thông là 26 mét.

b) Điểm P có tọa độ là $P(1; 1; 5)$.

c) Một tia sét đánh trúng cây thông, làm cây bị gãy (phần bị gãy không rời khỏi cây). Đỉnh cây rơi xuống và chạm sườn dốc tại điểm $A(1; -1; 6)$. Cây thông đã bị gãy ở độ cao 14 mét.

d) Sau khi gãy, vị trí buộc dây trên cây có tọa độ là $Q'(a; b; c)$, khi đó $2a + b + c = 25$.

Bài 56. Một đoàn tàu đang di chuyển trên đường ray phụ để nhập vào đường ray chính. Khi đoàn tàu cách điểm nhập 300 mét, vận tốc của đoàn tàu là 54 km/h. Bốn giây sau đó, đoàn tàu bắt đầu tăng tốc với vận tốc $v(t) = pt + q$ $(p, q \in \mathbb{R}, p > 0)$, trong đó t là thời gian tính bằng giây

kể từ khi bắt đầu tăng tốc. Biết rằng đoàn tàu nhập vào đường ray chính sau 15 giây và duy trì sự tăng tốc trong 20 giây kể từ khi bắt đầu tăng tốc.

a) Quãng đường đoàn tàu đi được từ khi bắt đầu tăng tốc đến khi nhập vào đường ray chính là 250 mét.

b) Giá trị của q là 15.

c) Quãng đường $S(t)$ (đơn vị: mét) mà đoàn tàu đi được trong thời gian t giây $(0 \leq t \leq 30)$ kể từ khi tăng tốc được tính theo công thức: $S(t) = \frac{1}{2}pt^2 + 15t$.

d) Sau 20 giây kể từ khi tăng tốc, vận tốc của đoàn tàu vượt quá vận tốc tối đa cho phép là 150 km/h.

Bài 57. Cho hàm số $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 5x + 4)$. Khi đó

a) Hàm số $y = f(x)$ có tập xác định $\mathscr{D} = (-\infty; 1] \cup [4; +\infty)$.

b) Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = \frac{5-2x}{(x^2-5x+4)\ln 2}$.

c) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $\left(-\infty; \frac{5}{2}\right)$.

d) Bất phương trình $f(x) > 0$ có đúng 4 nghiệm nguyên.

Bài 58. Bạn Trang thống kê chiều cao (đơn vị: cm) của các bạn học sinh nữ lớp $12C$ và lớp $12D$ ở bảng sau:

Chiều cao (cm)	$[155; 160)$	$[160; 165)$	$[165; 170)$	$[170; 175)$	$[175; 180)$
Số học sinh nữ lớp $12C$	2	7	12	4	1
Số học sinh nữ lớp $12D$	5	9	8	2	2

a) Giá trị đại diện của nhóm $[165; 170)$ là $167,5$.

b) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm của lớp $12D$ là 20.

c) Nếu so sánh theo khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm thì học sinh nữ lớp $12C$ có chiều cao đồng đều hơn.

d) Nếu so sánh theo độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm thì học sinh nữ lớp $12D$ có chiều cao trung bình đồng đều hơn.

Bài 59. Cho hàm số $f(x) = \sin x - \sqrt{3}\cos x - 2$. Khi đó

a) $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$.

b) Đạo hàm của hàm số đã cho là $f'(x) = \cos x - \sqrt{3}\sin x$.

c) Nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$ trên đoạn $[0; \pi]$ là $\frac{5\pi}{6}$.

d) Giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên đoạn $[0; \pi]$ là $\sqrt{3} - 2$.

Bài 60. Kết quả khảo sát những bệnh nhân bị tai nạn xe máy về mối liên hệ giữa việc đội mũ bảo hiểm và khả năng bị chấn thương vùng đầu cho thấy:

- Tỉ lệ bệnh nhân bị chấn thương vùng đầu khi gặp tai nạn là 80%;
- Tỉ lệ bệnh nhân đội mũ bảo hiểm đúng cách khi gặp tai nạn là 90%;
- Tỉ lệ bệnh nhân đội mũ bảo hiểm đúng cách bị chấn thương vùng đầu là 18%.

Gọi A là biến cố: "Bệnh nhân bị chấn thương vùng đầu khi gặp tai nạn" và B là biến cố: "Bệnh nhân đội mũ bảo hiểm đúng cách khi gặp tai nạn".

a) Xác suất để khi gặp tai nạn, bệnh nhân đội mũ bảo hiểm đúng cách và bị chấn thương vùng đầu là $0,144$.

b) Xác suất để khi gặp tai nạn, bệnh nhân không đội mũ bảo hiểm đúng cách và bị chấn thương vùng đầu khi gặp tai nạn là $0,65$.

c) Xác suất để khi gặp tai nạn, bệnh nhân không đội mũ bảo hiểm đúng cách biết bệnh nhân bị chấn thương vùng đầu là $0,82$.

d) Việc đội mũ bảo hiểm đúng cách sẽ làm giảm khả năng chấn thương vùng đầu xuống khoảng $4,6$ lần (kết quả làm tròn ở hàng phần mười).

Bài 61. Cho hàm số $F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)=-3x^2+3$ trên $\mathbb{R}$ thoả mãn $F(2)=4$ và $G(1)=-2$.

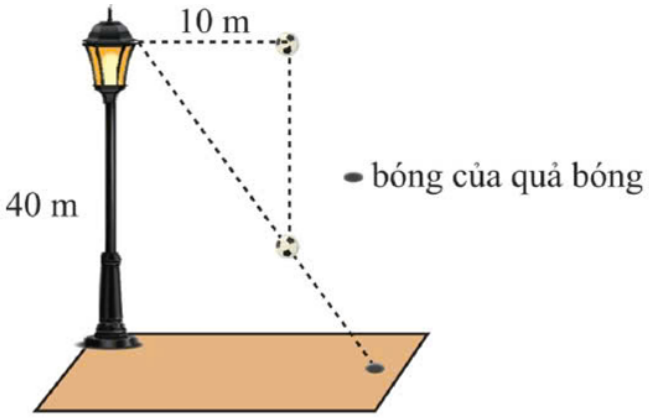
a. $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x=-x^3+3x+C$ với C là hằng số.

b. $G(2)=-2$.

c. $F(x)-G(x)=10$.

d. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=F(x)$, $y=G(x)$, và hai đường thẳng $x=3$, $x=7$ bằng 40.

Bài 62. Một ngọn đèn chiếu sáng từ đỉnh của một cột đèn cao 40 m. Một vật được thả rơi tự do từ cùng độ cao, cách đèn 10 m theo phương ngang (tham khảo như hình vẽ). Biết gia tốc trọng trường bằng 10 m/s^2, tại thời điểm thả rơi vật có vận tốc bằng 0. Gọi $h(t)$ là độ cao của vật tại thời điểm t giây.



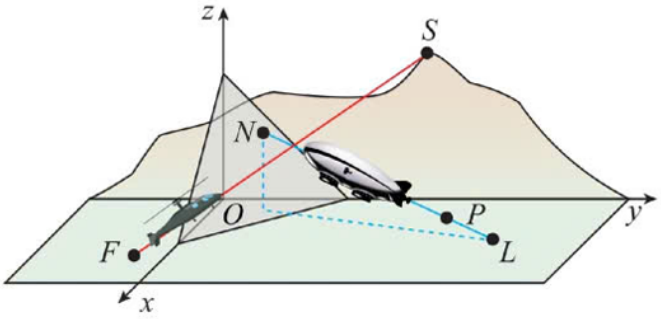
a) Độ cao của vật tại thời điểm t giây được xác định bởi công thức $h(t)=40-5t^2$ (mét).

b) Tốc độ của vật khi chạm đất bằng $28,2$ (m/s) (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

c) Khoảng cách giữa bóng của vật và chân đèn sau t giây là $L(t)=\frac{10h(t)}{40-h(t)}$.

d) Tại thời điểm vật chạm đất, bóng của vật hướng về phía chân đèn với tốc độ bằng $7,1$ (m/s) (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Bài 63. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, đơn vị trên mỗi trục tính bằng kilomet, mặt đất trùng với mặt phẳng (Oxy). Một khinh khí cầu cất cánh tại sân bay bay thẳng từ điểm $L(24;52;0)$ và ngay sau đó được định vị tại $P(20;42;2)$. Cùng lúc đó một trực thăng xuất phát từ căn cứ được đặt tại điểm $F(20;-8;0)$ bay thẳng theo hướng đến đỉnh núi $S(-4;32;16)$. Mặt trước của một bức tường sương mù được giới hạn bởi mặt phẳng đi qua 3 điểm $A(16;0;0)$, $B(0;16;0)$ và $C(0;0;16)$. Trên đường bay của khinh khí cầu và trực thăng, có một điểm giao nhau gọi là điểm M.



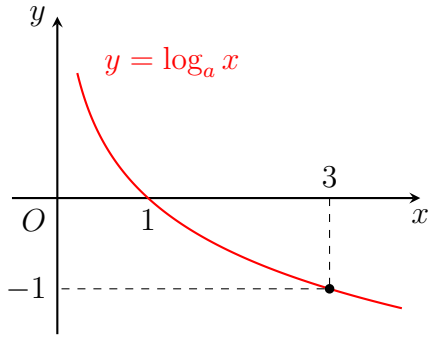
a. Phương trình mặt phẳng (ABC) là $x+y+z-16=0$.

b. Khinh khí cầu sẽ chạm với bức tường sương mù tại điểm $N(a;b;c)$, khi đó $a+2b+3c=44$.

c. Điểm M có hoành độ nhỏ hơn 6.

d. Khoảng cách từ điểm giao nhau đến mặt phẳng chứa bức tường sương mù nằm trong khoảng 4000 đến 6500 mét.

Bài 64. Cho hàm số $y=f(x)=\log_a x$ với $a>0$ và $a\neq 1$ có đồ thị như hình vẽ bên.



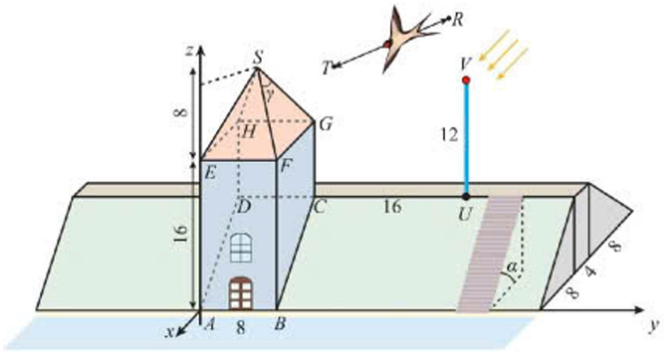
a. Tập xác định của hàm số $f(x)$ là $D=(-\infty;+\infty)$.

b. Đồ thị hàm số $f(x)$ đi qua điểm $(-1;3)$.

c. $a=\frac{1}{3}$.

d. Bất phương trình $f(x)\geq -2$ có 9 nghiệm nguyên.

Bài 65. Một con đê có tiết diện là một hình thang cân với độ dài đáy lớn bằng 20 mét, độ dài đáy bé 4 mét, chiều cao là 8 mét. Ở sườn phía trước của một con đê có một tòa tháp với phần thân là hình hộp chữ nhật cao 16 mét với đáy là hình vuông cạnh bằng 8 mét, phần mái nhà cao 8 mét có dạng hình chóp tứ giác đều $S.EFGH$. Trên hệ tọa độ $Oxyz$, đơn vị trên mỗi trục tính bằng mét, mặt đất trùng với mặt phẳng (Oxy), điểm A trùng với gốc tọa độ, tia Oy cùng hướng với tia AB, tia Oz hướng lên (tham khảo như hình vẽ). Một con chim bay thẳng theo một đường thẳng, lần lượt đi qua các vị trí $R(-13;17;25)$ và $T(-9;9;23)$, tiếp mái tại một điểm Q trong tam giác SHG.



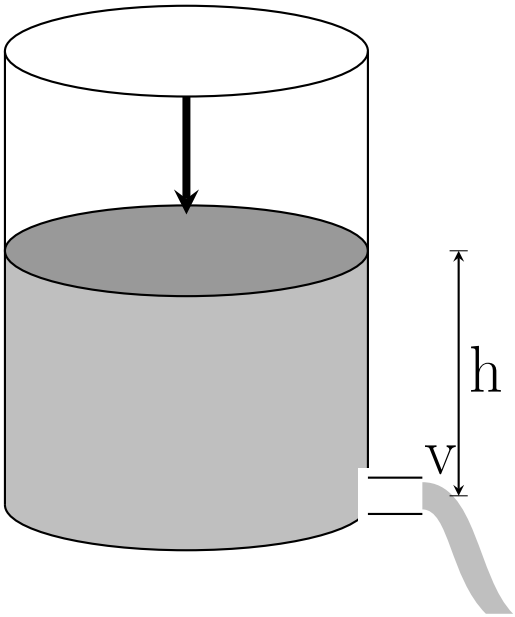
a. Đỉnh của mái nhà có tọa độ $S(-4;4;24)$.

b. Phương trình mặt phẳng (SHG) đi qua điểm $M(3;12;8)$.

c. Điểm $Q(a;b;c)$, khi đó $2(a-b) \geq c$.

d. Điểm Q cách mặt phẳng chứa sườn dốc phía trước một khoảng nhỏ hơn 20 mét.

Bài 66. Một bể ban đầu chứa đầy nước, bể có dạng hình trụ với chiều cao bằng 9 m và bán kính đáy bằng 2 m. Nước bắt đầu chảy ra từ một vòi nước ở đáy bể. Gọi $V(t)$ là thể tích chất lỏng đã thoát ra tại thời điểm t (phút) sau khi mở vòi thì $V'(t) = k(45-t)$ với $(k \in \mathbb{R}, 0 \leq t \leq 45)$. Biết sau 15 phút mực nước còn lại trong bể cao 4 m và công thức tính thể tích hình trụ là $V = \pi r^2 h$.



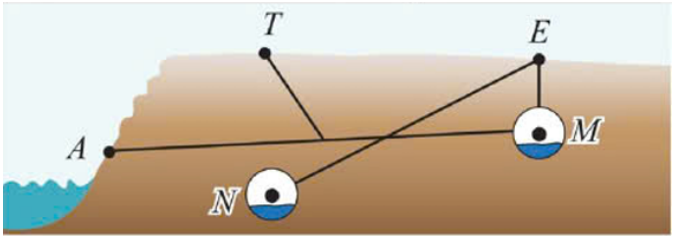
a. Hàm số $f(t) = k(45-t)$ là một nguyên hàm của hàm số $V(t)$.

b. $V(t) = k\left(45t - \frac{t^2}{2}\right) + C$, với $0 \leq t \leq 45$ và k, C là các hằng số.

c. $k = -0,11$ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

d. Sau 42 phút, thể tích chất lỏng còn lại trong bể bằng 503 lít (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Bài 67. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, đơn vị trên các trục tọa độ tính bằng 100 m, mặt đất nằm trên mặt phẳng (Oxy). Hai bể chứa nước M và N nằm ở các vị trí $M(8;12;-6)$ và $N(14;2;-10)$. Một kênh tràn k dẫn nước từ bể chứa M đến $A(11;0;-9)$. Trên bề mặt, từ điểm $T(8;2;0)$, một mũi khoan thông gió được thực hiện theo hướng vectơ $\vec{v} = (1;1;-4)$. Ngoài ra, hai đường ống cung cấp nước được lên kế hoạch xây dựng và khoan từ điểm E (nằm trên mặt đất) đến hai bể chứa nước (tham khảo như hình vẽ).



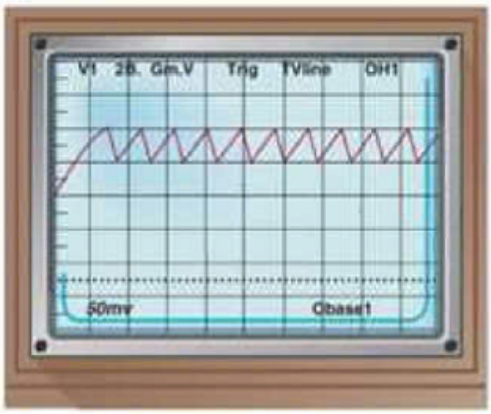
a) Gọi H là vị trí mũi khoan thông gió chạm đến kênh tràn, khi đó $H(8+a;2+a;-4a)$ $(a \in \mathbb{R})$.

b) Chiều dài của mũi khoan thông gió nằm trong khoảng 840 đến 850 mét.

c) Ống cung cấp nước EN có khả năng va chạm với kênh tràn k.

d) Biết rằng tiến độ xây dựng ống cung cấp nước là 20 cm/phút, thời gian tối thiểu để xây dựng xong hai đường ống cung cấp nước là 165 giờ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của giờ).

Bài 68. Một máy hiện sóng thường hiển thị một đường cong răng cưa. Đường cong này có dạng hình sin với các chu kỳ và biên độ thay đổi (như hình vẽ). Nhà khoa học đã mô hình hóa chu kì đầu tiên của sóng đó qua phương trình $y = \frac{1}{2}\sin(2\pi x) + \frac{1}{4}\sin(4\pi x)$ với x (giây) là thời gian truyền sóng và $x \in [0;1]$, y là độ cao của sóng có đơn vị cm.



a) $y(0) = y(1) = 0$.

b) Ta có đạo hàm $y' = \cos(2\pi x) + \cos(4\pi x)$.

c) Trong giây đầu tiên, tốc độ chuyển động của sóng bằng 0 tại 2 thời điểm.

d) Trong giây đầu tiên, sóng cao nhất bằng $6,5$ mm (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Bài 69. Trong một lớp có 40 học sinh, người ta khảo sát sở thích uống nước của các bạn. Kết quả thu được như sau:

- 25 bạn thích uống trà sữa.
- 18 bạn thích uống nước cam.
- 10 bạn thích cả hai loại trên.

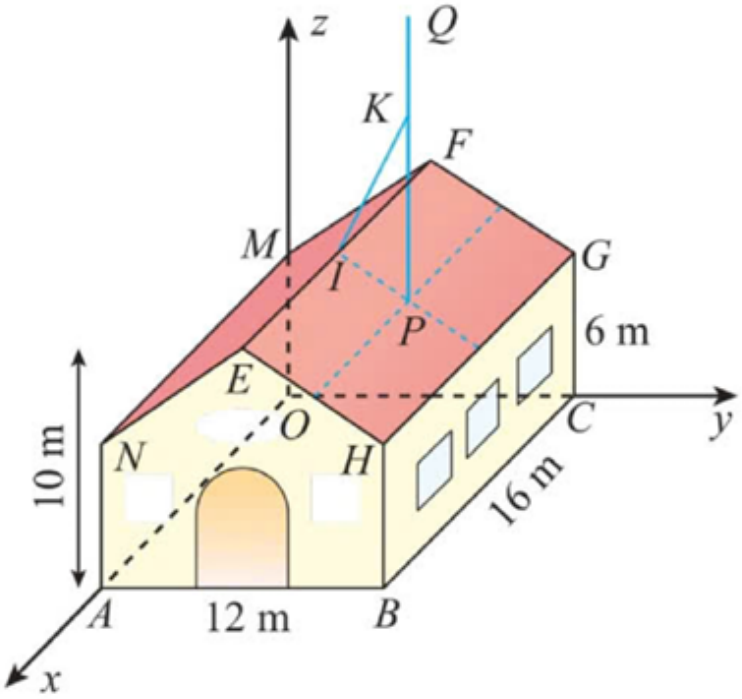
a) Số học sinh chỉ thích trà sữa là 15 học sinh.

b) Số học sinh chỉ thích nước cam là 9 học sinh.

c) Số học sinh không thích cả hai loại đồ uống trên là 7 học sinh.

d) Chọn ra một học sinh trong lớp, biết rằng học sinh đó không thích trà sữa, xác suất để học sinh đó cũng không thích nước cam là $\frac{8}{15}$.

Bài 70. Hình bên minh họa một nhà kho trong không gian với hai mái $EFGH$ và $EFMN$ là các hình chữ nhật có kích thước bằng nhau. Biết rằng các bức tường của nhà kho tạo thành hình hộp chữ nhật $OABC.MNHG$ với $BC = 16$ mét, $AB = 12$ mét và $OM = 6$ mét. Trung điểm I của EF (đỉnh mái nhà) cách đáy nhà kho 10 mét. Chọn hệ tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ với điểm A thuộc tia Ox, C thuộc tia Oy, M thuộc tia Oz. Một Ăngten PQ cao 12 mét được đặt thẳng đứng tại tâm của mái $EFGH$.



a) Điểm I có tọa độ là $I(6; 8; 10)$.

b) Hai mái của nhà kho đều tạo với mặt đáy một góc lớn hơn $30°$.

c) Đỉnh Q của Ăngten có tọa độ là $Q(9; 8; 20)$.

d) Ăngten được cố định bằng một sợi IK dài 7 mét, nối từ điểm I đến điểm K (K thuộc đoạn PQ). Vậy khoảng cách QK nhỏ hơn $3,5$ mét.

Bài 71. Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 4$ có đồ thị (C). Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = \mathbb{R}$ và $y' = -3x^3 + 6x$.

b) Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 2)$.

c) Đồ thị (C) có hai điểm cực trị và phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị là $2x + y - 4 = 0$.

d) Diện tích của tam giác OAB bằng 4, với O là gốc tọa độ và A, B là các điểm cực trị của (C).

Bài 72. Hiện nay, thời gian sử dụng điện thoại của học sinh quá nhiều dẫn đến suy giảm thị lực. Trung tâm Mắt Kính Đức Thành Trà Kiệu tổ chức khám sàn lọc miễn phí cho 100 học sinh của một trường THPT trên địa bàn huyện để kiểm tra tình trạng cận thị của học sinh và thu được mẫu số liệu sau:

Mức độ cận thị (Đơn vị diop)	$[0; 0,5)$	$[0,5; 1,0)$	$[1,0; 1,5)$	$[1,5; 2,0)$	$[2,0; 2,5)$
Số học sinh	20	15	30	20	15

Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) Giá trị đại diện của nhóm chứa Mốt là $1,25$.

b) Độ cận trung bình (đơn vị diop) của 100 học sinh là $1,26$.

c) Trung vị của mẫu số liệu là $M_e = 1,26$.

d) Phương sai của mẫu số liệu là $s^2 = 0,4389$.

Bài 73. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(4;2;-1)$, $B(1;-1;2)$, $C(0;-2;3)$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) $\overrightarrow{AB} = (-3;-3;3)$, $AB = 3\sqrt{3}$.

b) Ba điểm A, B, C tạo thành tam giác có trọng tâm là $G\left(\frac{5}{3};-\frac{1}{3};\frac{4}{3}\right)$.

c) Điểm $A'(4;0;0)$ là hình chiếu của điểm A lên mặt phẳng (Oyz).

d) Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng OA và AB. Khi đó $\cos\varphi = \frac{\sqrt{7}}{3}$.

Bài 74. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, đơn vị mỗi trục là km. Máy bay M lúc đầu quan sát ($t = 0$) nó ở vị trí có tọa độ $A(3;-10;12)$. Cùng lúc đó một máy bay N đang ở vị trí có tọa độ $B(45;25;18)$. Hai máy bay này đều đang chuyển động cùng hướng với vectơ $\vec{v}(0;1;0)$. Từ điểm A, máy bay M tăng tốc với tốc độ $v(t) = \beta t + 1000$ (km/h), (trong đó t tính bằng giờ kể từ khi tăng tốc $(0 \le t \le 10)$, β là hằng số dương nhỏ hơn 20), còn máy bay N chuyển động với vận tốc không đổi là 962 km/h. Biết rằng sau 30 phút kể từ lúc ban đầu, khoảng cách giữa hai máy bay là 45 km.

a. Khoảng cách giữa hai máy bay lúc ban đầu là 55 km.

b. Sau t (giờ) $(0 \le t \le 10)$ máy bay N đang ở vị trí có tọa độ là $(45;25+962t;18)$.

c. $\beta = 12$.

d. Khoảng cách giữa hai máy bay sau 1 giờ (kể từ thời điểm quan sát) lớn hơn 50 km.

Bài 75. Khi phát hiện một vật thể bay, xác suất một hệ thống radar phát cảnh báo là $0,9$ nếu vật thể bay đó là mục tiêu thật và là $0,05$ nếu đó là mục tiêu giả. Thống kê cho thấy có 99% các vật thể bay là mục tiêu giả. Radar phát hiện một vật thể bay. Gọi A là biến cố: "Hệ thống radar phát cảnh báo". Gọi B là biến cố: "Vật thể đó là mục tiêu thật". Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $P(B) = 0,99$ và $P(\overline{B}) = 0,01$.

b) Xác suất có điều kiện $P(A|B) = 0,9$.

c) Xác suất $P(A) = 58,5\%$.

d) Biết rằng hệ thống radar đang phát cảnh báo khi phát hiện một vật thể bay. Xác suất vật thể đó là mục tiêu thật là $0,15$ (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Bài 76. Cho hàm số $f(x) = e^{x^2} - x^2$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

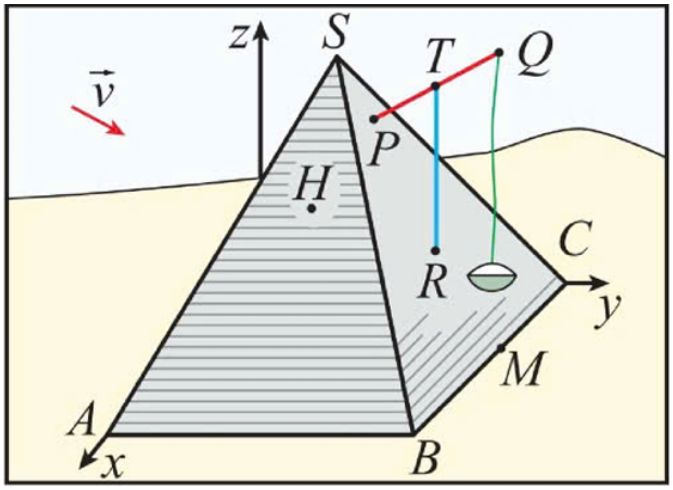
a) Tập xác định của hàm số $f(x)$ là $D = (0;+\infty)$.

b) Hàm số đã cho có đạo hàm là $f'(x) = 2x \cdot e^{x^2} - 2x$.

c) Phương trình $f'(x) = 0$ có tập nghiệm là $S = \{-1;0;1\}$.

d) Giá trị cực tiểu của hàm số $f(x)$ bằng 1.

Bài 77. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, đơn vị mỗi trục là mét, một kim tự tháp là hình chóp đều với đỉnh $S(50;50;100)$ và các điểm $A(100;0;0)$, $B(100;100;0)$, $C(0;100;0)$, $D(0;0;0)$. Một thanh dầm PQ nhô ra từ mặt BCS, nó được đỡ bằng một giá đỡ RT thẳng đứng, trong đó $T \in PQ$, $R \in (SBC)$. Biết $P(50;60;80)$, $Q(50;100;100)$, giá đỡ RT song song với trục Oz và có chiều dài là 60 mét. Các mệnh đề sau đúng hay sai?



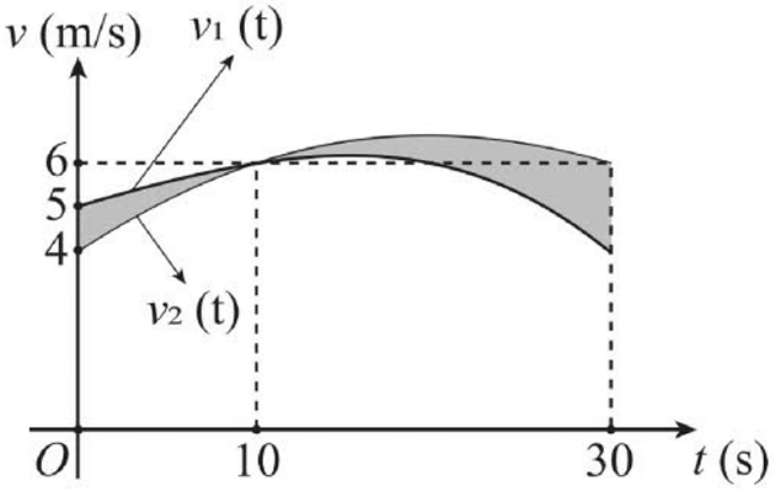
a) Phương trình tham số của đường thẳng PQ là $\begin{cases} x = 50 \\ y = 60 + 2t \\ z = 80 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.

b) Phương trình mặt phẳng (SBC) là $2y + z - 150 = 0$.

c) Tung độ của điểm R bằng 84.

d) Tọa độ của điểm T là $T(a; b; c)$. Vậy $a + b + c = 226$.

Bài 78. Có hai vận động viên A và B chạy trên một đường thẳng với vận tốc lần lượt được biểu diễn bởi đồ thị hàm số $y = v_1(t) = -\dfrac{1}{6000}t^3 + \dfrac{7}{60}t + 5$ (m/s) và parabol $y = v_2(t)$ (m/s) như hình vẽ. Biết rằng hai vận động viên xuất phát cùng một lúc tại cùng một vị trí.



Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

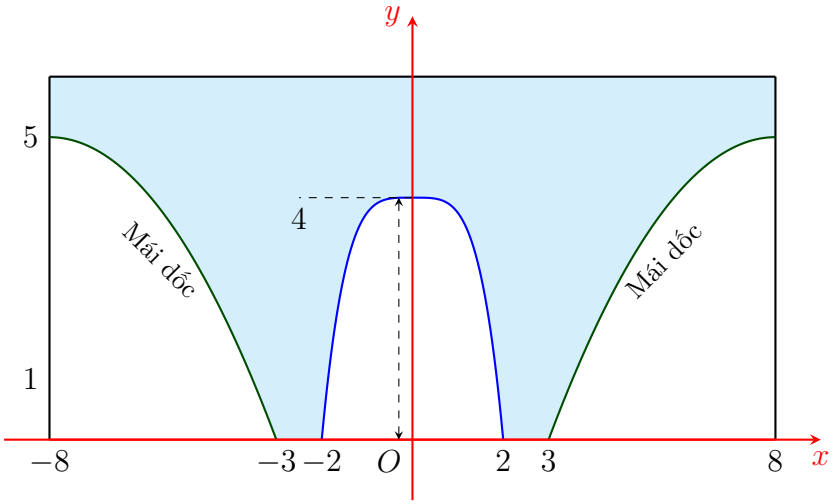
a. Diện tích phần tô đậm như hình vẽ bằng khoảng cách giữa hai vận động viên sau 30 giây kể từ lúc xuất phát.

b. $v_2(t) = -\dfrac{1}{150}(t^2 - 40t - 600)$ (m/s).

c. Tại thời điểm 10s, vận động viên A dẫn trước vận động viên B một khoảng bằng 4,3 mét (làm tròn đến hàng phần mười).

d. Sau 30 giây, hai vận động viên cách nhau một khoảng 19,9 mét (làm tròn đến hàng phần mười).

Bài 79. Hình vẽ sau mô tả mặt cắt ngang của một cây cầu cao 6 mét, dài 16 mét, rộng 4 mét, được giới hạn bởi hai đường mái dốc và các đường thẳng; cầu có hầm chui cao 4 mét, rộng 4 mét. Trên hệ tọa độ Oxy, đường chui được mô hình hóa bằng hàm bậc bốn $f(x) = ax^4 + b$, hai đường cong mái dốc được mô hình hóa bởi hai parabol $y = g(x)$ và $y = h(x)$ đối xứng nhau qua trục Oy, parabol bên phải là $y = g(x)$ có đỉnh $I(8; 5)$. Các số liệu được cho như hình vẽ (đơn vị mỗi trục là mét), biết cây cầu có chiều rộng bằng 8 mét.



Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a. Hàm số $f(x) = -\dfrac{1}{4}x^4 + 4$.

b. Parabol bên phải có phương trình là $g(x) = -\dfrac{1}{5}(x-8)^2 + 5$.

c. Diện tích phần mặt cắt giới hạn bởi hai parabol $y = g(x)$ và $y = h(x)$, trục hoành, hai đường thẳng $x = -8, x = 8$ nhỏ hơn 30 mét vuông.

d. Thể tích vật liệu để xây dựng cây cầu nhỏ hơn 500 m^3.

Bài 80. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, đơn vị mỗi trục là km, mặt đất trùng với mặt phẳng (Oxy), trục Oz hướng lên, đường đi của máy bay được coi là đường thẳng và chúng được coi là các điểm. Một máy bay cất cánh từ mặt đất, đang tăng độ cao và được tháp kiểm soát không lưu phát hiện tại $A(8; 8; 4)$, 2 phút sau đó nó đi đến điểm $B(4; 12; 6)$. Máy bay tiếp tục đi vào một lớp mây, bắt đầu ở độ cao 9 km và kết thúc ở độ cao 10 km. Ngay sau khi ra khỏi lớp mây, máy bay chuyển từ chế độ tăng độ cao sang chế độ bay ngang cùng chiều với tia Oy. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

a) Phương trình đường thẳng AB là $\dfrac{x-8}{2} = \dfrac{y-8}{2} = \dfrac{z-4}{-1}$.

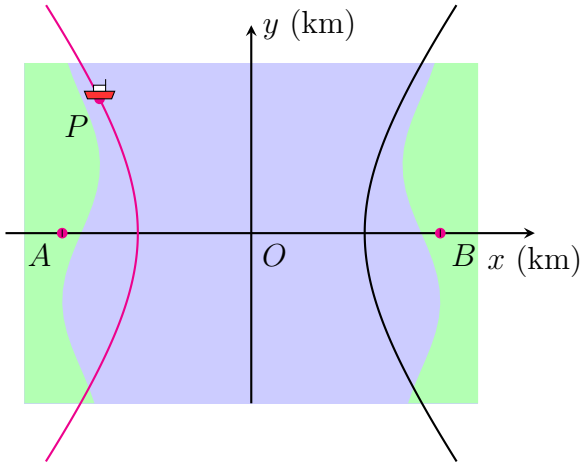
b) Máy bay cất cánh tại điểm có hoành độ bằng 16.

c) Thời gian tính từ lúc cất cánh đến khi vừa ra khỏi lớp mây của máy bay này là 10 phút.

d) Giả sử vận tốc máy bay không đổi trong quá trình bay thì sau 30 phút nó ở vị trí cách điểm cất cánh một khoảng lớn hơn 80 km.

Bài 81. Trong một khu vực trên biển có hai trạm định vị vô tuyến được đặt tại điểm A và B cách nhau 1000 km. Một con tàu di chuyển trên biển, nó luôn nhận tín hiệu từ trạm A trước tín hiệu từ trạm B một khoảng là 0,002 giây. Biết rằng các tín hiệu hai trạm truyền đi với tốc độ không đổi trong không khí là $3 \cdot 10^8$ (m/s). Gọi t_1, t_2 (đơn vị giây) lần lượt là thời gian truyền tín hiệu từ trạm A và trạm B đến con tàu. Xét hệ tọa độ Oxy như hình vẽ (đơn vị trên mỗi trục tọa

độ tính bằng km). Gọi vị trí trên biển của con tàu là P.



Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

a) $t_1 - t_2 = 0,002$.

b) Hiệu khoảng cách giữa tàu với trạm A và trạm B là một đẳng thức cố định được xác định bởi $|PA - PB| = 600$ (km).

c) Quỹ đạo chuyển động của tàu là một đường hypebol có phương trình là $\dfrac{x^2}{400^2} - \dfrac{y^2}{300^2} = 1$.

d) Khi con tàu cách gốc tọa độ O một khoảng 800 km thì hoành độ của nó nhỏ hơn 600.

Bài 82. Tốc độ phát triển của một loại nấm mốc trên một sàn nhà tỷ lệ thuận với lượng nấm mốc hiện tại. Diện tích nấm mốc trên sàn lúc đầu ($t = 0$) là 2 cm^2 và sau 2 ngày là 9 cm^2. Gọi $A(t)$ là diện tích nấm mốc tại thời điểm t thì $A'(t) = k \cdot A(t)$ (với k là hằng số). Cho biết $A(t) = e^{g(t)}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

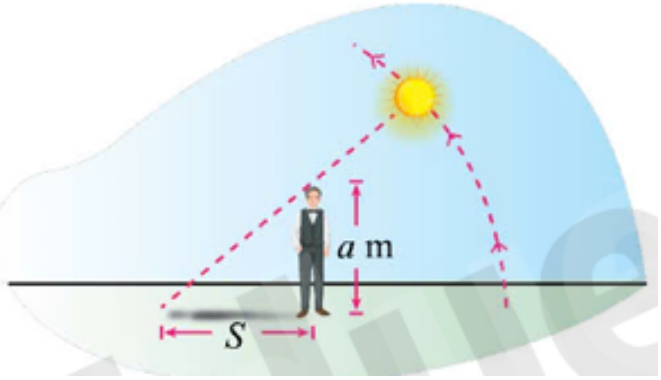
a) $g(t) = e^{kt} + C$ với C là hằng số xác định.

b) $k = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{9}{2}$.

c) $g(0) = 2 \ln 2$.

d) Sau 3 ngày (tính từ thời điểm $t = 0$), diện tích nấm mốc bao phủ lớn hơn 20 cm^2.

Bài 83. Một mô hình hàm lượng giác sau đây mô phỏng chiều dài của bóng một người đàn ông cao a mét khi mặt trời chiếu vào. Nếu gọi chiều dài của bóng người đàn ông đó là $S(t)$ thì ta có $S(t) = a\left|\cot\left(\dfrac{\pi}{12}t\right)\right|$ (mét) với t là số giờ tính từ lúc 6 giờ sáng (tức là tại thời điểm 6 giờ sáng thì $t = 0$) (tham khảo hình vẽ). Vào thời điểm 9 giờ sáng, bóng của người đàn ông dài 1,8 mét.



Các mệnh đề sau đúng hay sai?

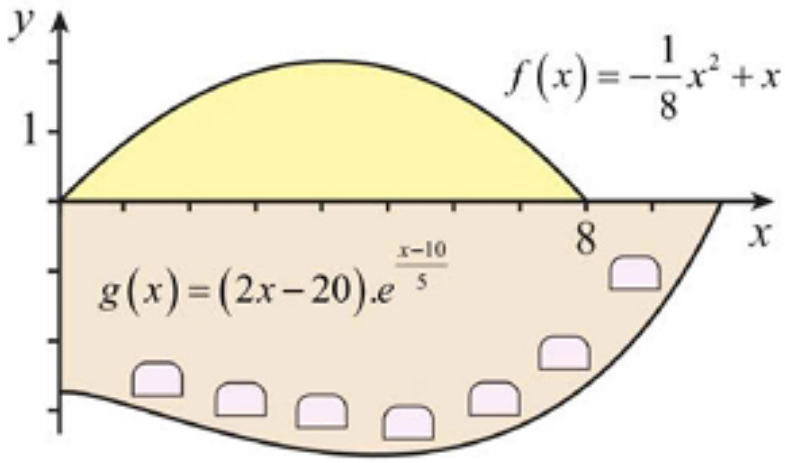
a) Vào thời điểm 6 giờ sáng và 18 giờ tối ta không thể xác định được bóng của người đàn ông.

b) Từ lúc 6 giờ sáng đến 18 giờ tối chiều dài bóng của người đàn ông luôn giảm.

c) Người đàn ông đó cao hơn 1,75 mét.

d) Bóng của người đàn ông dài 1 mét vào các thời điểm $t = 4,07$ và $t = 7,94$ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Bài 84. Ở Dubai, những hòn đảo nhân tạo được xây dựng trên biển để làm địa điểm nghỉ dưỡng. Trên hệ tọa độ Oxy, đơn vị mỗi trục tính bằng 100 mét, đường bờ biển của một hòn đảo được mô tả như hình vẽ bởi các đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$. Trong đó $y = f(x)$ là một parabol có đỉnh $I(4; 2)$, đi qua gốc tọa độ và $g(x) = (2x - 20)e^{0,2x-2}$. Hòn đảo này gồm hai phần, phần bãi tắm được giới hạn bởi đường cong $y = f(x)$ và trục hoành; phần nghỉ dưỡng được giới hạn bởi đường cong $y = g(x)$, trục tung và trục hoành.



Các mệnh đề sau đúng hay sai?

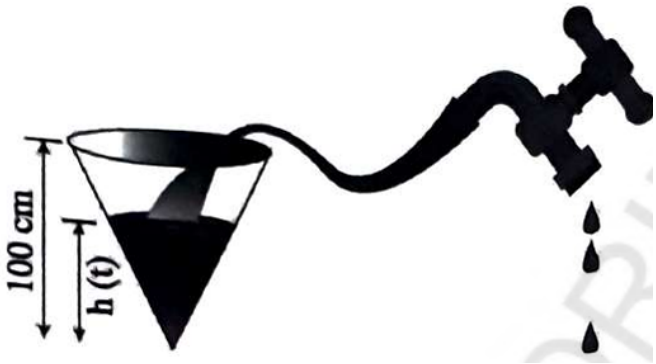
a. $f(x) = -0,125x^2 + x$.

b. Diện tích của bãi tắm bằng lớn hơn 100 nghìn mét vuông.

c. Biết rằng $G(x) = (ax+b)e^{0,2x-2}$ là một nguyên hàm của hàm số $g(x)$ trên $\mathbb{R}$, khi đó $a-b = 140$.

d. Tổng diện tích hòn đảo lớn hơn 500 nghìn mét vuông.

Bài 85. Một bình nước rỗng có dạng hình nón ngược có chiều cao $h = 100$ cm, bán kính đáy $r = 50$ cm như hình vẽ.



Nước được chảy vào bình với tốc độ 2 lít/phút, gọi $V(t)$ (cm^3) và $h(t)$ (cm) lần lượt là thể tích và chiều cao của mực nước trong bình sau t (phút) tính từ lúc nước chảy vào. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

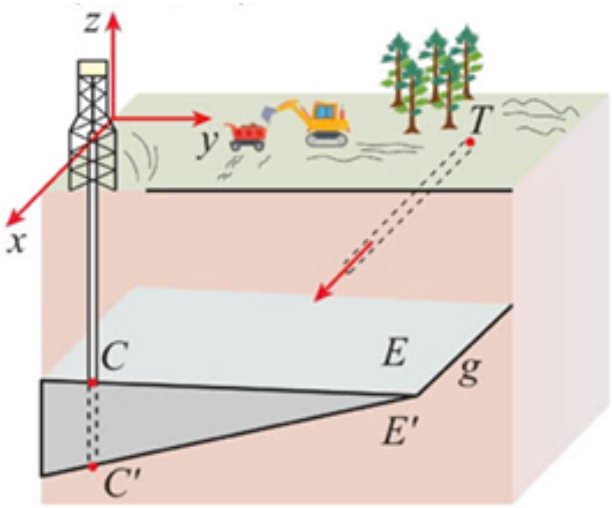
a. Bể sẽ đầy nước sau 121 phút (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị của phút).

b. Mối quan hệ giữa $V(t)$ và $h(t)$ là: $V(t) = \dfrac{\pi}{6} \cdot [h(t)]^3$.

c. Hàm số biểu thị chiều cao mực nước theo thời gian t phút là $h(t) = \sqrt[3]{\dfrac{12000t}{\pi}}$ (cm).

d. Sau 20 phút, mực nước đang dâng lên với tốc độ lớn hơn 1 cm/phút.

Bài 86. Một lớp than đá hình lăng trụ tam giác có các mặt phẳng giới hạn trên và dưới là (E) và (E'), tiếp giáp với các lớp đất xung quanh. Trên hệ trục tọa độ $Oxyz$, đơn vị trên mỗi trục tính bằng mét, mặt đất là mặt phẳng (Oxy). Các kĩ sư thực hiện ba lần khoan thăm dò, lần thứ nhất cắt mặt (E) và (E') lần lượt tại điểm $A(-20;30;-200)$, $A'(-20;30;-236)$; lần thứ hai cắt mặt (E) và (E') lần lượt tại điểm $B(120;180;-80)$, $B'(120;180;-120)$; lần thứ ba cắt mặt (E) và (E') lần lượt tại điểm $C(80;120;-120)$, $C'(80;120;-160)$. Từ điểm $T(-200;200;0)$, một đường hầm được đào theo hướng của vectơ $\vec{v} = (2;-1;-1)$.



Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

a) Phương trình của mặt phẳng (E) là $3x - 2y + 6z - 1200 = 0$.

b) Một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (E') là $\vec{n}' = (2;2;-5)$.

c) Khi đào hầm, vị trí đầu tiên mà đường hầm gặp lớp than là $M(a;b;c)$, khi đó $a > 90$.

d) Chiều dài đoạn đường hầm nằm trong lớp than đá lớn hơn 80 mét.

Bài 87. Sự tăng trưởng của một loại vi khuẩn tuân theo công thức $S(t) = A \cdot e^{rt}$, trong đó A là số lượng vi khuẩn ban đầu, r là tỉ lệ tăng trưởng ($r > 0$), t là thời gian tăng trưởng tính bằng giờ kể từ lúc đầu. Biết số lượng vi khuẩn ban đầu là 100 con và sau 5 giờ là 300 con. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Ta có: $S(0) = 100$ và $S(5) = 300$.

b) $A = 300$.

c) $r = \dfrac{\ln 3}{5}$.

d) Sau 15 giờ số lượng vi khuẩn là 2700 con.

Bài 88. Cho hàm số $f(x) = 2\cos^2\dfrac{x}{2}$. Xét tính đúng, sai của các mệnh đề sau:

a) Tập giá trị của hàm số $f(x)$ là $[0;2]$.

b) $f(x) = 1 - \cos x$.

c) Một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ là $F(x) = x + \sin x$.

d) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0; x = \pi$ lớn hơn 4.

Bài 89. Khi trả lời câu hỏi trong một bài thi trắc nghiệm, học sinh có thể biết đáp án hoặc dự đoán đáp án. Các câu hỏi trắc nghiệm có 4 đáp án nhưng chỉ có 1 đáp án đúng. Giả sử với mỗi câu hỏi bạn Tuấn có xác suất biết đáp án đúng là $0,6$ và xác suất Tuấn không biết đáp án đúng là $0,4$. Trong trường hợp không biết đáp án Tuấn sẽ dự đoán đáp án đúng bằng cách chọn ngẫu nhiên một trong 4 đáp án của đề thi. Giả sử Tuấn gặp một câu hỏi trắc nghiệm.
Gọi A là biến cố: "Câu trả lời của Tuấn là đúng".
Gọi B là biến cố: "Câu hỏi đó Tuấn đã biết đáp án".

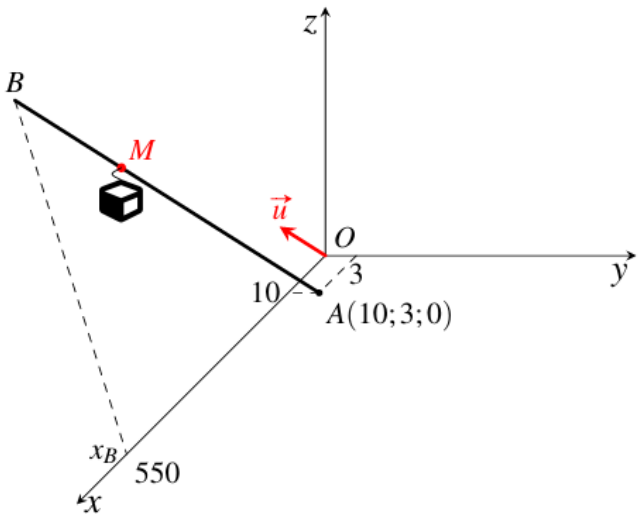
a) $P(B) = 0,6, P(\overline{B}) = 0,4$.

b) Xác suất có điều kiện: $P(A|B) = 0,5; P(A|\overline{B}) = 0,25$.

c) Xác suất để câu trả lời của Tuấn đúng là 72%.

d) Với câu trắc nghiệm mà câu trả lời của Tuấn là đúng, xác suất để câu đó là câu mà Tuấn biết đáp án đúng là $\dfrac{6}{7}$.

Bài 90. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, một cabin cáp treo xuất phát từ điểm $A(10;3;0)$ và chuyển động thẳng đều theo đường cáp có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (2;-2;1)$ với tốc độ là $4,5$ (m/s) (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét, hướng chuyển động cùng chiều với hướng vectơ $\vec{u}$). Khi đó



a) Phương trình đường cáp là $\dfrac{x+10}{2} = \dfrac{y+3}{-2} = \dfrac{z}{1}$.

b) Sau t giây kể từ khi xuất phát, cabin chuyển động được quãng đường bằng $4,5t$ (m).

c) Giả sử sau t giây kể từ khi xuất phát ($t \geq 0$), cabin đến điểm M. Tọa độ của điểm M theo t là $M(9t+10;-9t+3;t)$.

d) Cabin dừng ở điểm B có hoành độ $x_B = 550$. Độ dài quãng đường AB bằng 810 m.

Bài 91. Một ô tô đang di chuyển với tốc độ 72 km/h tại vị trí A thì tài xế quan sát thấy biển báo giới hạn tốc độ nên đạp phanh để giảm tốc và hàm vận tốc được tuân theo quy luật $v(t) = at + b$ (m/s). Sau 4 giây hãm phanh, xe đi được quãng đường là 70 m và vận tốc lúc này vừa đúng bằng tốc độ giới hạn cho phép. Tài xế tiếp tục giữ nguyên tốc độ giới hạn này đi tiếp trong 10 giây để đi qua hết khu vực này. Sau đó, xe tiếp tục giảm tốc theo quy luật $v(t) = ct^2 + d$ (m/s) và dừng hẳn tại B. Biết tổng quãng đường từ A đến B bằng 280 m. Kiểm tra tính đúng/sai của các khẳng định sau:

a) Biển báo quy định tốc độ giới hạn tối đa là 60 (km/h).

b) $a = -1,25$.

c) Quãng đường xe chạy với tốc độ không đổi là 160 m.

d) Tại thời điểm $t = 17$ giây tính từ A thì vận tốc của xe là $11,25$ (m/s).

Bài 92. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên các trục là mét), một thiết bị bay không người lái xuất phát từ điểm $A(1;2;0)$. Thiết bị chuyển động thẳng nhanh dần theo hướng của vectơ đơn vị $\vec{u} = (a;b;c)$ với $|\vec{u}| = 1$. Tốc độ của thiết bị phụ thuộc vào thời gian t (giây) theo công thức $v(t) = mt + 10$ (m/s), trong đó m là hằng số dương. Biết rằng sau 5 giây kể từ lúc xuất phát, thiết bị đi được quãng đường 125 m. Vectơ chỉ phương chuyển động $\vec{u}$ tạo với tia Ox một góc 45°, tạo với tia Oy một góc 60° và tạo với tia Oz một góc nhọn. Kiểm tra tính đúng/sai của các khẳng định sau:

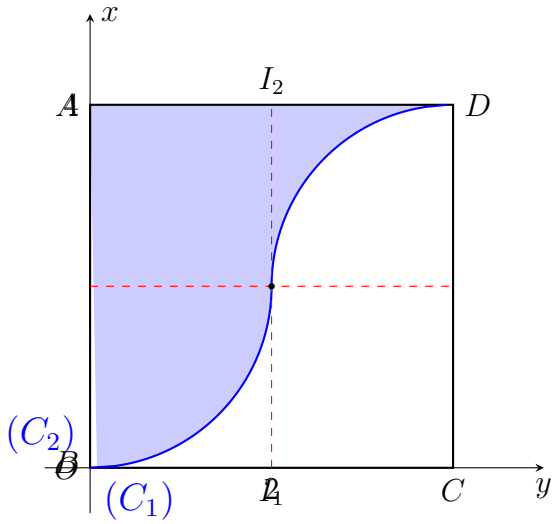
a) $c = \dfrac{1}{2}$.

b) Phương trình quỹ đạo là đường thẳng $\dfrac{x-1}{\sqrt{2}} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z}{1}$.

c) $m = 4$.

d) Sau 10 giây kể từ lúc xuất phát thì thiết bị đạt độ cao 200 mét.

Bài 93. Hình phẳng (H) dưới đây được giới hạn bởi các cạnh AB, AD của hình vuông và các cung phần tư của các đường tròn có bán kính bằng 2 cm với tâm lần lượt là trung điểm của các cạnh BC và AD và được gắn vào hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ dưới đây:



Kiểm tra tính đúng/sai của các khẳng định sau:

a) Cung tròn phần tư (C_2) có tâm $I_2(4;2)$.

b) Phương trình của cung tròn phần tư (C_1) là $y = 2 - \sqrt{4 - x^2}$.

c) Diện tích hình phẳng (H) bằng 8 cm^2.

d) Người ta muốn tạo ra một vật trang trí dạng khối tròn xoay bằng cách quay hình phẳng (H) quanh trục AB thì lúc này vật trang trí có thể tích bằng 72 cm^3 (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

Bài 94. Trong y học hạt nhân, đồng vị phóng xạ I-131 thường được sử dụng để hỗ trợ chẩn đoán và điều trị các bệnh lý về tuyến giáp. Sau khi tiêm vào cơ thể bệnh nhân, số lượng hạt nhân phóng xạ sẽ giảm dần theo thời gian. Giả sử khối lượng $m(t)$ (đơn vị: mg) của I-131 còn lại trong cơ thể tại thời điểm t ngày $(t \geq 0)$ thỏa mãn $m(t) > 0$ và tốc độ phân rã tỉ lệ thuận với khối lượng hiện có theo phương trình $m'(t) = k \cdot m(t)$ với $k \neq 0$. Kết quả kiểm tra cho thấy khối lượng I-131 còn lại tại thời điểm $t = 8$ ngày và $t = 16$ ngày lần lượt là 4 mg và 2 mg. Kiểm tra tính đúng/sai của các khẳng định sau:

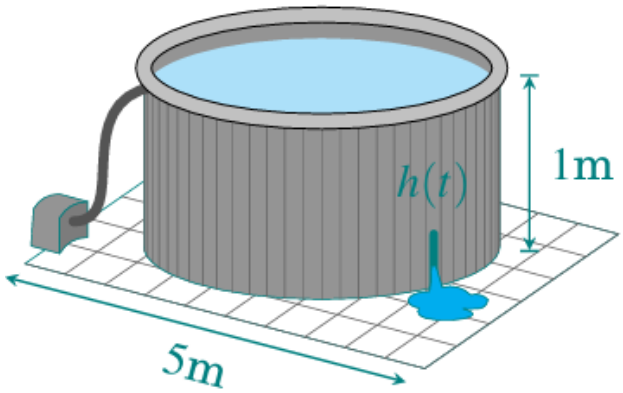
a) $m(t) = e^{kt+C}$ với C là một hằng số xác định.

b) $k = -\dfrac{\ln 2}{4}$.

c) $C = 3 \ln 2$.

d) Khối lượng I-131 còn lại trong cơ thể tại thời điểm $t = 24$ ngày nhỏ hơn $0,8$ mg.

Bài 95. Một bể bơi hình trụ có đường kính 5 m và chiều cao 1 m; bể được bơm nước vào với tốc độ không đổi v_0. Sau khi nước được bơm đầy, bể bơi bị thủng một lỗ ở đáy và nước chảy ra ngoài và bể bị chảy hết nước trong 8 giờ. Biết tốc độ giảm chiều cao của bể bơi khi nước chảy ra ngoài vào thời điểm t giờ (tính từ lúc nước đầy bể và ngừng bơm) được cho bởi hàm số $h'(t) = at + b$, với $a, b \in \mathbb{R}$. Lúc nước chảy hết ra ngoài thì tốc độ giảm chiều cao bằng 0.



a) Thể tích của bể bơi sau khi nước được làm đầy là $6,25\pi$ m^3.

b) $32a + 1 = 0$ và $4b - 1 = 0$.

c) Sau 4 giờ kể từ lúc bể bị rò, lượng nước bị mất đi bằng $\dfrac{75\pi}{16}$ m^3.

d) Lượng nước bị rò rỉ ra ngoài một nửa sau $8 - 4\sqrt{2}$ giờ.

Bài 96. Hình dạng hạt của đậu Hà Lan có hai kiểu hình: hạt trơn và hạt nhăn, có hai gene ứng với hai kiểu hình này là gene trội B và gene lặn b. Khi cho lai hai cây đậu Hà Lan, cây con lấy ngẫu nhiên một cách độc lập một gene từ cây bố và một gene từ cây mẹ để hình thành một cặp gene. Giả sử cây bố và cây mẹ được chọn ngẫu nhiên từ một quần thể các cây đậu Hà Lan, ở đó tỉ lệ cây mang kiểu gene bb, Bb tương ứng là 40% và 60%. Khi đó:

a) Xác suất để cây con lấy gene b từ cây bố với điều kiện cây bố có kiểu gene bb là $0,5$.

b) Xác suất để cây con lấy gene b từ cây bố với điều kiện cây bố có kiểu gene Bb là $0,5$.

c) Xác suất để cây con lấy gene b từ cây bố là $0,6$.

d) Xác suất để cây con có kiểu gene bb là $0,49$.

Bài 97. Một con sư tử đang đuổi theo một con ngựa vằn và chúng cùng chạy trên một đường thẳng. Ngựa vằn đã nhận ra sư tử khi sư tử cách nó khoảng 40 m. Từ thời điểm này, sư tử đuổi theo ngựa vằn với tốc độ $v_1(t) = 15e^{-0,1t}$ m/s và ngựa vằn bỏ chạy với tốc độ $v_2(t) = 20 - 20e^{-0,1t}$ m/s (t tính bằng giây, $0 \le t \le 60$). Kiểm tra tính đúng/sai của các khẳng định sau:

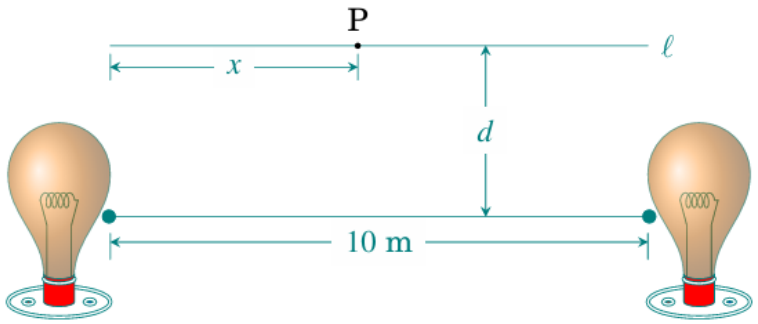
a) Tại thời điểm ban đầu $t = 0$ giây, vận tốc của con ngựa vằn là 20 m/s.

b) Tốc độ của sư tử giảm dần theo thời gian, trong khi tốc độ của ngựa vằn tăng dần theo thời gian.

c) Sư tử ở gần ngựa vằn nhất khi $v_1'(t) = v_2'(t)$ và khoảng cách ngắn nhất giữa chúng là $1,72$ m (làm tròn đến hàng phần trăm theo đơn vị mét).

d) Sư tử sẽ không bắt được ngựa vằn và khoảng cách ngắn nhất giữa chúng là $1,92$ m (làm tròn đến hàng phần trăm theo đơn vị mét).

Bài 98. Hai nguồn sáng có cường độ giống hệt nhau được đặt cách nhau 10 m. Một vật sẽ được đặt tại một điểm P nằm trên một đường thẳng ℓ, song song với đường nối hai nguồn sáng và cách đường đó một khoảng d m (xem hình vẽ). Ta muốn đặt điểm P trên đường ℓ sao cho cường độ chiếu sáng tại P là nhỏ nhất. Ta cần biết rằng cường độ chiếu sáng tại điểm đơn lẻ tỉ lệ thuận với cường độ của nguồn và tỉ lệ nghịch với bình phương khoảng cách đến nguồn đó. Đặt hệ trục tọa độ Oxy sao cho tâm O trùng với nguồn sáng bên trái, tia Ox chứa đoạn nối hai nguồn sáng, tia Oy hướng lên trên, đơn vị trên mỗi trục là m. Kiểm tra tính đúng/sai của các khẳng định sau:



a) Khoảng cách từ P đến các nguồn sáng là $r_1 = \sqrt{x^2 + d^2}; r_2 = \sqrt{(x+10)^2 + d^2}$.

b) Tổng cường độ chiếu sáng tại P là $I(x) = k\left(\dfrac{1}{x^2 + d^2} + \dfrac{1}{(x-10)^2 + d^2}\right)$; với $k > 0$ là hằng số tỉ lệ.

c) Khi $d = 5$ m, cường độ ánh sáng tại P đạt cực tiểu khi $x = 5$ m.

d) Khi $d = 10$ m thì cường độ ánh sáng không đạt cực tiểu khi P ở vị trí chính giữa của thanh ℓ.

Bài 99. Hệ thống lọc nước bể bơi vô cùng quan trọng để nguồn nước được làm sạch thường xuyên và giữ vệ sinh cho người bơi. Trong quá trình vận hành lọc nước thì lượng nước trong bể sẽ thay đổi theo thời gian. Lượng nước trong bể giảm nếu hệ thống đang xả nước bẩn ra khỏi bể và

tăng nếu hệ thống đang cấp thêm nước sạch cho bể. Biết rằng 1 gallon gần bằng $3,785$ lít, dung tích của bể là 1000 gallon và thời điểm 6 giờ sáng bể chứa 250 gallon nước. Hàm số $f(t)$ liên tục trên đoạn $[0;12]$ biểu thị cho tốc độ thay đổi lượng nước trong bể theo thời gian t giờ, từ thời điểm 6 giờ sáng đến 6 giờ chiều được cho bởi hàm số

$$f(t)=\begin{cases}100t, & 0\le t\le 3\\ -200t+a, & 3\le t\le 6,(a\in\mathbb{R}).\\ 100t-900, & 6\le t\le 12\end{cases}$$

Với mốc thời gian $t=0$ tại thời điểm 6 giờ sáng.

a) Tại thời điểm 9 giờ sáng, nước trong bể đang tăng với tốc độ 600 gallon/giờ.

b) Giá trị của $a=900$.

c) Tốc độ thay đổi lượng nước trong bể bằng 0 vào lúc 11 giờ trưa và 15 giờ chiều.

d) Lượng nước trong bể lớn nhất trong khoảng thời gian từ 9 giờ sáng đến 18 giờ chiều là 700 gallon nước.

Bài 100. Khi bỏ qua sức cản của không khí, độ cao (mét) của một vật thể sau thời gian t giây được phóng thẳng đứng lên trên từ điểm cách mặt đất 5 mét với tốc độ ban đầu $39,2$ (m/s) là $h(t)=5+39,2t-4,9t^2$, chọn chiều dương là chiều hướng từ dưới lên. (*theo Vật lí đại cương, NXB Giáo dục Việt Nam, 2016*)

a) Vận tốc của vật sau 3 giây là $4,6$ (m/s).

b) Vật đạt độ cao lớn nhất bằng $84,3$ mét tại thời điểm $t=4$ (giây).

c) Khoảng thời gian vật ở độ cao trên 10 mét dài hơn 7 (giây).

d) Vận tốc của vật lúc vật chạm đất xấp xỉ $-40,43$ (m/s).

Chương III

PHẦN TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN

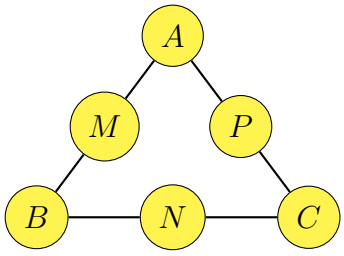
Bài 1. (THPT-2025) Có bốn ngăn (trong một giá để sách) được đánh số thứ tự $1, 2, 3, 4$ và tám quyển sách khác nhau. Bạn An xếp hết tám quyển sách nói trên vào bốn ngăn đó sao cho mỗi ngăn có ít nhất một quyển sách và các quyển sách được xếp thẳng đứng thành một hàng ngang với gáy sách quay ra ngoài ở mỗi ngăn. Khi đã xếp xong tám quyển sách, hai cách xếp của bạn An được gọi là giống nhau nếu chúng thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau đây:

- Với từng ngăn, số lượng quyển sách ở ngăn đó là như nhau trong cả hai cách xếp.
- Với từng ngăn, thứ tự từ trái sang phải của các quyển sách được xếp là như nhau trong cả hai cách xếp.

Gọi T là số cách xếp đôi một khác nhau của bạn An. Giá trị của $\dfrac{T}{400}$ bằng bao nhiêu?

Bài 2. (THPT-2025) Để gây quỹ từ thiện, câu lạc bộ thiện nguyện của một trường THPT tổ chức hoạt động bán hàng với hai mặt hàng là nước chanh và khoai chiên. Câu lạc bộ thiết kế hai thực đơn. Thực đơn 1 có giá 35 nghìn đồng, bao gồm hai cốc nước chanh và một túi khoai chiên. Thực đơn 2 có giá 60 nghìn đồng, bao gồm ba cốc nước chanh và hai túi khoai chiên. Biết rằng câu lạc bộ chỉ làm được không quá 165 cốc nước chanh và 100 túi khoai chiên. Số tiền lớn nhất mà câu lạc bộ có thể nhận được sau khi bán hết hàng bằng bao nhiêu nghìn đồng?

Bài 3. (THPT-2025) Bạn Nam tham gia cuộc thi giải một mật thư. Theo quy tắc của cuộc thi, người chơi cần chọn ra sáu số từ tập $S = \{41; 42; 43; 44; 45; 46; 47; 48; 49\}$ và xếp mỗi số vào đúng một vị trí trong sáu vị trí A, B, C, M, N, P như hình bên sao cho mỗi vị trí chỉ được xếp một số.

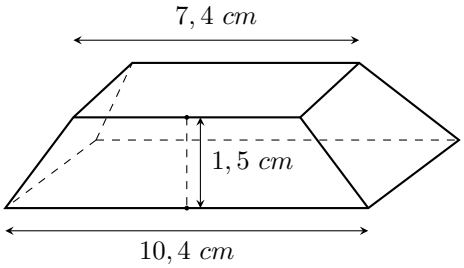


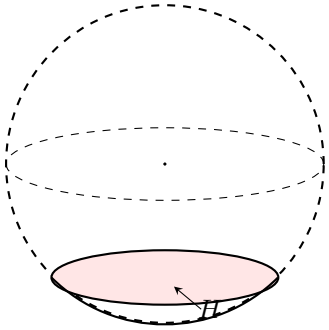
Mật thư sẽ được giải nếu các bộ ba số xuất hiện ở những bộ ba vị trí $(A, M, B); (B, N, C); (C, P, A)$ tạo thành các cấp số cộng theo thứ tự đó. Bạn Nam chọn ngẫu nhiên sáu số trong tập S và xếp ngẫu nhiên vào các vị trí được yêu cầu. Gọi xác suất để bạn Nam giải được mật thư ở lần chọn và xếp đó là a. Giá trị của $\dfrac{4}{a}$ bằng bao nhiêu?

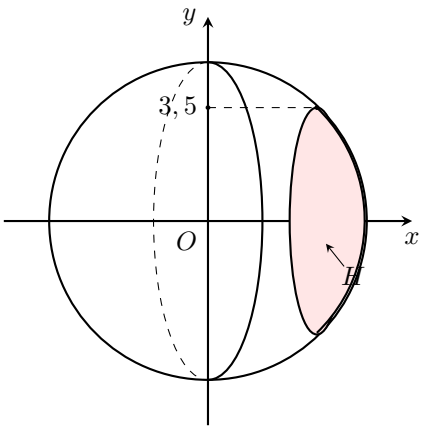
Bài 4. (THPT-2025) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông với $AB = 6$. Biết rằng hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ là trọng tâm H của tam giác ABC và

$SH = 3\sqrt{2}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SD bằng bao nhiêu? (Không làm tròn kết quả các phép tính trung gian, chỉ làm tròn kết quả cuối cùng đến hàng phần trăm)

Bài 5. (THPT-2025) Để đặt được một vật trang trí trên mặt bàn, người ta thiết kế một chân đế như sau: Lấy một khối gỗ có dạng khối chóp cụt tứ giác đều với độ dài hai cạnh đáy lần lượt bằng $7,4$ cm và $10,4$ cm, bề dày của khối gỗ bằng $1,5$ cm. Sau đó khoét bỏ đi một phần của khối gỗ sao cho phần đó có dạng vật thể H, ở đó H nhận được bằng cách cắt khối cầu bán kính $5,5$ cm bởi một mặt phẳng cắt mà mặt cắt là hình tròn bán kính $3,5$ cm (xem hình dưới).







Thể tích của khối chân đế bằng bao nhiêu centimét khối (không làm tròn kết quả các phép tính trung gian, chỉ làm tròn kết quả cuối cùng đến hàng phần mười)?

Bài 6. (THPT-2025) Nếu một doanh nghiệp sản xuất x sản phẩm trong một tháng ($x \in \mathbb{N}^*; 1 \leq x \leq 4500$) thì doanh thu nhận được khi bán hết số sản phẩm là $F(x) = -0,01x^2 + 450x$ (nghìn đồng), trong khi chi phí sản xuất bình quân cho mỗi sản phẩm là $G(x) = \dfrac{30000}{x} + 340$ (nghìn đồng). Giả sử số sản phẩm sản xuất ra luôn được bán hết. Trong một tháng, doanh nghiệp đó cần sản xuất ít nhất bao nhiêu sản phẩm để lợi nhuận thu được lớn hơn 100 triệu đồng?

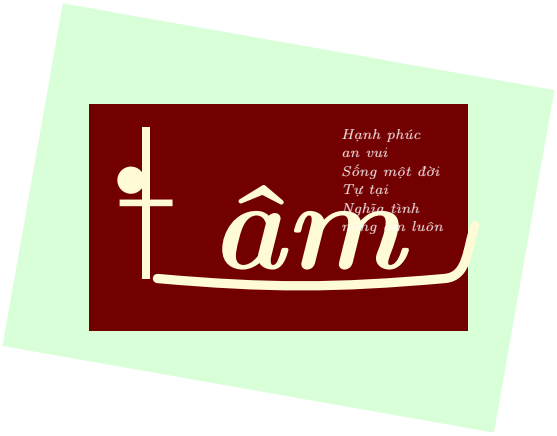
Bài 7. (NK) Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều có cạnh bằng 1 và cạnh bên $AA' = \sqrt{2}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thăng $A'B$ và $B'C$ *(kết quả cuối cùng làm tròn đến hàng phần trăm)*

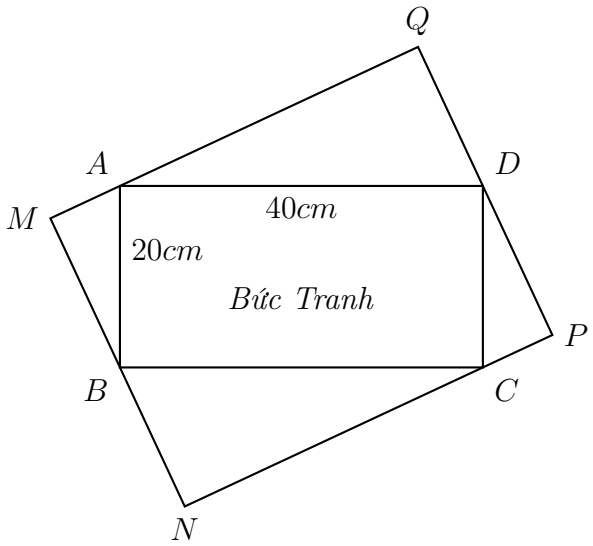
Bài 8. (NK) Một nhà phân phối có thể thuê tối đa 3 chiếc xe tải loại A và 8 chiếc xe tải loại B để vận chuyển 100 chiếc máy giặt từ nhà máy sản xuất đến nơi tiêu thụ. Mỗi xe loại A chở được tối đa 20 máy giặt với giá cước 3 triệu đồng mỗi chuyến, mỗi xe loại B chở được tối đa 10 máy giặt với giá cước 2 triệu đồng mỗi chuyến. Nếu mỗi xe chỉ chở nhiều nhất một chuyến, số tiền cước tối thiểu *(triệu đồng)* mà nhà phân phối phải trả là bao nhiêu?

Bài 9. (NK) Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(-4;-1;2), B(3;5;-6)$ và $C(a;b;c)$. Biết trung điểm cạnh AC thuộc trục tung, trung điểm cạnh BC thuộc mặt phẳng (Oxz). Tính $T = 2a + b - c$.

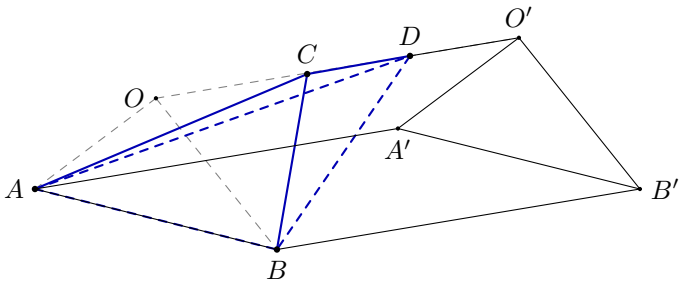
Bài 10. (NK) Bà Bích xin một "chữ Tâm" được sơn son thiếp vàng trong một hình chữ nhật $ABCD$ kích thước $20cm \times 40cm$. Bà treo bức ảnh này trên tường trong phòng khách của Bà. Để tăng điểm nhấn cho bức tranh, Bà trang trí một khung hình cách điệu hình chữ nhật $MNPQ$ sao cho các điểm A, B, C, D lần lượt thuộc các cạnh QM, MN, NP, PQ (xem hình vẽ). Lúc này, Bà cần tính toán phần diện tích chiếm chỗ của hình chữ nhật $MNPQ$ trên tường nhà sao cho cân đối

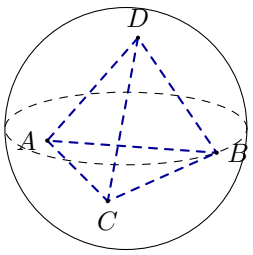
nhất. Hỏi diện tích lớn nhất của hình chữ nhật $MNPQ$ là bao nhiên centimet vuông?





Bài 11. (NK) Ông An có một thanh đá thạch anh màu xanh ngọc dạng hình lăng trụ đứng $OAB.O'A'B'$, trong đó $OA = OB = 2$ dm, $\widehat{AOB} = 120°$, $OO' = 4$ dm. Ông mang thanh thạch anh này đến tiệm chuyên gia công và sản xuất đồ lưu niệm yêu cầu chủ tiệm phân chia thanh đá thành ba phần bởi hai mặt phẳng (CAB) và (DAB) sao cho tam giác CAB vuông, tam giác DAB đều. Sau đó, làm một quả cầu pha lê ngoại tiếp khối thạch anh $ABCD$ (4 điểm A, B, C, D thuộc mặt cầu, xem hình minh họa).



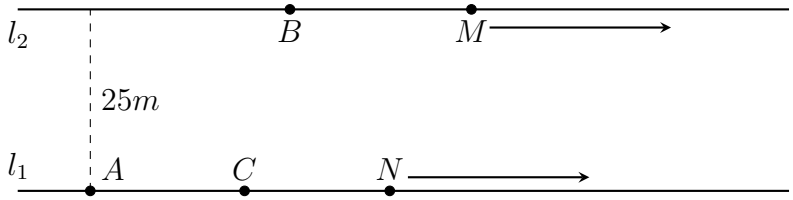


Chủ tiệm định giá tiền hoàn thành món hàng bằng bình phương thể tích khối thạch anh $ABCD$ (dm^3) cộng với bình phương bán kính mặt cầu (dm) ngoại tiếp khối đó rồi nhân với 60 nghìn đồng ($(V_{ABCD}^2 + R^2) \cdot 60000$). Hỏi ông An phải trả bao nhiêu nghìn đồng cho món đồ lưu niệm của mình?

Bài 12. (NK) Một giờ hoạt động ngoài trời của lớp 1/1 trường tiểu học X, cô giáo cho 35 học sinh lớp mình nắm tay nhau xếp thành một vòng tròn để chơi trò chơi "Mèo bắt chuột". Sau khi ổn định, cô gọi tên ngẫu nhiên 6 học sinh trong lớp ra giữa vòng (3 em làm "Mèo", 3 em làm "Chuột"). Xác xuất 6 em được gọi tên không có hai em nào đứng cạnh nhau trong vòng tròn bằng a. Tính $11594a$.

Bài 13. Hai chất điểm M, N chuyển động cùng hướng và xuất phát cùng một thời điểm trên hai đường thẳng l_1 và l_2 song song với nhau (chất điểm M xuất phát từ điểm B, chất điểm N xuất phát từ điểm C như hình vẽ). Khoảng cách giữa hai đường thẳng l_1 và l_2 là 25 mét. Điểm A cố

định trên đường thẳng l_1.



Tại thời điểm t giây ($t \geq 0$, tính từ lúc bắt đầu xuất phát), khoảng cách từ chất các điểm M và N đến A lần lượt là $d_M(t) = 56 + \frac{t}{2}$ (mét) và $d_N(t) = \frac{61t+42}{t+1}$ (mét). Tính khoảng cách (theo đơn vị mét) từ chất điểm M đến A tại thời điểm mà hai chất điểm M và N gần nhau nhất.

Bài 14. Người ta muốn tạo ra một khối pha lê trang trí có dạng hình chóp đều với đáy là tứ giác và có diện tích toàn phần (tổng diện tích của bốn mặt bên và mặt đáy) là $100(cm^2)$. Thể tích tối đa của khối pha lê được tạo ra là bao nhiêu xen-ti-mét khối? (làm tròn kết quả đến hàng phần chục).



Bài 15. Cho đường tròn $(C) : x^2 + y^2 = 4$ và họ ellipse $(E_m) : \frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{4} = 1$, với $m > 2$. Gọi H là vật thể giới hạn bởi $y = \pm 2$, có thiết diện tại y là hình tròn có bán kính $R = \frac{x_2 - x_1}{2}$ nội tiếp hình vuông lớn nhất của nó, với $x_1, x_2 > 0$ là hoành độ dương của (C) và (E_m). Gọi A, B là thể tích lớn nhất và nhỏ nhất của H trên đoạn $[3; 6]$. Giá trị $T = \frac{A+B}{\pi - 2}$ là?

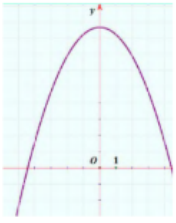
Bài 16. Một tấm kính làm mặt bàn $(H1)$ có hình dáng tam giác đều với 3 đỉnh được làm cong $(H2)$. Biết cạnh tấm tính tam giác ban đầu bằng $12dm$. Để cắt góc bàn được đẹp thì người ta cắt theo đường cong là đường Parabol $(P) : y = -\frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + 3\sqrt{3}$ $(H3)$ có hai nhánh tiếp giáp với hai cạnh của tam giác $(H4)$.



H1



H2



H3



H4

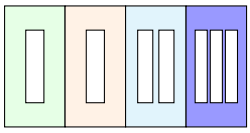
Diện tích mặt kính làm mặt bàn $(H1)$ bằng $S(dm^2)$. Tính S (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

Bài 17. Một chậu nước hình nón cụt với lòng chậu (phần có thể chứa nước) có bán kính đáy $r_1 = 5$ cm, bán kính miệng chậu $r_2 = 8$ cm, chiều cao chậu $h = 15$ cm. Ban đầu nước trong chậu chiếm $\dfrac{2}{3}$ chiều cao của chậu. Sau đó người ta thả vào chậu một quả cầu kim loại thì đo được chiều cao mực nước dâng thêm là $1,5$ cm, quả cầu chìm hoàn toàn trong nước. Tính bán kính quả cầu và làm tròn đến hàng phần trăm của cm.

Bài 18. (Thầy Ái - TDM) Để chuẩn bị tiền mừng tuổi cho tất cả 50 (con số giả sử thôi nhé chứ thật thì đông hơn rất nhiều) em học sinh offline quê hương Thuận Thành nhân dịp tết nguyên đán sắp tới, thầy Ái đã chuẩn bị một số tiền là 5 200 000 đồng để đổi ra thành 60 tờ tiền gồm các mệnh giá 20 nghìn, 50 nghìn, 100 nghìn, 200 nghìn. Biết rằng mỗi mệnh giá đều có số tờ lớn hơn 1 và chia hết cho 10. Sau đó thầy Ái bỏ mỗi tờ vào một phong lì xì nhìn bên ngoài giống như nhau. Biết rằng khi mừng tuổi thì thầy Ái sẽ cho các em học sinh chọn ngẫu nhiên mỗi em 1 phong lì xì. Gọi T là xác suất để thầy Ái còn lại số tiền là 1 800 000 đồng. Hãy tính $10^9 \cdot T$ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

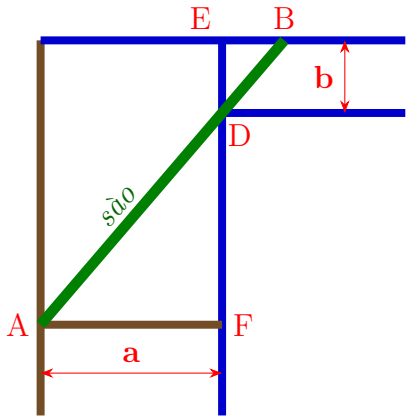
Bài 19. Một đội CSGT đường thủy sử dụng một chiếc ca nô chuyên dụng để tuần tra trên một đoạn sông dài 60 km. Chuyến tuần tra bao gồm đi ngược dòng từ vị trí xuất phát A đến B dài 60 km, sau đó ngay lập tức quay về xuôi dòng từ B về lại A. Lượng xăng tiêu thụ của động cơ (tính bằng lít) được xác định theo công thức: $L = k \cdot v^2 \cdot t$ trong đó k là một hằng số phụ thuộc vào đặc tính của động cơ, v là tốc độ của động cơ (tốc độ của ca nô so với mặt nước) có đơn vị là km/h và t là thời gian động cơ hoạt động tính bằng giờ. Biết rằng vận tốc của dòng nước trên cả đoạn sông là 5 km/h. Để xác định hằng số k thì các kỹ thuật viên đã chạy thử ca nô trong điều kiện mặt nước yên tĩnh. Kết quả cho thấy động cơ tiêu thụ 10 lít xăng mỗi giờ nếu chạy với tốc độ ổn định là 20 km/h. Hỏi để hoàn thành cả chuyến tuần tra với lượng xăng tiêu thụ ít nhất thì người lái ca nô phải cài đặt tốc độ v của ca nô bằng bao nhiêu km/h? (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

Bài 20. Xếp ngẫu nhiên 7 cuốn sách khác nhau, trong đó có một cuốn là sách Toán vào một giá sách có 4 ngăn. Biết rằng sau khi xếp, mỗi ngăn đều có ít nhất một cuốn sách. Gọi A là biến cố "trong 4 ngăn sách, có đúng một ngăn chứa số lượng sách nhiều hơn hẳn các ngăn còn lại" và B là biến cố "cuốn sách Toán học nằm ở ngăn có nhiều sách nhất đó". Tính $P(B|A)$ (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

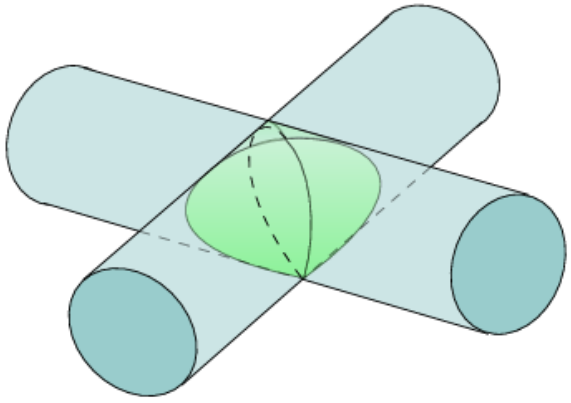


Bài 21. Để chặn đường hành lang hình chữ L, người ta dùng một que sào thẳng dài đặt kín những điểm chạm với hành lang (như hình vẽ). Biết $a = 24$ và $b = 3$. Biết chiều dài tối thiểu của

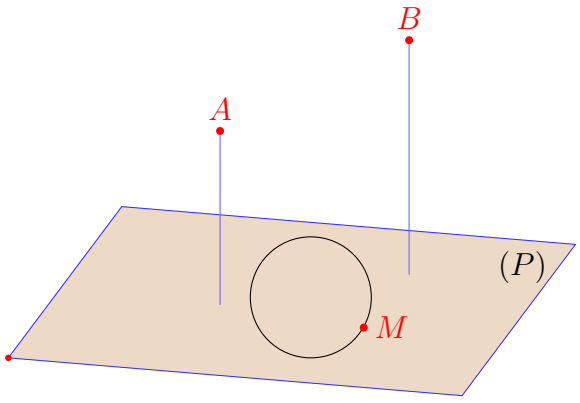
que sào thỏa mãn điều kiện trên là l. Tính giá trị của l^2.



Bài 22. Cho hai khối trụ có bán kính đáy bằng 3 và có trục là hai đường thẳng cắt nhau và vuông góc với nhau (xem hình vẽ). Gọi (H) là phần giao nhau của hai khối trụ đó. Tính thể tích của (H).



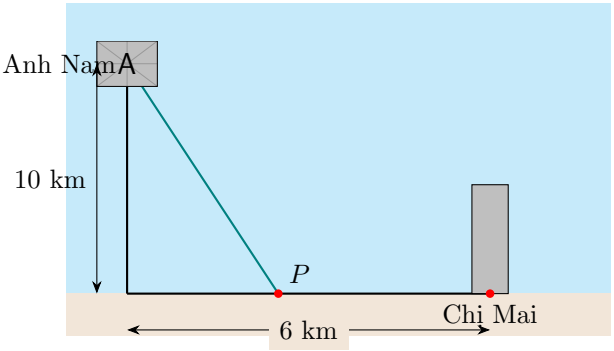
Bài 23. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$ (đơn vị độ dài trên mỗi trục tính là mét), một vườn hoa nằm trên mặt phẳng $(P): 2x+2y-z-12=0$. Có hai bóng đèn chiếu sáng cố định được đặt tại các điểm $A(40;-40;12)$, $B(-40;50;38)$. Để đảm bảo kỹ thuật chiếu sáng, các kỹ sư muốn thiết kế trên mặt vườn một đường ray để lắp đặt một đèn chiếu sáng M di động trên đường ray ấy. Yêu cầu kỹ thuật đặt ra là góc tạo bởi MA với mặt vườn và góc tạo bởi MB với mặt vườn phải luôn bằng nhau. Độ dài đường ray là bao nhiêu mét (*kết quả làm tròn đến hàng đơn vị*)?



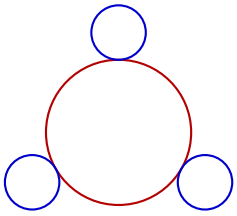
Bài 24. Trong dịp tết Nam và Minh chơi trò ba cây bằng bộ bài lơ khơ gồm 36 lá (mỗi người nhận được 3 lá bài trong đó không có các quân 10, J, Q, K sau đó cộng điểm trên 3 quân bài lại người nào lớn điểm hơn sẽ thắng, trong trường hợp 2 người bằng điểm thì sẽ xét chất trên các lá

bài theo thứ tự từ lớn đến bé Rô, cơ, bích, tép). Người nào thắng sẽ được 3 chiếc kẹo của người còn lại. Hiện tại trong ván bài đầu tiên Nam được 10 điểm với các quân sau 2 tép, 7 rô, Át cơ. Khi đó xác suất Minh có thể thắng trong ván bài trên, chú ý Át rô là quân bài có hiệu lực mạnh nhất bộ bài (các quân Át còn lại đều tính như là số một) có dạng $\frac{a}{b}$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $a+b$.

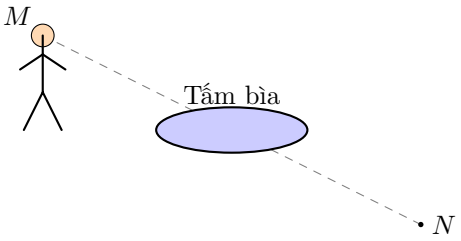
Bài 25. Anh Nam làm việc tại một giàn khoan cách bờ biển 10 km. Chị Mai, bạn thân của anh Nam, làm việc tại một cơ quan trên bờ biển cách nơi làm việc của anh Nam 6 km theo phương ngang. Thứ Bảy tuần sau anh Nam được nghỉ phép nên hai người dự định gặp nhau tại một địa điểm P trên bờ biển. Biết rằng anh Nam sẽ di chuyển vào bờ biển bằng thuyền với vận tốc 15 km/h, chị Mai đi bộ với vận tốc 5 km/h và hai người dự định cùng xuất phát rồi đến nơi cùng lúc. Giả thiết đường bờ biển là đường thẳng và thuyền chở anh Nam cũng di chuyển theo đường thẳng. Hỏi địa điểm họ dự định gặp nhau cách cơ quan của chị Mai bao nhiêu kilômét? (Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



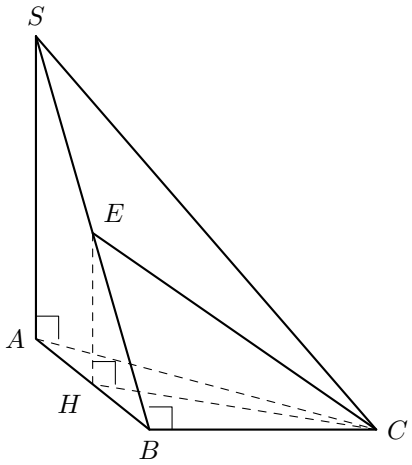
Bài 26. Cho tập $X=\{1,2,3,\ldots,12\}$. Chọn ngẫu nhiên 4 số phân biệt từ tập X rồi đặt 1 số vào vòng tròn lớn ở chính giữa, đặt 3 số còn lại vào ba vòng tròn nhỏ xung quanh (ba vòng tròn nhỏ không phân biệt vị trí). Gọi P là xác suất để tổng các số tự nhiên trên hai vòng tròn nhỏ bất kì luôn nhỏ hơn số ở vòng tròn lớn chính giữa đồng thời tổng cả ba số trên ba vòng tròn nhỏ luôn lớn hơn số ở vòng tròn lớn. Tính giá trị của $1980P$.



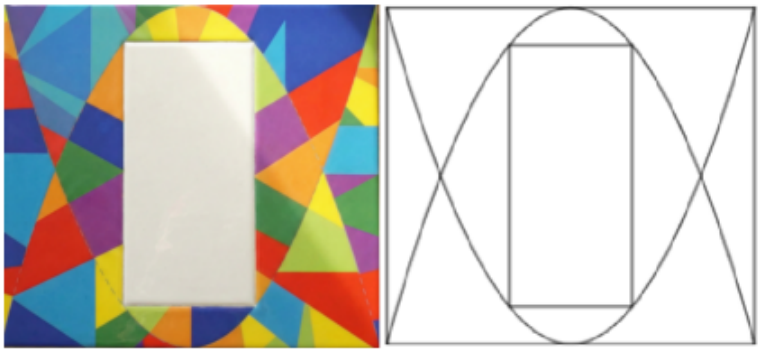
Bài 27. Trong không gian $Oxyz$, mắt một người quan sát đặt tại điểm $M(1;2;3)$ và vật cần quan sát đặt tại điểm $N(3;6;-12)$. Một tấm bìa cứng có dạng hình tròn có tâm tại $K\left(\frac{14}{5};0;0\right)$ và bán kính $R=2$ thuộc mặt phẳng (Oxy) bắt đầu xuất phát thẳng theo hướng vectơ $\vec{j}=(0;1;0)$ với tốc độ không đổi $v=5$ (cm/s). Tính khoảng thời gian mà trong quá trình di chuyển tấm bìa đã che khuất tầm nhìn của người quan sát. Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm (lấy đơn vị trên mỗi trục tọa độ là 1 cm).



Bài 28. Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại $B, BC = 3, SA \perp (ABC)$ và $SB = 6$. Gọi E là trung điểm của cạnh SB. Biết góc giữa hai đường thẳng SA và CE bằng $60°$. Tính thể tích của khối chóp đã cho.



Bài 29. Một cơ sở sản xuất dự định làm các viên gạch men hình vuông cạnh 60 cm. Bề mặt viên gạch được trang trí bởi một họa tiết hình chữ nhật màu trắng có tâm trùng với tâm viên gạch. Các đỉnh của hình chữ nhật này nằm trên hai đường parabol đối xứng nhau qua tâm viên gạch. Biết rằng mỗi đường parabol có đỉnh tại trung điểm một cạnh của viên gạch và đi qua hai đầu mút của cạnh đối diện (như hình vẽ mô phỏng). Cho biết chi phí nguyên liệu phần men trắng là 80 nghìn đồng/m^2, còn phần men màu bao quanh là 200 nghìn đồng/m^2. Hỏi chi phí nguyên liệu thấp nhất để sản xuất một viên gạch là bao nhiêu nghìn đồng? (Kết quả làm tròn đến hàng phần mười).



Bài 30. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng $2\sqrt{3}$, cạnh bên $AA' = 3$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của $BC, B'C'$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và CN.

Bài 31. Xét một bảng ô vuông kích thước 3×3. Mỗi ô được điền ngẫu nhiên và độc lập một giá trị từ tập $\{-1; 0; 1\}$. Biết rằng tổng các số trên mỗi hàng đều bằng 0, gọi p là xác suất để tổng các số trên mỗi cột cũng đều bằng 0. Tính giá trị của $3430p$.

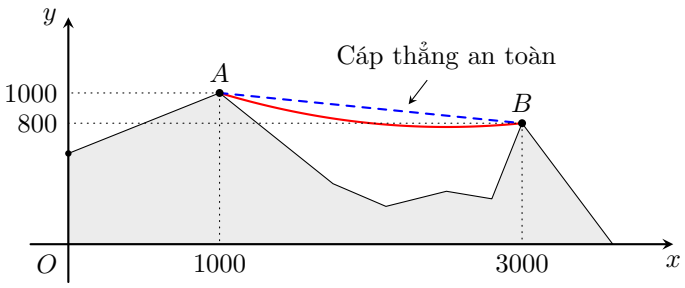
Bài 32. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 4 \end{cases}$ và điểm $A(0; 6; 4)$. Gọi (P) là mặt phẳng thay đổi luôn chứa đường thẳng d. Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm A lên mặt phẳng (P). Tính khoảng cách lớn nhất từ gốc tọa độ O đến điểm H.

Bài 33. Xét các cấp số cộng (a_n) có số hạng đầu tiên a_1 và công sai d đều là các số nguyên

dương và thỏa mãn $2^{a_8} = 2^{27}a_8$. Tìm giá trị nhỏ nhất của a_3.

Bài 34. Tiến hành xếp 3 cô gái $(G_1; G_2; G_3)$ và 6 chàng trai vào 9 chiếc ghế hàng ngang sao cho ba cô gái ngồi theo đúng thứ tự $G_1; G_2; G_3$ từ trái sang phải (không nhất thiết phải ngồi kề nhau). Giữa cô gái thứ nhất (G_1) và cô gái thứ hai (G_2) có ít nhất một chàng trai, giữa cô gái thứ hai (G_2) và cô gái thứ ba (G_3) có tối đa hai chàng trai. Gọi T là số cách xếp thỏa mãn. Tính $\dfrac{T}{80}$.

Bài 35. Hình vẽ dưới đây mô tả mặt cắt ngang của một khu du lịch sinh thái kết nối hai đỉnh núi tại A và B bằng một cầu treo có hình dạng là một đường cong parabol. Trong hệ trục Oxy, trục Ox biểu thị khoảng cách theo phương ngang, Oy biểu thị độ cao so với mực nước biển. Khoảng cách theo phương ngang giữa hai ngọn núi A và B bằng 2000 m và chiều cao ngọn núi tại B là 800 m so với mực nước biển. Biết rằng, đỉnh núi tại A có độ cao là 1000 m so với mực nước biển, cách Oy một khoảng 1000 m và độ dốc lớn nhất của cầu treo tại đó có độ lớn bằng $0,3$. Để đảm bảo an toàn, người ta lắp đặt thêm một sợi cáp an toàn căng thẳng nối trực tiếp hai đỉnh A và B. Xác định khoảng cách lớn nhất giữa cáp an toàn và cầu treo theo phương thẳng đứng theo đơn vị mét?



Bài 36. Phần trắc nghiệm đúng sai của đề thi THPT Quốc Gia gồm có 04 câu hỏi. Mỗi câu hỏi sẽ gồm 04 ý trắc nghiệm đúng sai a), b), c), d) và mỗi ý chỉ gồm hai lựa chọn là **đúng** hoặc **sai**. Quy tắc tính điểm của một câu hỏi đúng sai này như sau:

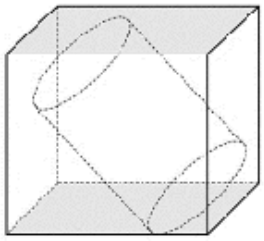
- Đúng 01 ý trong 04 ý được $0,1$ điểm.
- Đúng 02 ý trong 04 ý được $0,25$ điểm.
- Đúng 03 ý trong 04 ý được $0,5$ điểm.
- Đúng cả 04 ý được 1 điểm.
- Không đúng ý nào trong cả 04 ý thì không được điểm.

Một học sinh khoanh bừa ngẫu nhiên tất cả các ý của 4 câu hỏi. Biết rằng kết quả cuối cùng học sinh này đạt được tổng điểm là $2,5$ điểm. Tính xác suất để trong 4 câu hỏi đó có đúng 2 câu học sinh trả lời đúng hoàn toàn (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Bài 37. Trong câu chuyện "Ăn khế trả vàng", người anh sau khi dụ được người em chuyển nhượng lại mái nhà tranh nghèo cùng cây khế đã được gặp con chim khổng lồ như những gì người em kể lại. Chim khổng lồ ăn khế xong liền cam kết trả vàng cho người anh như sau:

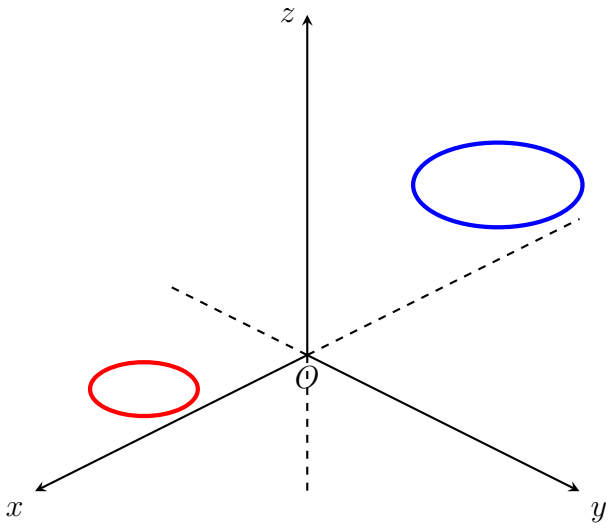
- Chim sẽ đưa người anh đến hòn đảo nhỏ có nhiều vàng bạc đá quý.
- Người anh phải tự thiết kế một vật đựng hình trụ tròn có thể đặt vừa trong một chiếc rương hình lập phương cạnh bằng 60 cm (bỏ qua độ dày của chiếc rương và vật đựng).



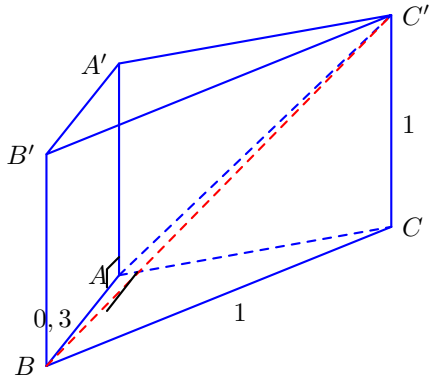


Vốn tham lam, người anh cho rằng cần tạo ra một vật đựng hình trụ có trục nằm dọc theo đường chéo lớn của hình lập phương (chiếc rương) thì sẽ có sức chứa lớn hơn cả. Anh ta làm theo hướng này nên đã tạo ra vật đựng hình trụ có thể tích lớn nhất V_1; tuy nhiên trong thực tế vật đựng có thể tích lớn nhất như chim yêu cầu là V_2 lớn hơn V_1. Tính mức độ chênh lệch thể tích $V_2 - V_1$ trong hai khối trụ này theo đơn vị lít (làm tròn đến hàng đơn vị).

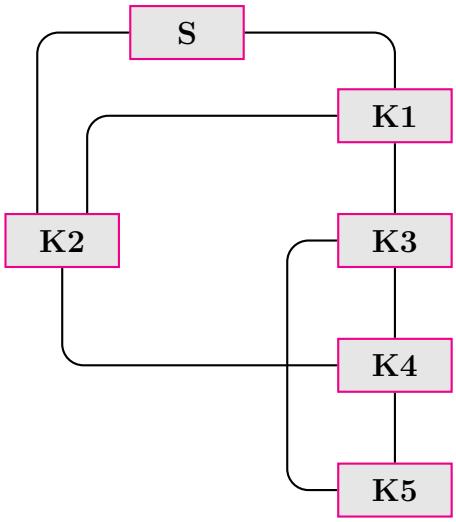
Bài 38. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai viên bi xanh và đỏ ban đầu dạng hai mặt cầu lần lượt có phương trình là $(S_{\text{đỏ}}) : (x-10)^2+y^2+(z-3)^2 = 9$ và $(S_{\text{xanh}}) : (x+12)^2+y^2+(z-4)^2 = 16$. Biết mặt đất trùng với mặt phẳng Oxy và hai mặt cầu này tiếp xúc với mặt phẳng Oxy với điểm tiếp xúc nằm trên trục Ox. Truyền cho hai viên bi đỏ và xanh lần lượt các tốc độ không đổi $v_{\text{đỏ}} = 5$ (m/s) và $v_{\text{xanh}} = 3$ (m/s) thì hai viên bi lăn thẳng về phía nhau dọc theo trục Ox (điểm tiếp xúc luôn nằm trên Ox). Sau khoảng thời gian bằng bao nhiêu giây thì hai viên bi va chạm lần đầu tiên (Đơn vị trên hệ trục tọa độ là mét và kết quả làm tròn đến hàng phần chục).



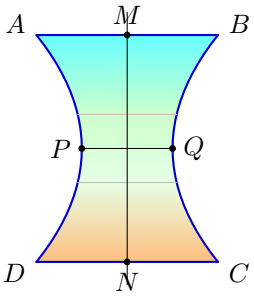
Bài 39. Một tấm cầu dốc kê bậc thềm làm bằng kim loại như hình vẽ. Biết chiều cao tối đa của cầu dốc là 0,3 m và bề mặt cầu là hình vuông có cạnh bằng 1 m. Hãy tính góc hợp bởi đường chéo bề mặt cầu dốc với mặt sàn nhà theo đơn vị độ (làm tròn kết quả đến hàng phần chục).



Bài 40. Một máy bay không người lái (drone) được dùng để phun thuốc diệt côn trùng trên các khu vực cánh đồng được kết nối với nhau. Mỗi khu vực là một đỉnh và các lối đi giữa các khu vực là các cạnh. Drone cần bay qua tất cả các lối đi để phun thuốc đều khắp, bắt đầu và kết thúc tại điểm sạc. Trên hình vẽ mô tả, drone bắt đầu tại điểm sạc S đi đến các khu vực được kí hiệu $K1, K2, K3, K4, K5$. Có bao nhiêu lộ trình để drone bay qua tất cả các lối đi đúng một lần và quay về điểm sạc S?



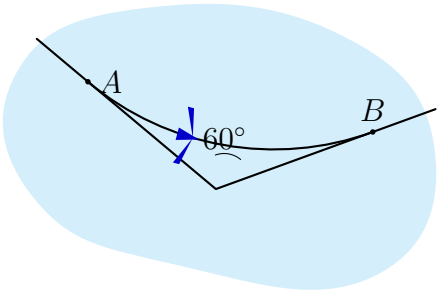
Bài 41. Một mô hình khối tròn xoay có trục là đường thẳng MN, khi ta cắt khối tròn xoay đó bởi một mặt phẳng đi qua trục của khối tròn xoay thì ta được mặt cắt có dạng như hình vẽ dưới đây.

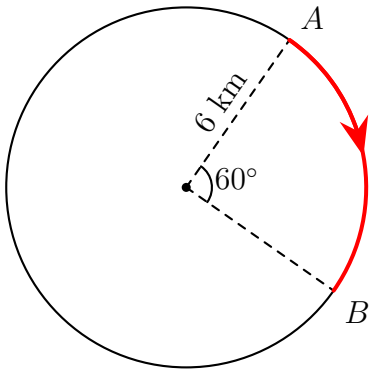


Biết $MN = 20$ cm, $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = 16$ cm, $AD = 32$ cm, hai cung APD và BQC là một phần của các đường parabol với đỉnh lần lượt là P, Q và $PQ = 8$ cm. Tính thể tích của mô hình đó theo đơn vị cm^3. (*Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị*)

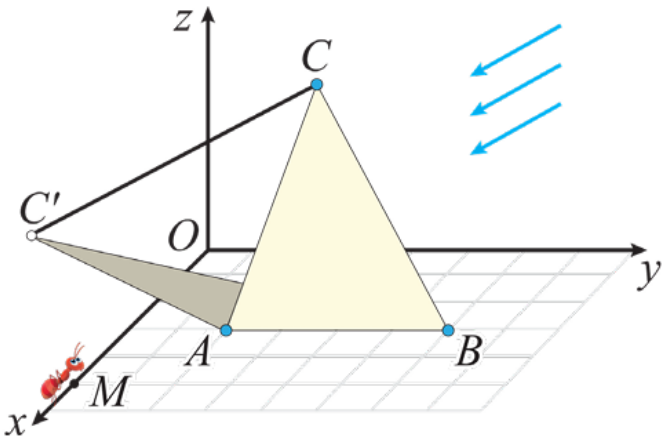
Bài 42. Một máy bay di chuyển từ điểm A đến điểm B theo quỹ đạo là một cung tròn AB bán kính 6 kilomet với góc chắn cung $\widehat{AOB} = 60^\circ$ (tham khảo như hình vẽ). Biết rằng gia tốc của máy bay được xác định bởi công thức $a(t) = -0,5$ (m/s^2) với t tính bằng giây, $t = 0$ ứng với thời điểm máy bay ở vị trí A. Ở vị trí A vật có vận tốc bằng 120 m/s, khi đó vận tốc của vật tại vị trí B

bằng bao nhiêu m/s (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?





Bài 43. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, đơn vị mỗi trục là mét, mặt đất là mặt Oxy, trục Oz hướng lên, có một bức tường mỏng được giới hạn bởi miền tam giác ABC trong đó $A(3;2;0)$, $B(3;6;0)$ và $C(2;3;4)$. Ánh sáng mặt trời chiếu theo vectơ $\vec{u}(-1;-3;-1)$ tạo thành một cái bóng mát trên mặt đất (quan sát hình vẽ). Một con kiến bò từ điểm $M(5;0;0)$ thẳng dọc theo trục Ox đến gốc tọa độ O với vận tốc 3 cm/s để về tổ của mình, tính thời gian con kiến đi trong bóng mát (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị của giây).

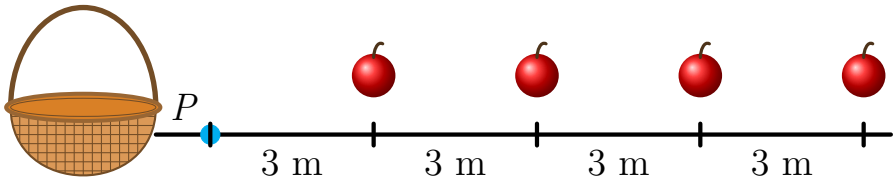


Bài 44. Hai thí sinh A và B cùng tham gia một cuộc thi vấn đáp. Cán bộ coi thi đưa cho mỗi thí sinh một bộ câu hỏi gồm 10 câu hỏi khác nhau, được đựng trong 10 phong bì dán kín, có hình thức giống hệt nhau, mỗi phong bì đựng 1 câu hỏi; thí sinh chọn 3 phong bì để xác định câu hỏi của mình. Biết rằng bộ 10 câu hỏi của các thí sinh là như nhau. Hai phong bì được gọi là giống nhau nếu chứa cùng một câu hỏi. Xác suất để 3 phong bì A chọn và 3 phong bì B chọn có ít nhất hai phong bì giống nhau là $\dfrac{a}{b}$ (trong đó $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản và $a, b \in \mathbb{N}$). Tính a^2+b^2.

Bài 45. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O cạnh 1, hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên mặt phẳng đáy trùng với trọng tâm H của tam giác đều ABC, biết số đo góc nhị diện $[S,CD,B]$ bằng $60°$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BD (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Bài 46. (Moon-2026) Trong một trò chơi, một cậu bé bắt đầu từ điểm P và chạy đi lấy một quả táo cách đó 3 mét. Sau đó, cậu bé chạy trở lại điểm P và đặt quả táo vào rổ. Tiếp tục như vậy, cậu bé chạy đi lấy quả táo thứ hai cách điểm P là 6 mét, rồi lại chạy về điểm P để đặt quả

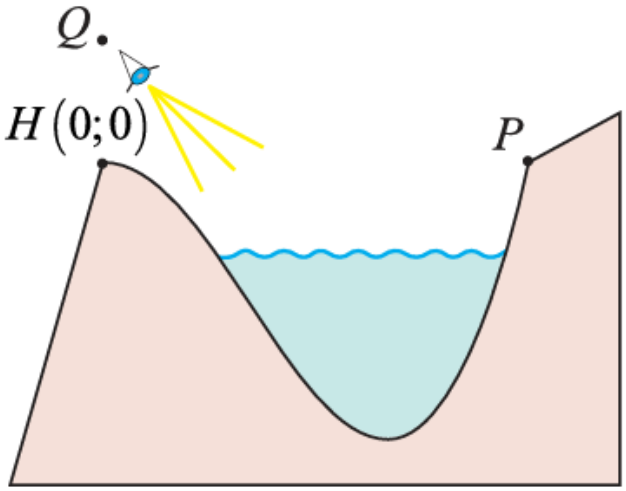
táo vào rổ như hình vẽ.



Quá trình này tiếp tục cho đến khi tất cả các quả táo đều được đặt vào rổ. Sau đúng 3 phút cậu bé lấy được 9 quả táo đặt vào rổ. Vậy vận tốc chạy trung bình của cậu bé là bao nhiêu mét/giây?

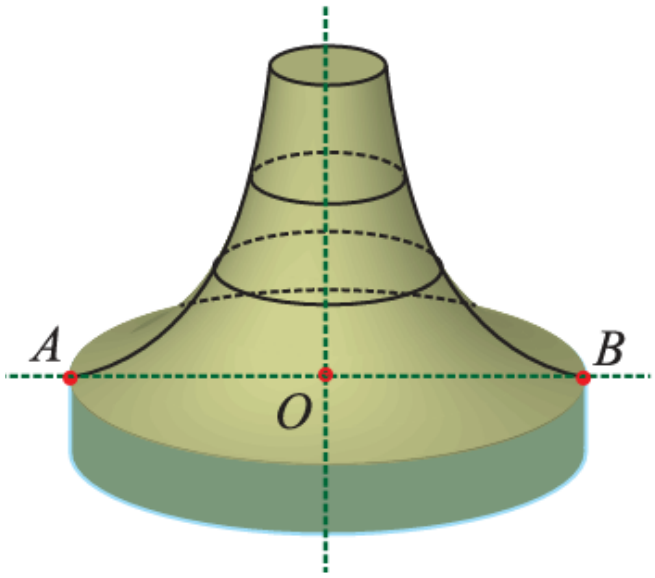
Bài 47. Hai thí sinh A và B cùng tham gia một cuộc thi vấn đáp. Cán bộ coi thi đưa cho mỗi thí sinh một bộ câu hỏi gồm 10 câu hỏi khác nhau, được đựng trong 10 phong bì dán kín, có hình thức giống hệt nhau, mỗi phong bì đựng 1 câu hỏi; thí sinh chọn 3 phong bì để xác định câu hỏi của mình. Biết rằng bộ 10 câu hỏi của các thí sinh là như nhau. Hai phong bì được gọi là giống nhau nếu chứa cùng một câu hỏi. Xác suất để 3 phong bì A chọn và 3 phong bì B chọn có ít nhất hai phong bì giống nhau là $\dfrac{a}{b}$ (trong đó $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản và $a, b \in \mathbb{N}$). Tính $a^2 + b^2$.

Bài 48. Một hồ nước được hình thành giữa một lớp đất đá, hồ có độ sâu lớn nhất bằng 6 mét và chiều dài lớn nhất theo phương ngang là 9 mét. Trên hệ toạ độ Oxy, đơn vị trên mỗi trục tính bằng mét, đường ranh giới giữa hồ nước và lớp đất được mô hình hoá qua hàm số $f(x) = ax^3 - bx^2$ $(a, b \in \mathbb{R})$, trong đó hai bên bờ là điểm $H(0;0)$ và $P(9;0)$ (tham khảo như hình vẽ). Các nhà khoa học cần đặt một camera tại điểm $Q(0;h)$ để ghi lại hình ảnh của hồ nước. Nhà khoa học cần đặt vị trí camera cách điểm H một khoảng tối thiểu bằng bao nhiêu mét để có thể ghi lại hình ảnh toàn bộ hồ nước khi cạn?

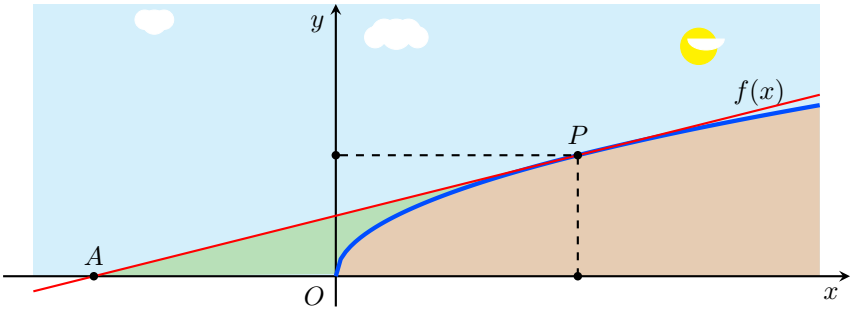


Bài 49. Một công ty công nghệ sản xuất một loại sản phẩm mới. Công ty xác định rằng lợi nhuận $L(x)$ (đơn vị: triệu VNĐ) thu được từ việc sản xuất và bán hàng được mô hình hóa bởi hàm số: $L(x) = 1500 + 400 \ln\left(\frac{x}{1200}\right) - x$. Trong đó, x là số sản phẩm tồn kho, với $x \in \mathbb{N}$ và $1 \leq x \leq 1200$. Công ty cần tính toán lượng tồn kho để thu về lợi nhuận tối đa, hỏi lợi nhuận tối đa đó là bao nhiêu triệu đồng (*kết quả làm tròn đến hàng đơn vị*).

Bài 50. Một chiếc lều xiếc khối tròn xoay có hình dạng như hình bên. Lều gồm có hai phần, phần hình trụ ở dưới có đường kính đáy bằng 20 mét, chiều cao bằng 3 mét, phần trên là một khối tròn xoay khác tiếp giáp với phần hình trụ có chiều cao là 10 mét, trên đỉnh là lỗ tròn có đường kính 4 mét để lấy ánh sáng. Trong hệ tọa độ Oxy, đường cong biên của mái lều được mô hình hóa bằng một parabol đỉnh B (tham khảo hình vẽ). Tính thể tích của chiếc lều theo đơn vị mét khối (*làm tròn kết quả đến hàng đơn vị*).

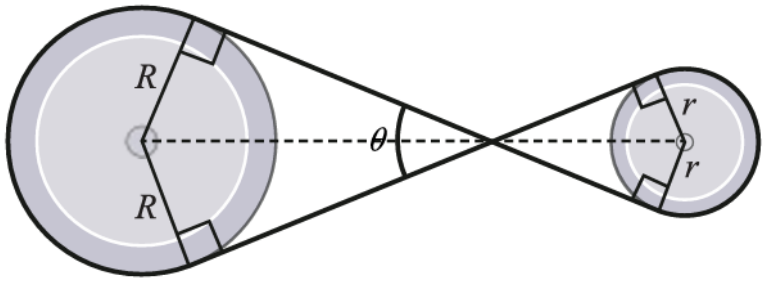


Bài 51. Trong hệ trục toạ độ Oxy, đơn vị mỗi trục là 10 mét, đường cong của một con dốc được mô hình hoá bằng đồ thị hàm số $f(x) = \sqrt{x}$. Người ta thiết kế một con đường thẳng tiếp xúc với đồ thị hàm số tại điểm P và cắt trục Ox tại điểm A (như hình vẽ). Biết rằng đoạn đường AP có độ dài bằng 80 mét. Hỏi điểm P cách mặt đất bao nhiêu mét (coi rằng trục Ox nằm trên mặt đất) (*viết kết quả làm tròn đến hàng phần mười của mét*)?

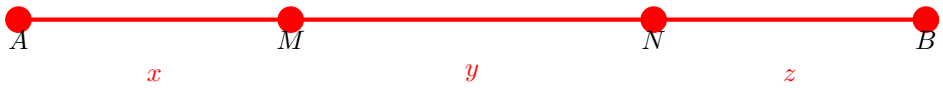


Bài 52. Trong hệ toạ độ $Oxyz$, đơn vị trên mỗi trục tính bằng kilomet, sân bay nằm trên mặt phẳng (Oxy). Tại thời điểm ban đầu, máy bay X bay thẳng từ điểm $A(-8;3;2)$ với tốc độ 360 km/h, máy bay Y bay từ điểm C theo hướng $\vec{v}_1 = (-2;2;-1)$. Sau t giờ, máy bay X bay đến điểm $B(-4;-1;4)$ còn máy bay Y bay đến điểm $D(10;-10;5)$. Khi đến D, máy bay Y được tháp kiểm soát yêu cầu bay tiếp theo hướng $\vec{v}_2(-5;4;-1)$ và phải hạ cánh sau đúng 10 phút. Tính tốc độ trung bình của máy bay Y từ thời điểm ban đầu cho đến khi tiếp đất theo đơn vị km/h (*làm tròn kết quả đến hàng đơn vị*).

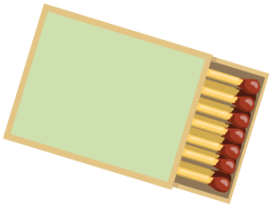
Bài 53. Một dây curoa mỏng dài L bao quanh hai ròng rọc có bán kính R và r vắt chéo nhau theo một góc θ (xem hình vẽ). Giả sử $R = 74$ cm; $r = 37$ cm và góc $\theta = 60°$. Tính độ dài dây curoa L (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị của cm).



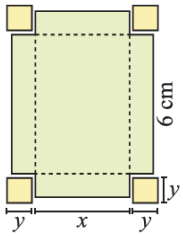
Bài 54. Cho một thanh sắt mỏng AB dài 21 cm. Trên AB lấy hai điểm M, N phân biệt làm mốc sao cho $AM = x$ (cm), $MN = y$ (cm), $NB = z$ (cm) đồng thời x, y, z là các số nguyên dương (tham khảo hình vẽ). Xác suất để khi gập thanh sắt tại hai điểm mốc M, N thì đầu A có thể chạm vào đầu B là $\dfrac{a}{b}$ (với $a, b \in \mathbb{N}$ và phân số $\dfrac{a}{b}$ tối giản). Tính $a + b$.



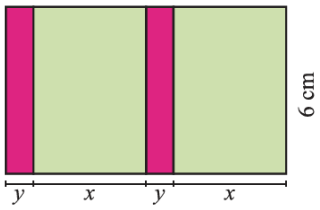
Bài 55. Người ta cần sản xuất một hộp diêm có chiều dài 6 cm và có thể tích 24 cm^3 (hình 1). Chiều rộng x (cm) và chiều cao y (cm) cần được xác định sao cho chi phí sản xuất là nhỏ nhất. Hộp bên trong được làm từ một tấm bìa hình chữ nhật. Ở các góc, các mảnh vuông nhỏ cạnh y bị cắt bỏ và trở thành phế thải. Phần còn lại được gấp thành hộp với kích thước dài 6 cm, rộng x, cao y (hình 2). Vỏ ngoài được làm từ một tấm bìa hình chữ nhật thứ hai (với kích thước như hình 3). Biết rằng chi phí vật liệu cho hai mặt bên của vỏ (được dùng làm phần đánh lửa) được tính gấp ba lần chi phí vật liệu còn lại (tính trên cùng một đơn vị diện tích).



Hình 1



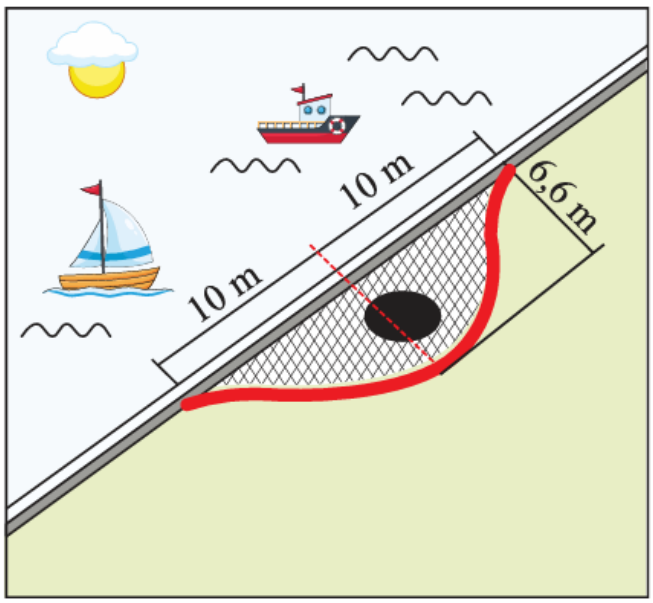
Hình 2



Hình 3

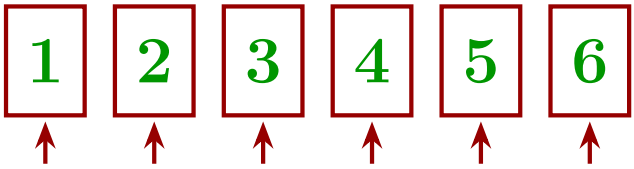
Tìm x (cm) để chi phí làm hộp diêm là bé nhất (*kết quả làm tròn đến hàng phần trăm*).

Bài 56. Một đoạn đường di chuyển từ A đến B dài 20 mét chạy dọc theo bờ sông, do ảnh hưởng của nước lũ nên tuyến đường bị ảnh hưởng không thể đảm bảo để người dân đi lại. Các kỹ sư xây một đoạn đường mới rộng 60 cm thay thế đoạn đường cũ. Trên đoạn đường mới này, điểm có khoảng cách lớn nhất đến bờ sông là 6,6 mét. Trong hệ toạ độ Oxy, đơn vị trên mỗi trục tính bằng mét, trục Ox là đường bờ sông, mép trong đoạn đường (phần gần bờ sông) được mô hình hóa dưới dạng đồ thị hàm số đa thức bậc bốn tiếp xúc với đường bờ sông ở hai đầu A và B (tham khảo hình vẽ). Các kỹ sư sẽ đánh dấu phần ranh giới nằm giữa bờ sông và mép trong tuyến đường mới, sau đó lát lại bằng bê tông. Diện tích phần lát lại bằng bao nhiêu mét vuông?



Bài 57. Một xưởng sản xuất nước mắm, mỗi lít nước mắm loại I cần 3 kg cá và 2 giờ công lao động, đem lại mức lãi là 50 000 đồng; mỗi lít nước mắm loại II cần 2 kg cá và 3 giờ công lao động, đem lại mức lãi là 40 000 đồng. Xưởng có không quá 230 kg cá và thời gian làm việc tối đa 220 giờ. Biết rằng xưởng đó sản xuất a (lít) nước mắm loại I và b (lít) nước mắm loại II thì thu được lợi nhuận lớn nhất. Tính $a+b$.

Bài 58. Có sáu tấm thẻ, mỗi tấm có một số tự nhiên từ 1 đến 6 được viết trên mặt trước và số 0 được viết trên mặt sau. Sáu tấm thẻ này được sắp xếp sao cho với mỗi số tự nhiên $k \leq 6$, vị trí thứ k hiển thị số tự nhiên k (tham khảo hình vẽ).



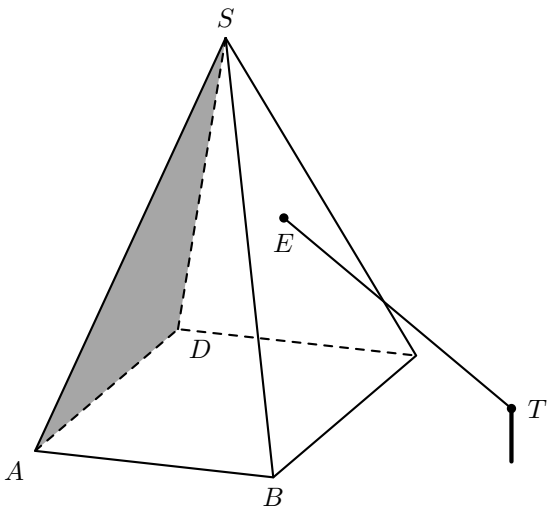
Sử dụng sáu tấm thẻ này và một con xúc xắc, thực hiện các bước sau: Gieo xúc xắc một lần, nếu số chấm xuất hiện ở mặt trên xúc xắc là k, thì ta lật tấm thẻ ở vị trí thứ k một lần và đặt lại vào vị trí ban đầu. Sau khi lặp lại thí nghiệm trên 3 lần, nếu biết tổng các số xuất hiện trên cả 6 thẻ là số chẵn, xác suất để số 1 xuất hiện đúng một lần khi gieo xúc xắc là $\dfrac{a}{b}$ (với a và b là các số nguyên dương và phân số $\dfrac{a}{b}$ tối giản). Tính giá trị của $a+b$.

Bài 59. Ngày nay, để giúp xác định nhanh hàng thật hay giả 1 chiếc đồng hồ Rolex, ta dựa vào tốc độ góc thay đổi giữa các kim của đồng hồ (rad/phút). Chiếc đồng hồ Rolex được thẩm định có kích thước chuẩn (loại cho nam) ở kim giờ và kim phút lần lượt là 10 mm và 15 mm. Biết rằng góc giữa hai kim là hàm $\theta(t)$ với t là số phút thể hiện sau 12 giờ chiều (tức thời điểm hai kim trùng nhau chỉ vào số 12). Xác định thời điểm t đầu tiên mà diện tích tam giác OAB bằng $37,5$ mm^2? (Kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

Bài 60. Một cơ sở sản xuất thiết bị cứu hộ chế tạo một chiếc phao cứu sinh như hình minh họa. Khi đó, theo mặt cắt qua tâm, người ta thấy, bán kính ngoài của phao bằng 35 cm, bán kính trong của phao bằng 25 cm. Phao được làm từ một loại vật liệu đồng chất, có khối lượng riêng bằng $0,05$ g/cm^3 (coi phao là khối đặc, không có khoang rỗng bên trong). Tính khối lượng của chiếc phao (đơn vị kg), biết kết quả làm tròn đến hàng phần trăm, số π nhận giá trị bằng $3,1416$.

Bài 61. Có hai chuồng A và B. Chuồng A ban đầu có 9 con dê trắng và 8 con dê đen. Chuồng B ban đầu có 5 con dê trắng và 6 con dê đen. Các con dê được xem như nhau về kích thước và khả năng bị chọn. Người ta bắt ngẫu nhiên đồng thời 3 con dê từ chuồng A chuyển sang chuồng B. Sau đó, từ chuồng B bắt ngẫu nhiên 2 con dê ra kiểm tra. Biết rằng cả 2 con dê bắt ra đều là dê trắng. Hỏi xác suất để cả 2 con dê trắng đó đều là dê chuyển từ chuồng A sang là bao nhiêu phần trăm? (kết quả làm tròn đến 2 chữ số ở phần thập phân).

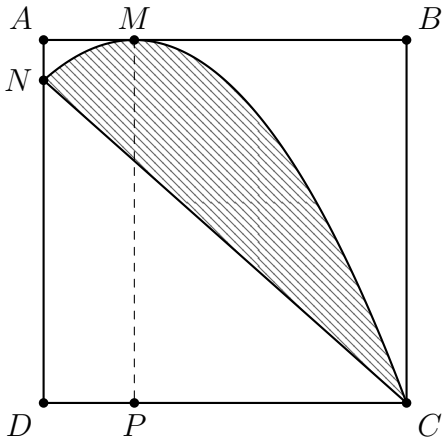
Bài 62. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, mặt đất là mặt phẳng (Oxy), đơn vị trên mỗi trục tính bằng mét, một kim tự tháp có dạng hình chóp $S.ABCD$ với tọa độ các đỉnh là $A(20;4;0)$, $B(20;20;0)$, $C(4;20;0)$, $D(4;4;0)$ và $S(12;12;16)$. Lối vào của tháp nằm tại $E(11;14;12)$. Từ điểm T cách mặt đất 2 mét và cách điểm S một khoảng 8 mét theo hướng của vectơ $\vec{i}(1;0;0)$, một chiếc đèn pha được chiếu rọi vào kim tự tháp, tia sáng có hướng là $\vec{r} = (a-12;-2a-20;4a-2)$ $(a \in \mathbb{R})$. Biết rằng tia sáng chiếu qua lối vào E và đâm xuyên vào kim tự tháp, cắt mặt trong của kim tự tháp tại điểm F. Tính độ dài tia sáng TF (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của mét).



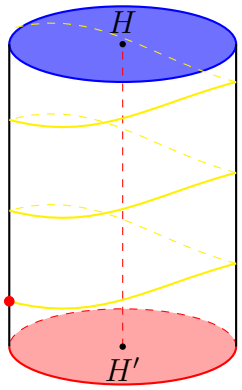
Bài 63. Có tám người ngồi quanh một bàn tròn. Mỗi người được đưa cho một đồng xu cân đối và đồng chất. Cả tám người cùng tung đồng xu của mình, ai tung được mặt ngửa thì đứng dậy, còn ai tung được mặt sấp thì vẫn ngồi yên. Biết rằng xác suất để không có hai người đứng cạnh nhau là $\frac{a}{b}$ ($\frac{a}{b}$ là phân số tối giản, $a, b \in \mathbb{N}^*$). Tính a^2+b.

Bài 64. Ông Duy có một mảnh vườn hình vuông cạnh bằng 8 m. Ông dự định xây một cái bể bơi đặc biệt (phần kẻ sọc trong hình vẽ bên). Biết $AM = \frac{AB}{4}$, phần đường cong đi qua các điểm C, M, N là một phần của đường Parabol có trục đối xứng là MP $(MP//AD)$ và chi phí để làm bể bơi là 5 triệu đồng/1 m^2. Số tiền ông Duy phải trả để xây cái bể bơi đó là bao nhiêu triệu đồng

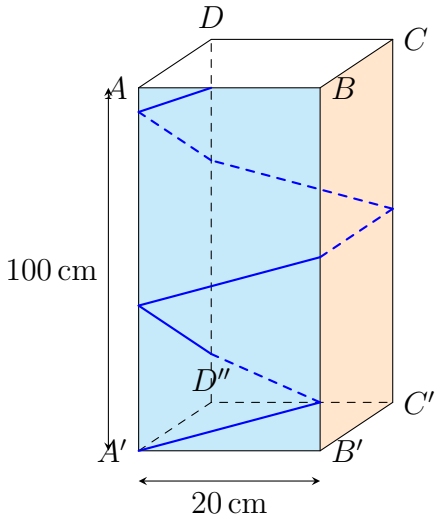
(làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?



Bài 65. Một con kiến bò lên đều quanh hình trụ (từ mặt đáy dưới lên mặt đáy trên), bán kính mặt đáy hình trụ $R = \frac{3}{8\pi}$ và chiều cao hình trụ $h = 4$. Hỏi con kiến bò ngắn nhất bao nhiêu vòng quanh hình trụ để đoạn đường kiến đi là 1 số nguyên.

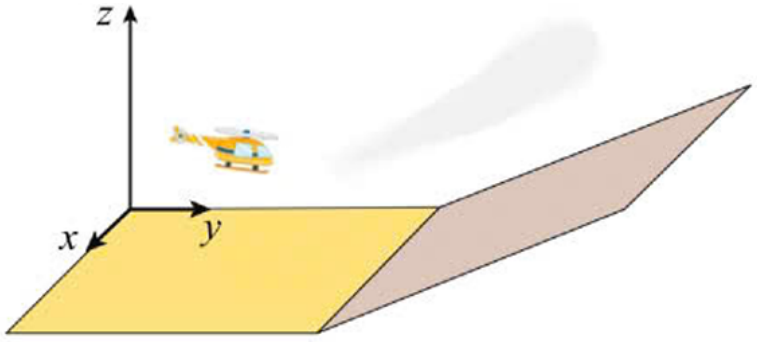


Bài 66. (TDM) Cho toà nhà đồ chơi có dạng hình hộp chữ nhật với đáy là hình vuông cạnh bằng 20 cm và chiều cao bằng 100 cm. Một con kiến bắt đầu từ A' di chuyển đến điểm A theo cách sẽ bám sát vào các mặt xung quanh của toà nhà luôn theo hướng chếch lên tạo với phương ngang một góc $\alpha \in (16°; 33°)$. Biết con kiến luôn di chuyển với tốc độ bằng $\frac{3}{5\tan\alpha}$ cm/s. Hãy tính theo phút khoảng thời gian nhỏ nhất để con kiến bò đến điểm A (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm) ?



Bài 67. Trong hệ toạ độ $Oxyz$, đơn vị trên mỗi trục tính bằng kilomet, mặt đất trùng với mặt

phẳng (Oxy), một máy bay trực thăng đang bay trong điều kiện tầm nhìn kém về phía một khối núi có sườn dốc lên, mặt sườn là mặt phẳng đi qua các điểm $P(0;5;0)$, $Q(5;10;2)$ và $R(10;10;2)$. Máy bay trực thăng bay thẳng từ điểm $A(1;6;1)$ đến điểm $B(2;7;1)$, nếu duy trì hướng bay máy bay sẽ va chạm với mặt sườn. Để tránh tai nạn, tại điểm B, phi công chuyển sang một hướng khác tăng độ cao, song song với sườn núi và mặt phẳng $x+2y-z=0$. Tại vị trí máy bay đạt độ cao 2 kilomet so với mặt đất, máy bay đã bay quãng đường bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của mét)?

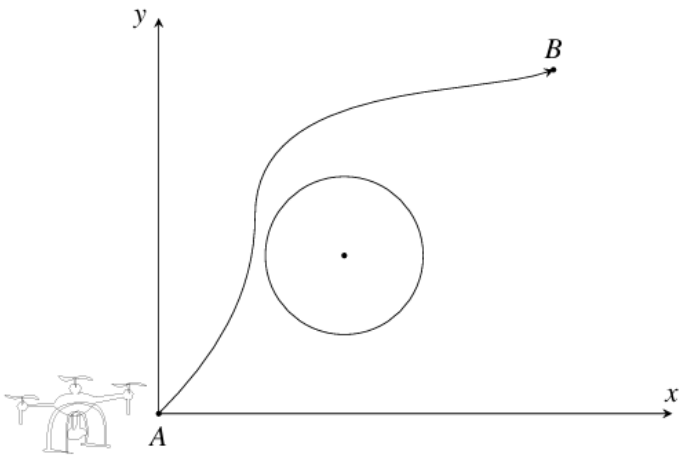


Bài 68. Trên hệ trục tọa độ Oxy (đơn vị km), một chiếc drone cứu hộ được điều khiển từ điểm $A(0;0)$ để vận chuyển thuốc cứu trợ đến điểm $B(12;10)$. Trên đường bay, drone phải tránh một khu vực cấm bay, đó là hình tròn có tâm $C(6;6)$ với bán kính 5 đơn vị. Drone có thể chạm vào biên của khu vực cấm bay nhưng không được bay vào bên trong.

Các chế độ di chuyển của drone để tối ưu chi phí nhiên liệu:

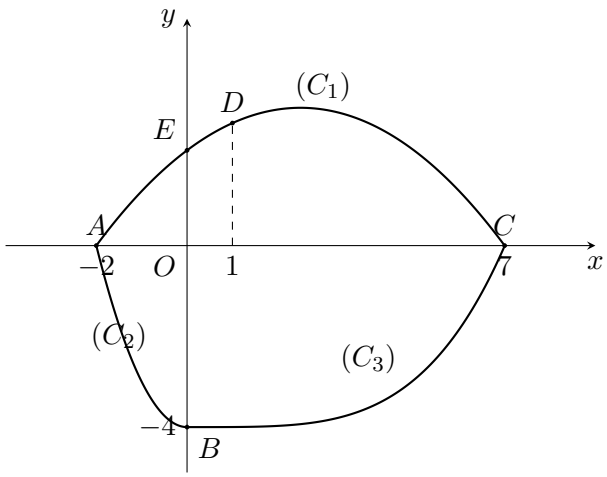
- Chế độ tự động: Chiếc drone sẽ bay theo đường thẳng nhưng phải đổi hướng khi gặp vùng cấm bay. Chế độ này có chi phí nhiên liệu là 1 USD mỗi km.
- Chế độ điều khiển tay: Chiếc drone sẽ bay trên biên của vùng cấm, tức là bay theo một phần cung tròn. Chế độ này có chi phí nhiên liệu cao hơn, 1,5 USD mỗi km.

Tính tổng chi phí nhiên liệu tối ưu nhất cho 2 chế độ bay của chiếc drone cứu hộ (làm tròn đến hàng đơn vị, lưu ý tính tổng chi phí nhiên liệu tối ưu khi tổng quãng đường chiếc drone bay là tối ưu nhất).



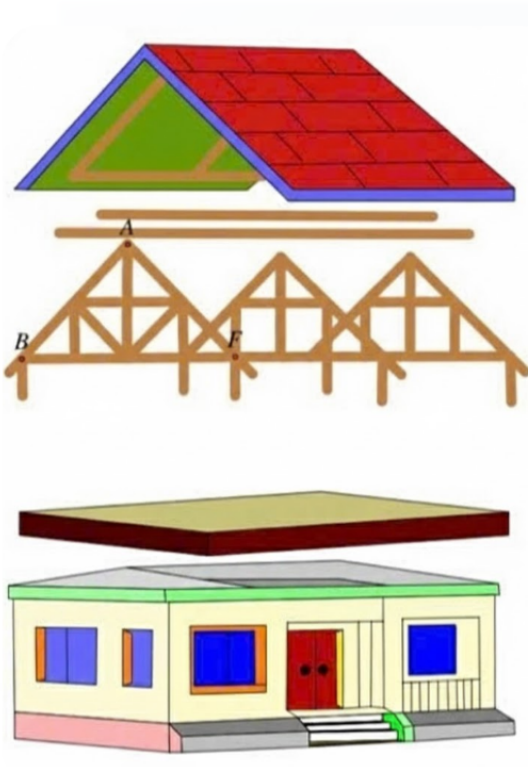
Bài 69. Một công ty thiết kế tròng kính sao cho mỗi phần đường viền của tròng kính là một phần đồ thị của hàm số bậc hai hoặc một phần đồ thị của hàm số bậc bốn rồi ghép chúng lại với

nhau như hình vẽ bên cạnh (sau đó họ sẽ điều chỉnh theo tỷ lệ phù hợp). Xét hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ bên dưới, biết rằng $A(-2;0), B(0;-4), C(7;0)$ và $D(1;k)$ với $k>0$.



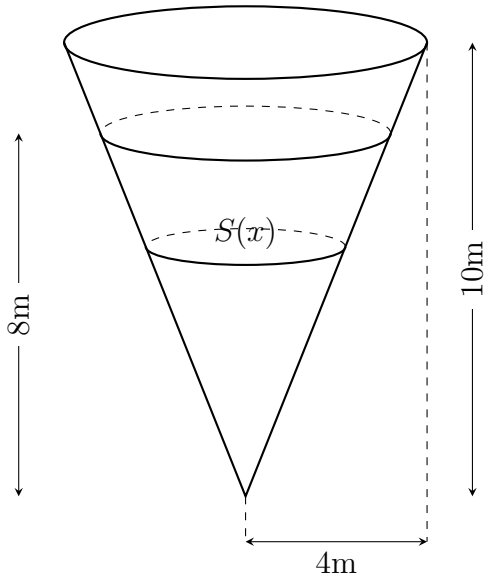
Cho biết đường cong (C_1) đi qua các điểm A, D, C là một phần của đồ thị hàm số bậc hai nào đó, đường cong (C_2) ứng với đường viền nối A với B là một phần của đồ thị hàm số $y=bx^2+c$, còn đường cong (C_3) ứng với đường viền nối B với C là một phần của đồ thị hàm số $y=mx^4+n$. Biết $k=\frac{k_1}{k_2}$ với $(k_1,k_2\in\mathbb{Z}, \frac{k_1}{k_2}$ là phân số tối giản). Diện tích tròng kính bằng $\frac{836}{25}$ (đơn vị diện tích). Tính k_1+k_2.

Bài 70. Một kỹ sư Strong thiết lập một hệ tọa độ $Oxyz$ để theo dõi vị trí lắp đặt của 2 mái nhà đã được gắn với nhau tạo thành hình chữ V vào các thanh đà sao cho chuẩn xác nhất. Biết phương trình mặt phẳng chứa 2 mái là $(P): x+2y-2z+6=0$ và $(Q): x+2y+z-5=0$; điểm A là nóc ngói; 2 điểm B, F là rìa đuôi ngói của mỗi mái tiếp xúc giữa mái và thanh đà (như hình vẽ) khi cố định phần dưới của ngôi nhà. Khoảng cách $BF=20$ m, khi đó tỉ số độ dài của thanh đà AF và khoảng cách BF bằng bao nhiêu?

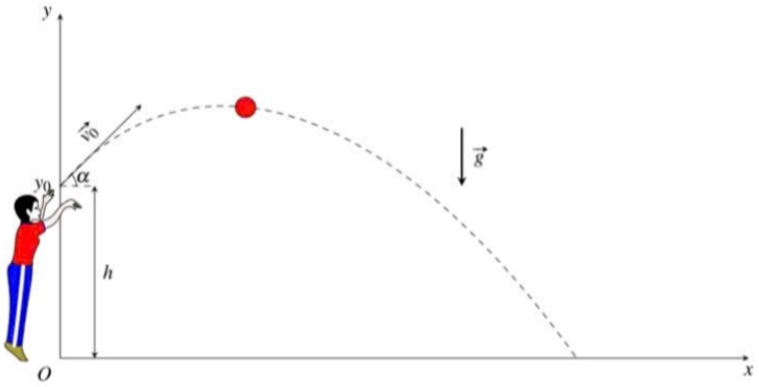


Bài 71. Một bể nước hình nón tròn xoay như hình vẽ có chiều cao 10 mét và bán kính đáy 4 mét được đổ nước cao đến độ cao 8 mét. Công để bơm nước ra từ một vòi ở đỉnh bể được tính

theo công thức $W = 9,8\int_2^{10} xS(x)\,\mathrm{d}x$ (đơn vị kilôJun), trong đó $S(x)$ (m^2) là diện tích của lớp nước cách mặt bể x (mét). Tính W (kJ) (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

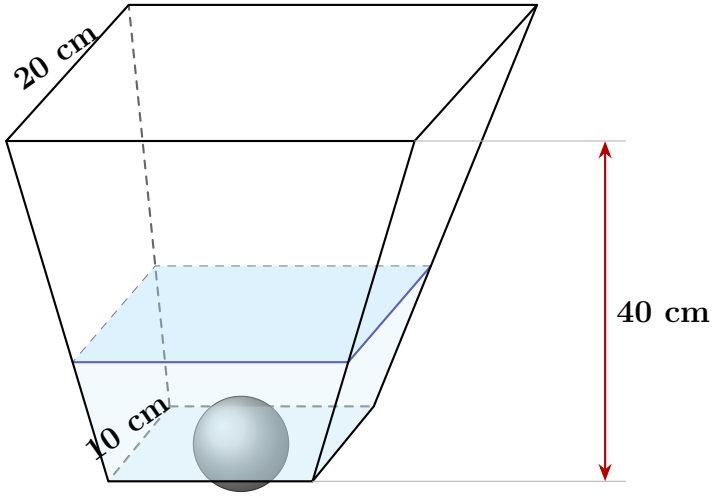


Bài 72. Một vận động viên có chiều cao 1,75 m thực hiện ném tạ với vận tốc ban đầu $v_0 = 30\,\mathrm{m/s}$, đạt thành tích 15 m. Gọi α là góc ném của vận động viên hợp với mặt đất với quỹ đạo của tạ khi ném xiên là một phần của đồ thị hàm số $y = -\frac{g}{2v_0^2 \cdot \cos^2\alpha}x^2 + x\tan\alpha + y_0$ $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$. Coi gia tốc trọng trường $g = 10\,\mathrm{m/s}^2$. Tính giá trị của $|\cos 2\alpha|$ (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



Bài 73. Một bể nước có dạng hình chóp cụt tứ giác đều có chiều cao $h = 40$ cm, đáy bể là hình vuông cạnh 10 cm và miệng bể là hình vuông cạnh 20 cm. Một viên bi sắt hình cầu không nổi bán kính $r = 4$ cm đặt dưới đáy bể nước. Ban đầu bể cạn, sau đó nước được đổ vào bể với tốc độ không đổi 20 cm^3/s. Tốc độ dâng lên của mực nước trong bể khi viên bi sắt ngập một nửa

trong nước là bao nhiêu cm/s (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



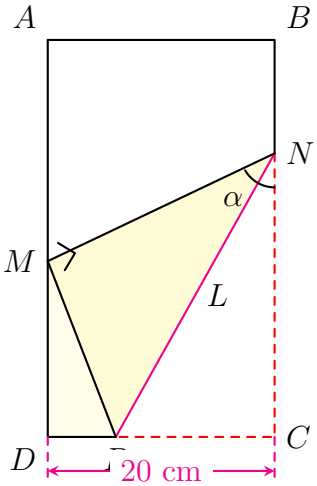
Bài 74. Một hộp có 25 chiếc thẻ cùng loại được đánh số từ 1 đến 25. Hai bạn Hà và Quỳnh chơi trò chơi rút thẻ trong hộp như sau: hai bạn lần lượt rút thẻ, mỗi lượt rút ngẫu nhiên một thẻ rồi ghi lại số trên thẻ vừa rút sau đó trả lại thẻ vào hộp. Hà sẽ thắng nếu rút được thẻ ghi số chia hết cho 6, Quỳnh sẽ thắng nếu rút được thẻ ghi số chia hết cho 5. Giả sử Hà chơi trước, khi đó xác suất để Quỳnh thắng bằng $\frac{a}{b}$ $(a, b \in \mathbb{N}^*$, $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Tính $a^2 + b^2$.

Bài 75. Cho chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông can tại A, tam giác SBC là tam giác đều cạnh 1 và thuộc mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

Bài 76. Trong không gian toạ độ $Oxyz$, đơn vị mỗi trục là km, mặt đất là mặt phẳng Oxy. Một máy bay đang tiếp cận hạ cánh từ điểm $A(18; -13; 12)$. Biên giới của hai quốc gia được xác định bởi mặt phẳng đi qua hai điểm $C(-13; -4; 0)$; $D(-7; 13; 0)$ và vuông góc với mặt đất. Kể từ A, sau 7 phút nó bay đến biên giới hai quốc gia và 1 phút sau đó nó hạ cánh tại điểm L trên đường băng LH. Biết phương trình đường thẳng LH là $\begin{cases} x = -14 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$. Giả sử vận tốc của máy bay không đổi trong suốt quá trình. Tìm vận tốc máy bay (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị của km/h).

Bài 77. Trong một tiết học, cô giáo yêu cầu bạn Đăng gấp một tờ giấy và tìm giá trị nhỏ nhất của nếp gấp với cách gấp như sau: Tờ giấy có dạng hình chữ nhật với chiều rộng bằng 20 cm, từ một điểm trên cạnh dài gấp tờ giấy lại và thu được miền diện tích được tô đậm như hình vẽ. Gọi

α là góc trên của nếp gấp (góc $\widehat{PNC}$ như hình).



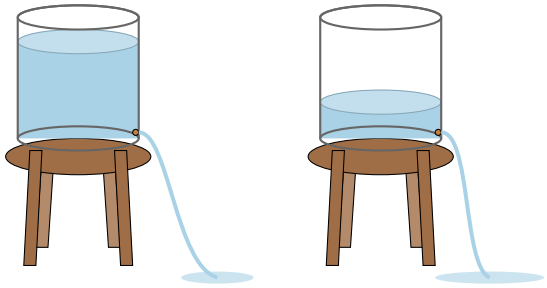
Bạn Đăng chứng minh được độ dài nếp gấp L (cm) phụ thuộc vào góc α theo phương trình

$$L = \frac{c}{a\sin^3\alpha + b\sin\alpha}$$

với a, b, c là các số nguyên, $c \in (0; 20)$. Tính $2a + 12b^2 + c^3$.

Bài 78. Một hộ gia đình sản xuất mỗi ngày sản xuất được x chiếc túi cói ($0 \le x \le 20, x \in \mathbb{N}$). Gọi $C(x)$ (tính bằng nghìn đồng) là tổng chi phí để sản xuất x chiếc túi thì $C'(x)$ được gọi là chi phí biên. Biết rằng $C'(x) = 3x^2 - 4x + 10$ và chi phí cố định (chi phí khi không sản xuất chiếc túi nào) là 500 nghìn đồng mỗi ngày. Giả sử gia đình này bán hết túi mỗi ngày sản xuất ra với giá 270 nghìn đồng/chiếc. Tính lợi nhuận tối đa theo đơn vị nghìn đồng mà gia đình đó thu được?

Bài 79. Một bể chứa 360 lít nước bị rò rỉ ở đáy nên nước chảy ra hết sau 20 phút. Lượng nước trong bể càng nhiều thì tốc độ chảy ra ngoài càng lớn. Theo định luật Torricelli, thể tích nước còn lại trong bể sau t phút được cho bởi hàm số $V(t) = 0,9t^2 + bt + c$ (đơn vị: lít), với b, c là số thực.



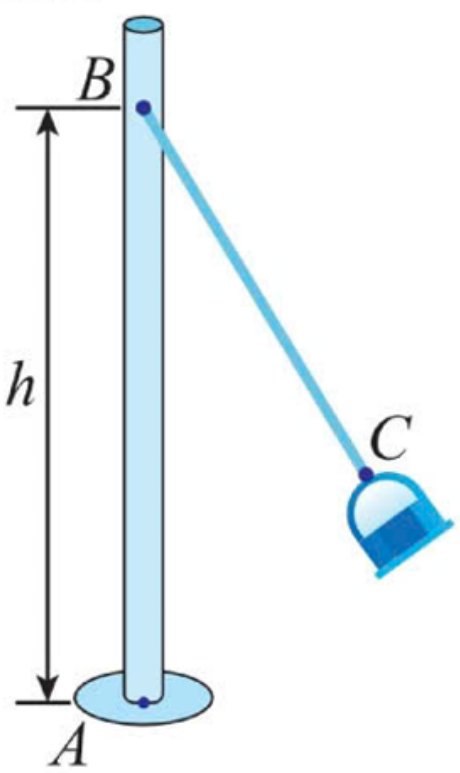
Bài 80. Bác Việt có 12 ha đất canh tác để trồng ba loại cây: ngô, khoai tây và đậu tương. Chi phí trồng 1 ha ngô là 4 triệu đồng, 1 ha khoai tây là 3 triệu đồng và 1 ha đậu tương là 4,5 triệu đồng. Do nhu cầu thị trường, bác đã trồng khoai tây trên phần diện tích gấp đôi diện tích trồng ngô. Tổng chi phí trồng ba loại cây trên là 45,25 triệu đồng. Hỏi diện tích trồng ngô là bao nhiêu ha?

Bài 81. Một nhà động vật học nhận thấy rằng sự tăng trưởng chiều dài của một con cá sấu trong 12 tháng được mô hình hóa bằng hàm số $L(t) = 3 - a \cdot 3^{-kt}$ trong đó t tính bằng tháng, L tính bằng mét, $0 \le t \le 12$. Ban đầu con cá sấu dài 1,8 m và sau 10 tháng chiều dài của nó đo được là 2,6 m. Một con cá sấu thứ 2 được quan sát cùng thời điểm và sự tăng trưởng về chiều dài của nó được mô hình hóa bởi hàm số $L_2(t) = 2,5 - 3^{-0,2t}$. Sự chênh lệch về chiều dài của hai con cá sấu nhỏ nhất bằng bao nhiêu cm (*làm tròn kết quả đến hàng phần mười*)?

Bài 82. Có 24 con voi trong một khu bảo tồn động vật hoang dã. Người quản lý gắn thẻ sáu

con voi bằng máy phát vô tuyến nhỏ và trả chúng về khu bảo tồn. Tháng tiếp theo, một người quản lý khác chọn ngẫu nhiên một con voi từ khu bảo tồn để gắn thẻ và lại trả về, nhưng anh ta không rõ là con voi này được gắn thẻ trước đó chưa. Giả sử không có con voi nào rời khỏi hoặc vào khu bảo tồn, hoặc chết hoặc sinh con, giữa thời điểm gắn thẻ và lựa chọn. Chọn ngẫu nhiên hai con voi trong khu bảo tồn, biết rằng hai con voi lấy ra có con voi được gắn thẻ, tính xác suất để trong khu bảo tồn có đúng sáu con voi được gắn thẻ (*làm tròn kết quả đến hàng phần trăm*).

Bài 83. Một trò chơi ở công viên giải trí, gồm cột thẳng đứng AB cố định được nối bằng tay đòn BC (thanh BC có thể di động). Trong không gian với hệ toạ độ cho trước, đơn vị mỗi trục là mét, mặt đất là mặt phẳng (Oxy), trục Oz hướng lên. Thanh đòn BC sẽ quay nhanh để tạo cảm giác mạnh cho người chơi. Biết rằng có hai thời điểm khác nhau mà đầu C đi qua các điểm có toạ độ lần lượt là $M(2;3;4)$ và $N(-2;5;8)$, đồng thời tại hai thời điểm đó, thanh đòn đều tạo với mặt đất một góc $30°$. Nếu điểm B có hoành độ dương, hãy tìm tung độ của B (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



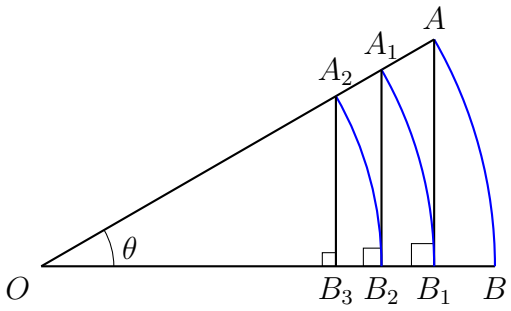
Bài 84. *Phương thức tính lãi kép là việc tính tiền lãi bằng cách lấy số tiền lãi của kì trước nhập vào vốn để tính lãi cho kì tiếp theo.*

Tỉ lệ lạm phát được tính bằng tỉ lệ phần trăm sự thay đổi giá của hàng hóa, dịch vụ trong một khoảng thời gian (thường là một năm). *Nếu tỉ lệ lạm phát của năm sau so với năm trước là i thì A đồng của năm trước có giá trị tương đương với $A(1+i)$ đồng của năm sau.*

Một người đầu tư bằng cách góp vốn 1 tỉ đồng vào công ty X trong 2 năm với lãi suất không đổi 8%/năm theo phương thức tính lãi kép. Giả sử trong 2 năm đó, tỉ lệ lạm phát mỗi năm lần lượt là $3,7\%$ và $4,2\%$. Gọi a (triệu đồng) là số tiền cả vốn lẫn lãi người đó nhận được sau 2 năm đầu tư. Gọi b (triệu đồng) là giá trị tương đương của số tiền vốn 1 tỉ đồng sau 2 năm có tính đến yếu tố lạm phát. Tính $a-b$ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

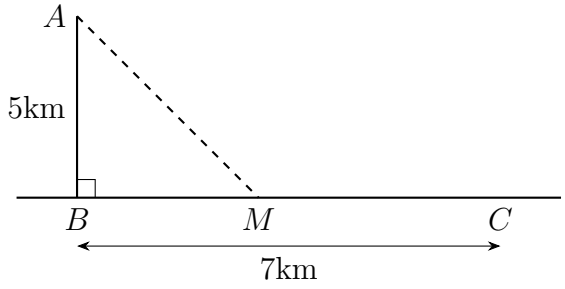
Bài 85. Cho một hình quạt tròn AOB là một phần của hình tròn có bán kính 2025 và có tâm O,

biết rằng $\widehat{AOB} = 30°$. Từ điểm A ta dựng AB_1 vuông góc với cạnh OB tại B_1, vẽ cung tròn tâm O bán kính OB_1 cắt OA tại A_1, tiếp tục dựng A_1B_2 vuông góc với cạnh OB tại B_2 rồi vẽ cung tròn tâm O bán kính OB_2 cắt OA tại $A_2, \ldots$ Tiếp tục như thế có các cung tròn $AB, A_1B_1, A_2B_2, \ldots$

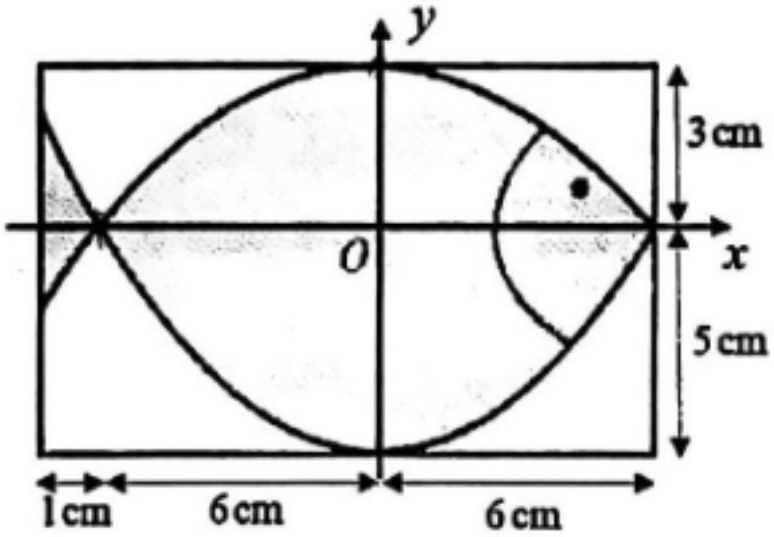


Tính tổng vô hạn độ dài các cung tròn trên (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

Bài 86. Một chiếc thuyền ở vị trí A cách bờ biển một khoảng AB bằng 5km. Trên bờ biển có một cái kho ở vị trí C cách B một khoảng là 7km. Người lái thuyền dự định chèo thuyền từ A đến điểm M trên bờ biển với vận tốc $1,2$ m/s rồi đi bộ đến C với vận tốc $1,8$ m/s. Điểm M cách B bao nhiêu km để người đó đến kho nhanh nhất?



Bài 87. Họa sĩ thiết kế logo hình con cá cho một doanh nghiệp kinh doanh hải sản. Logo là hình phẳng giới hạn bởi hai parabol với các kích thước được cho trong hình sau (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là cm).



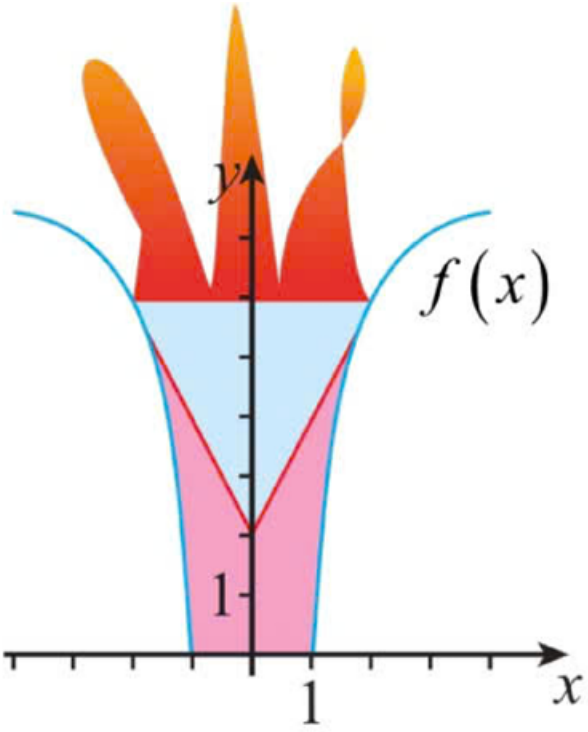
Diện tích logo bằng bao nhiêu cm^2?

Bài 88. Một xưởng mộc sản xuất hai loại sản phẩm: bàn gỗ và ghế gỗ. Xưởng có tối đa 240 đơn vị gỗ và tổng thời gian nhân công là 100 giờ. Để làm 1 cái bàn cần 5 đơn vị gỗ và 2 giờ công. Để

làm 1 cái ghế cần 2 đơn vị gỗ và 1 giờ công. Mỗi cái bàn lãi 600.000 đồng, mỗi cái ghế lãi 300.000 đồng. Lợi nhuận của xưởng mộc lớn nhất là bao nhiêu triệu đồng?

Bài 89. Cần chế tạo các lon nước hình trụ kín có thể tích $V_0 = 350$ cm^3. Việc cắt tấm kim loại để làm mặt bên của lon sẽ không gây lãng phí, nhưng mỗi mặt đáy phải được cắt từ một miếng kim loại hình vuông và phần thừa sẽ được loại bỏ. Hãy tìm chiều cao của lon nước sao cho chi ít tốn nguyên liệu nhất (*làm tròn đến hàng phần trăm của cm*).

Bài 90. Để phục vụ cho Thế vận hội Olympic, một ngọn đuốc kim loại lớn đã được chế tạo. Ngọn đuốc phải đạt các yêu cầu sau: chiều cao $7,5$ m; bề rộng ở đỉnh là 8 m và ở đáy là 2 m. Đường cong biên dạng của ngọn đuốc đối xứng được mô tả bằng một hàm số có dạng $f(x) = a - \dfrac{b}{x^2}$, đường giới hạn bên trong d của ngọn đuốc là tiếp tuyến của đồ thị $f(x)$ kẻ từ điểm $A(2;0)$ (đơn vị trên các trục tọa độ tính bằng mét). Gọi S là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, đường thẳng d, trục Ox, trục Oy. Ngọn đuốc được chế tạo khi quay hình S quanh trục Oy, tính thể tích của ngọn đuốc theo đơn vị mét khối (*làm tròn kết quả đến hàng phần mười*).



Bài 91. Túi A chứa 6 lá bài ghi các số tự nhiên từ 1 đến 6. Túi B và C mỗi túi chứa 3 lá bài ghi các số tự nhiên từ 1 đến 3.

- M (người thứ nhất) rút ngẫu nhiên 1 lá bài từ túi A.
- N (người thứ hai) rút ngẫu nhiên 1 lá bài từ túi B.
- P (người thứ ba) rút ngẫu nhiên 1 lá bài từ túi C.

Biết rằng số trên lá bài của M lớn hơn số trên lá bài của N, khi đó xác suất để số trên lá bài của M lớn hơn tổng số trên lá bài của N và P là $\dfrac{a}{b}$ (trong đó $a, b \in \mathbb{N}$ và phân số $\dfrac{a}{b}$ tối giản). Tính $3a^4 + 10b^4$.

Bài 92. Một tháp làm nguội của một nhà máy có mặt cắt là hình hypebol có phương trình $\dfrac{x^2}{81^2} - \dfrac{y^2}{40^2} = 1$. Biết chiều cao của tháp là 240 m và khoảng cách từ nóc tháp đến tâm đối xứng

của hypebol bằng một nửa khoảng cách từ tâm đối xứng tới đáy. Tính bán kính nóc của tháp (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị của mét).

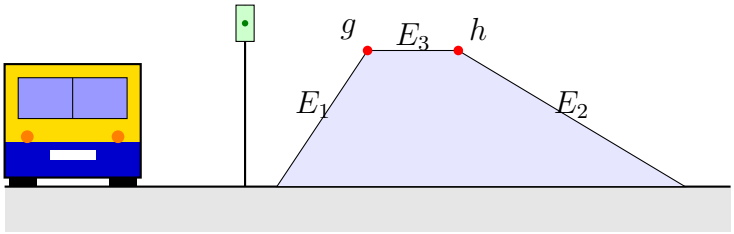


Bài 93. Do lực cản của không khí, vận tốc của một người nhảy dù nặng 80 kg được mô hình hoá bởi hàm số $v(t) = \frac{k(e^{\beta t}-1)}{e^{\beta t}+1}$ (trong đó t là thời gian tính bằng giây kể từ khi nhảy và k, β là các hằng số). Biết rằng vận tốc của người đó sau một giây và 2 giây kể từ khi nhảy lần lượt là $10,4$ m/s và 20 m/s. Tính vận tốc của người này sau 6 giây (kết quả làm tròn đến hàng phần mười theo đơn vị m/s).

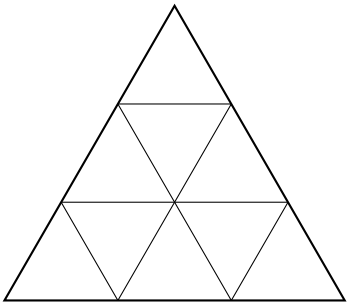


Bài 94. ột đê chắn tiếng ồn được xây bằng bê tông có hình dạng một lăng trụ tứ giác với mặt phẳng cắt ngang là một hình thang. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, đơn vị trên mỗi trục tính bằng mét, mặt đất trùng với mặt phẳng (Oxy). Một mặt của con đê nằm trên mặt đất và mặt phía trên nằm trong mặt phẳng $(E_3) : z = 5$, hai mặt sườn bên nằm trong hai mặt phẳng $(E_1) : 3x + 4y - 5z + 13 = 0$ và $(E_2) : 3x + 4y + 10z - 87 = 0$ (tham khảo hình vẽ). Biết rằng con đê dài 100 mét, tính thể tích

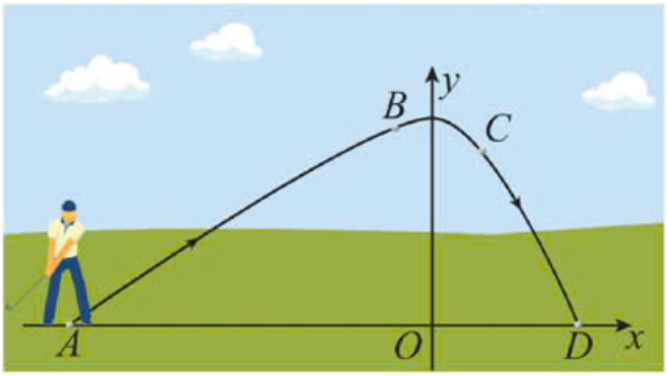
của khối bê tông làm con đê trên.



Bài 95. Bé Dũng có một tam giác đều lớn được chia thành 9 tam giác đều nhỏ hơn gồm 3 hàng: hàng trên cùng có 1 tam giác, hàng giữa có 3 tam giác, hàng dưới cùng có 5 tam giác. Bé Dũng có 3 màu để tô khác nhau là Đỏ, Xanh, Vàng. Bé tô mỗi tam giác nhỏ bằng một trong ba màu đó với điều kiện là "không có hai tam giác nhỏ chung cạnh nào lại có cùng màu". Có bao nhiêu cách khác nhau để bé Dũng tô màu tam giác lớn này?



Bài 96. Xét trong hệ trục tọa độ Oxy (đơn vị mỗi trục là mét), có một sân golf thu nhỏ, điểm phát bóng là điểm A, điểm đặt lỗ là điểm $D\left(\frac{25}{9};0\right)$, đường cong BC là một phần của đồ thị hàm số bậc ba $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ với $B\left(-1;\frac{9}{2}\right)$, $C(1;4)$, trong đó điểm B là điểm uốn của đồ thị hàm số $f(x)$. Để hoàn thành lỗ này, người chơi đặt bóng tại điểm $A(p;0)$, quả bóng chạy theo đường thẳng AB, đi theo đường cong BC rồi tiếp tục đi theo đường thẳng CD (tham khảo hình vẽ). Biết rằng AB và CD là các tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x)$ lần lượt tại các điểm B và C. Tính p^4.



Bài 97. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $\sqrt{3}$, khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SAB) bằng $\frac{\sqrt{6}}{2}$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

Bài 98. Một người nông dân muốn trộn ba loại phân bón A, B, C để bón cho cây ăn quả. Tỷ lệ thành phần Nitrogen, Phosphorus, Kali (N : P : K) trong mỗi loại phân bón như sau:

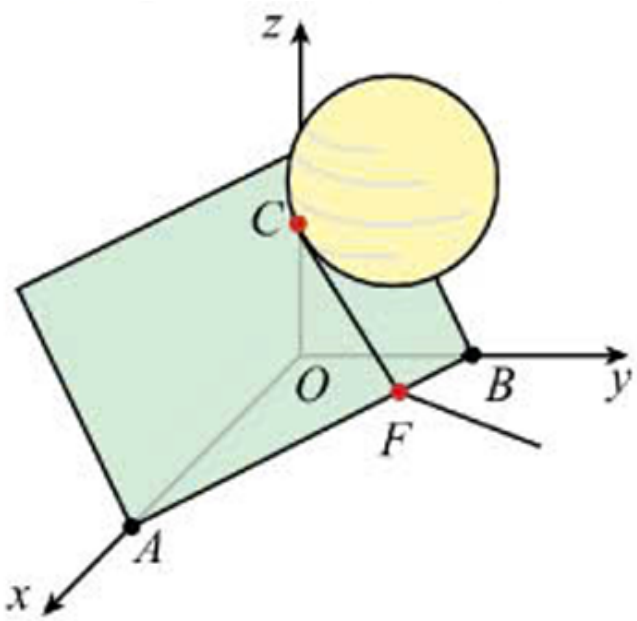
+ Phân bón A: tỉ lệ N : P : K là 10 : 8 : 12
+ Phân bón B: tỉ lệ N : P : K là 5 : 15 : 10

+ Phân bón C: tỉ lệ N : P : K là 18 : 6 : 9

Người nông dân muốn tạo ra hỗn hợp phân bón có tỷ lệ N : P : K là 12 : 10 : 11. Khi đó tỉ lệ phân bón A và phân bón B bằng bao nhiêu? *Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.*

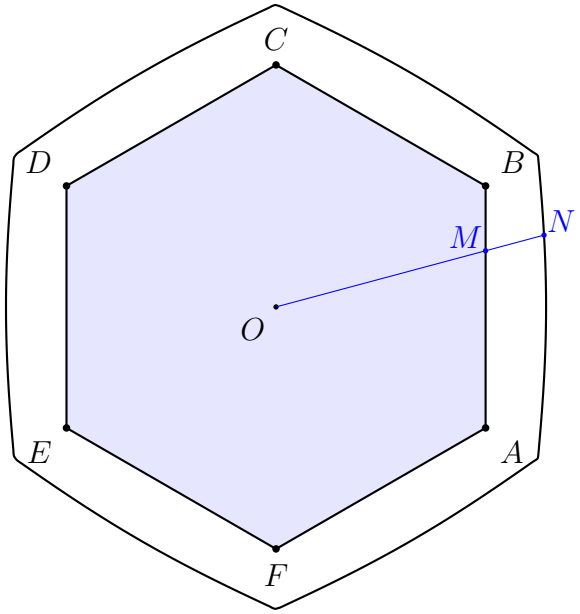
Bài 99. Gia đình ông Tuấn đi cắm trại tại một ngôi nhà ở vùng ngoại ô. Nhiệt độ ngoài trời ở nơi này ổn định ở mức $-6°$C. Trong đêm, hệ thống máy sưởi bị hỏng. Khi gia đình ông Tuấn thức dậy, nhiệt độ trong ngôi nhà lúc này là $22°$C thay vì mức thông thường là $25°$C (như khi máy sưởi vẫn hoạt động). Một giờ sau khi thức dậy nhiệt độ đo được trong phòng là $15°$C. Ông Tuấn sử dụng hàm số $f(t) = \dfrac{at+b}{ct+d}$ (đơn vị °C) để tính toán nhiệt độ trong ngôi nhà sau t (giờ) kể từ khi máy sưởi bị hỏng. Biết rằng nếu xét trong một thời gian dài không có máy sưởi thì nhiệt độ trong căn phòng sẽ tiến đến mức nhiệt độ ngoài trời. Dựa vào mô hình trên, hãy cho biết máy sưởi bị hỏng trước lúc gia đình ông Tuấn thức dậy bao nhiêu phút (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Bài 100. Một nhà sản xuất ổ bi đã đặt một mô hình quả cầu khổng lồ trên mái nghiêng của nhà xưởng. Mặt mái hiên có thể được mô tả bằng mặt phẳng $(\alpha): x+2y+2z-10=0$, trong đó A, B, C là giao điểm của mặt phẳng (α) với các trục tọa độ. Một mô hình quả cầu bán kính $r=3$ được đặt tiếp xúc với mặt phẳng (α) tại điểm C. Từ C kẻ đường vuông góc với AB tại F. Khi người ta muốn thay thế quả cầu này, họ cho nó lăn trên đường thẳng CF cho đến khi quả cầu vừa tiếp xúc với mặt phẳng (Oxy) tại $P(a;b;0)$ thì dừng lại. Tính $a+b$.



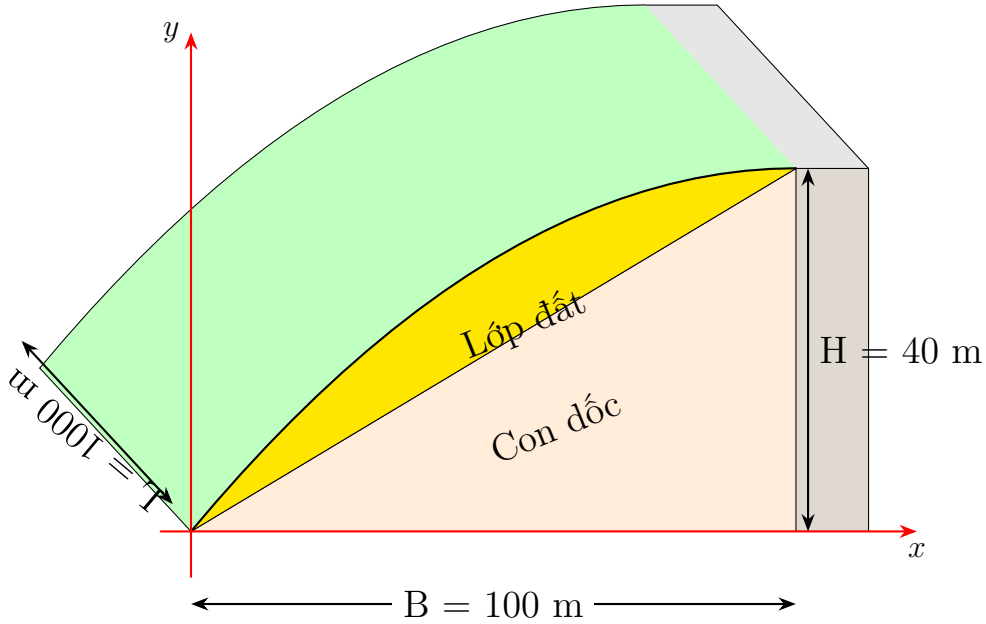
Bài 101. Người ta tạo một lối đi xung quanh một sân chơi hình lục giác đều $ABCDEF$ tâm O giới hạn bởi các cạnh của lục giác và một đường cong kín (L) (như hình vẽ). Nếu điểm M thuộc cạnh của lục giác và tia OM cắt (L) tại điểm N thì ta luôn có $MN = 2$m. Biết rằng $OA = 8$m.

Diện tích của lối đi đó bằng bao nhiêu mét vuông (làm tròn đến hàng đơn vị)?



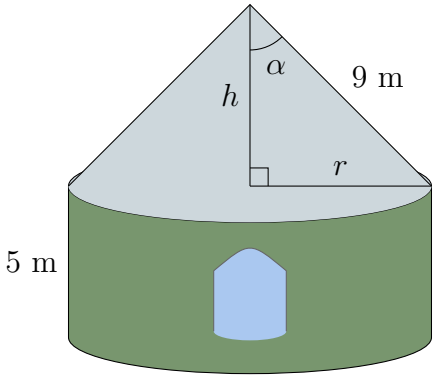
Bài 102. Một con dốc có chiều rộng 1000m, cao 40m và có chiều dài theo phương ngang là 100 mét, được cải tạo bằng cách đắp thêm lớp đất để tạo độ cong cho con dốc. Trên hệ tọa độ Oxy, đơn vị trên mỗi trục tính bằng mét, đường biên $y = g(x)$ của dốc cũ là một đường thẳng, đường biên $y = f(x)$ của phần đất đắp thêm là một parabol đi qua điểm có tọa độ $(50; 30)$ (tham khảo như hình vẽ).

Biết thể tích phần đắp thêm là T (m^3), tính $\dfrac{T}{500}$ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



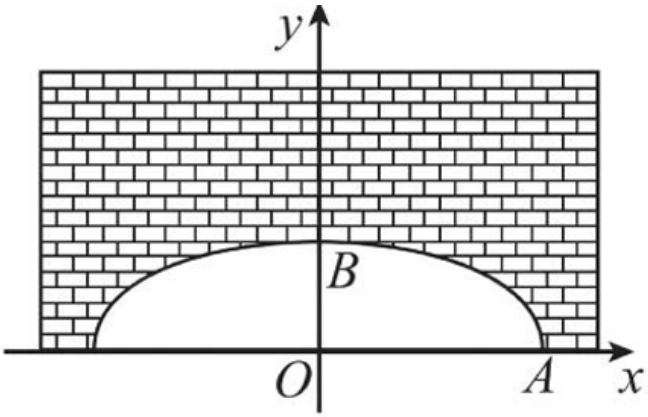
Bài 103. Một chiếc lều được thiết kế gồm hai phần, phần dưới hình trụ có chiều cao $h = 5$ mét và bán kính r, phần bên trên là hình nón có đường viền ngoài dài 9 mét. Thể tích tối đa của lều

là bao nhiêu m^3? Viết kết quả làm tròn đến hàng đơn vị.

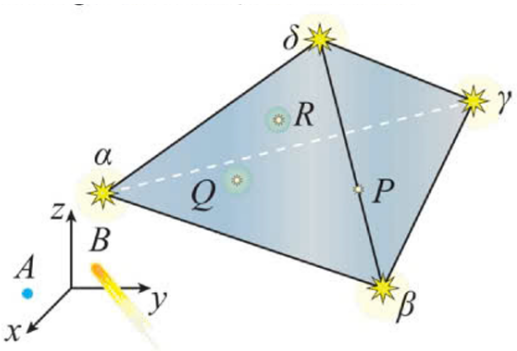


Bài 104. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, $AB = BC = 1$, $AD = 2$. Hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng đáy trùng với trọng tâm G của tam giác ACD và $SG = 7$. Khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SCD) bằng bao nhiêu (không làm tròn kết quả các phép tính trung gian, chỉ làm tròn kết quả cuối cùng đến hàng phần trăm)?

Bài 105. Một kỹ sư thiết kế một đường hầm một chiều có mặt cắt là một nửa hình elip, chiều rộng của hầm là 12 mét, khoảng cách từ điểm cao nhất của elip so với mặt đường là 3 mét. Người kĩ sư này phải đưa ra cảnh báo cho các loại xe có thể đi qua hầm. Một chiếc xe có chiều rộng bằng 3 mét thì chiều cao lớn nhất của xe để xe có thể đi qua hầm là bao nhiêu mét *làm trong kết quả đến hàng phần chục*?



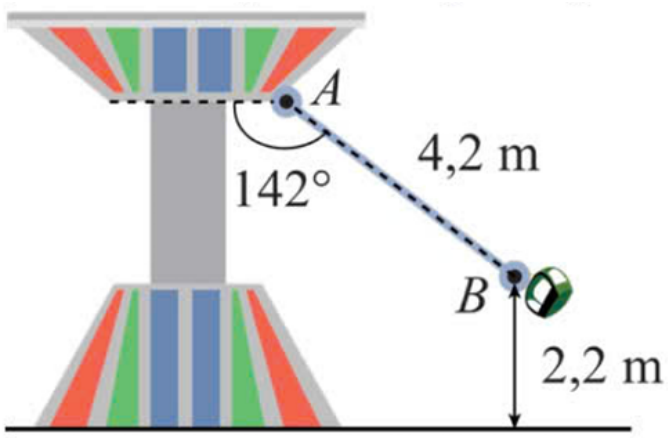
Bài 106. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho trước (đơn vị mỗi trục tính theo đơn vị thiên văn), bốn ngôi sao $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ tạo thành một vùng giới hạn trong không gian với các vị trí của chúng được mô hình lần lượt là $A(4;4;8)$, $B(0;20;0)$, $C(-16;16;4)$ và $D(-8;12;12)$ (coi mỗi ngôi sao là một chất điểm).



Một sao chổi bay thẳng qua điểm $M(10;3;1)$ và $N(4;7;3)$, đi vào vùng giới hạn tại điểm P và

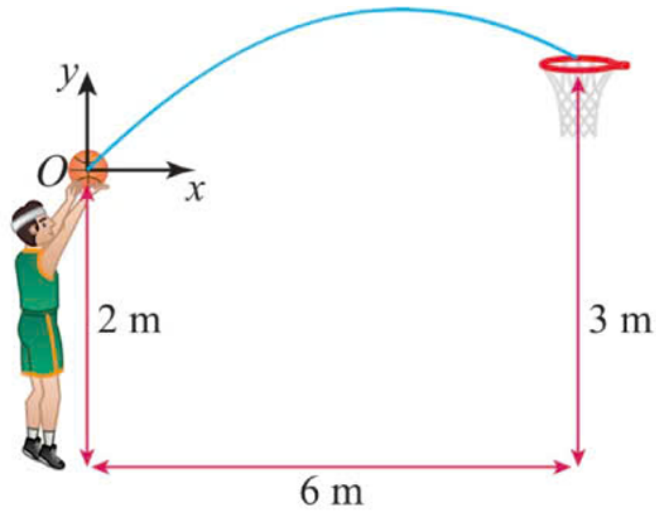
rời khỏi vùng giới hạn tại điểm Q. Hỏi khoảng cách PQ bằng bao nhiêu đơn vị thiên văn (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)?

Bài 107. Một thanh kim loại giữ ghế ngồi tại điểm B của vòng quay vui chơi được gắn vào khung tại điểm A. Khi vòng quay quay với tốc độ tối đa, thanh chống tạo với khung một góc $142°$ và khi đó ghế ngồi ở độ cao $2,2\,\text{m}$ so với mặt đất (xem hình vẽ). Khi vòng không quay thanh AB thẳng đứng vuông góc với mặt đất. Biết chiều dài của thanh chống là $4,2\,\text{m}$. Vậy khi vòng quay không quay thì khoảng cách giữa điểm B và mặt đất bao nhiêu centimet (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?



Bài 108. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, gọi S là tập hợp các điểm $(x;y)$ sao cho x,y là các số nguyên thuộc đoạn $[1;12]$. Chọn ra 4 điểm bất kì thuộc tập hợp S sao cho 4 điểm đó tạo thành một hình chữ nhật có các cạnh song song với trục tọa độ nhưng không phải hình vuông. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách như vậy?

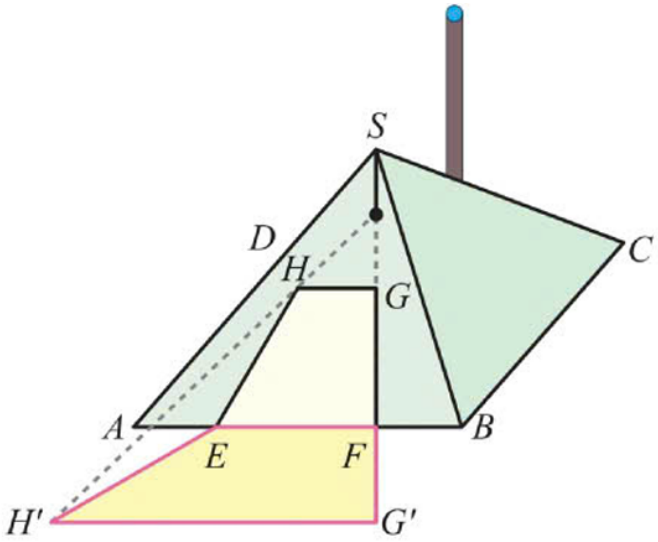
Bài 109. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, đơn vị mỗi trục là mét, mặt sân là mặt phẳng (Oxy), trục Oz hướng lên, một người thực hiện ném bóng, quả bóng được ném tại điểm có tọa độ $A(4;22;2)$, bóng bay qua điểm $B(7;26;4)$ sau đó bay vào tâm của rổ. Biết quỹ đạo của quả bóng là một Parabol nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt sân, khoảng cách từ vị trí ném đến rổ theo phương ngang là 6 mét và tâm của rổ cao 3 mét so với sân. Gọi H là điểm mà tại đó, quả bóng đạt độ cao lớn nhất, tìm tung độ của H (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).



Bài 110. Cho 32 viên bi giống nhau được đặt vào các đỉnh của hình đa giác đều có 32 cạnh nội tiếp đường tròn (O), mỗi đỉnh chỉ có một viên bi. Tính số các cách đặt 4 chiếc thẻ giống nhau vào

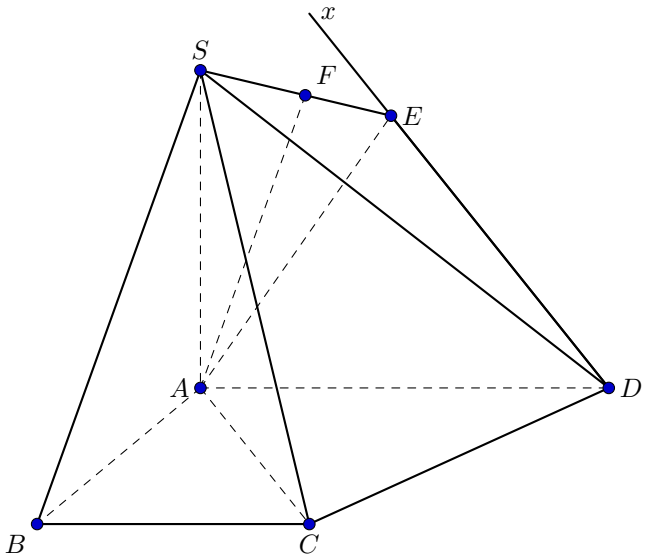
trung điểm các cạnh của đa giác đã cho thỏa mãn tại mỗi trung điểm chỉ có nhiều nhất một chiếc thẻ và các viên bi đã cho được chia thành 4 phần, mà mỗi phần có ít nhất 6 viên bi. Biết hai cách đặt thẻ được coi là như nhau nếu tồn tại một phép quay quanh O biến cách chia này thành cách chia kia.

Bài 111. Một chiếc lều có hình dạng là một hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ với cạnh đáy 8 m và chiều cao 3 m, $(ABCD)$ nằm trên mặt đất. Lối vào nằm trong mặt phẳng (SAB) có dạng hình thang $EFGH$ với độ dài đáy lớn $EF = 4$ m được đặt chính giữa cạnh AB, đồng thời H và G là trung điểm của các đoạn thẳng SE và SF. Một chiếc đèn được thả thẳng đứng từ điểm S, bóng đèn cách mặt đất 2 mét, ánh sáng xuyên qua lối vào, chiếu ra ngoài và tạo ra một vùng được chiếu sáng (tham khảo như hình vẽ).



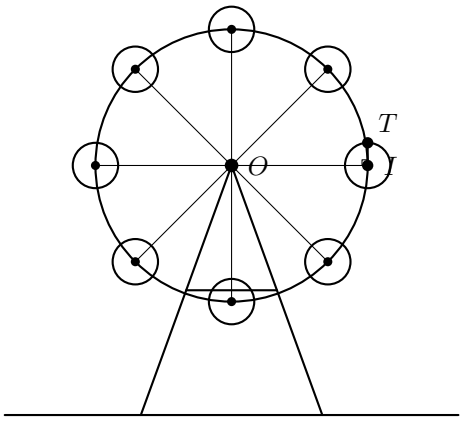
Hỏi diện tích vùng được chiếu sáng đó là bao nhiêu mét vuông?

Bài 112. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B với $AB = BC = 1$, $AD = 2$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 1$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SD (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

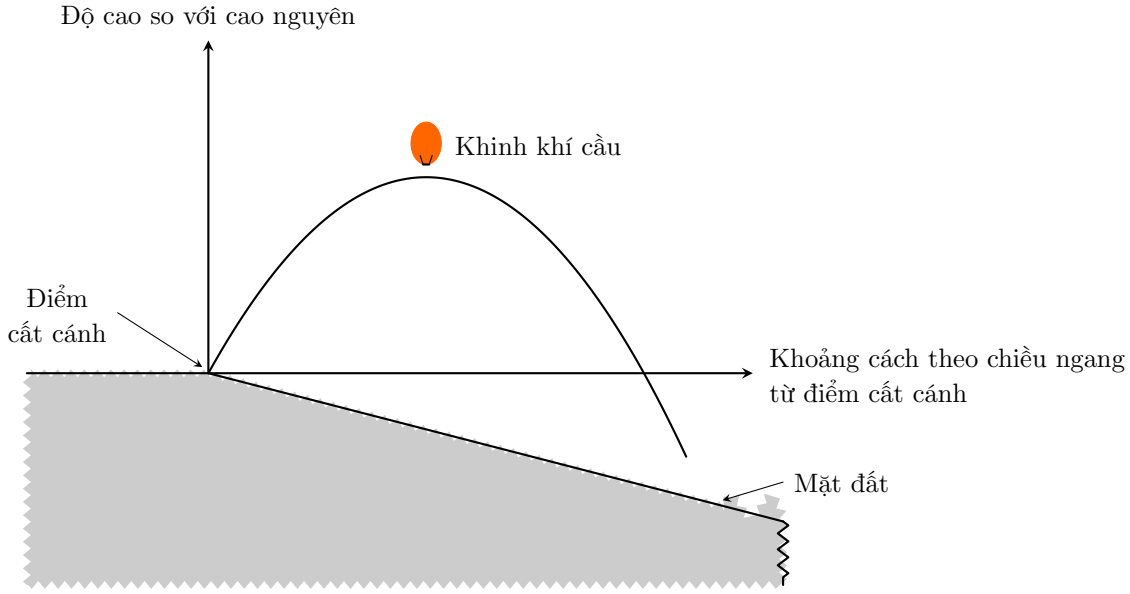


Bài 113. Một trò chơi vòng đu quay được thể hiện như hình vẽ, trò chơi gồm một bánh xe lớn tâm O có bán kính 12 m và các bánh xe nhỏ có bán kính 2 m. Các ghế ngồi được bố trí xung quanh bánh xe nhỏ. Tại thời điểm ban đầu, bạn Dũng đang ngồi ở vị trí T trên đường tròn tâm I

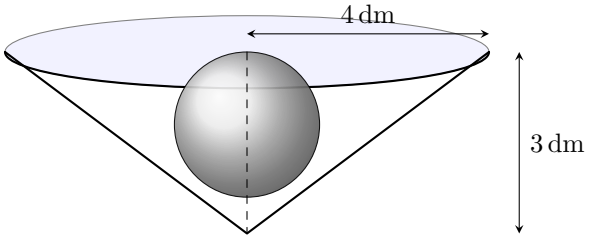
và hai điểm O, I cùng cách mặt đất 20 m. Biết rằng bánh xe lớn quay quanh tâm O còn bánh xe nhỏ quay quanh tâm của nó nhưng luôn thoả mãn góc $\widehat{TIO} = 90°$. Tìm chiều cao tối đa của bạn Dũng so với mặt đất trong quá trình chơi (kết quả làm tròn đến hàng phần mười của mét).



Bài 114. Một khinh khí cầu cất cánh từ rìa của một cao nguyên (mặt phẳng nằm ngang). Xét trên hệ tọa độ Oxy, đơn vị trên mỗi trục tính bằng mét, đường đi của khinh khí cầu được mô hình hóa qua đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{-1}{375}x^2 + \frac{4}{5}x$. Mặt đất (dưới cao nguyên) dốc xuống một góc không đổi và bề mặt của nó tạo với phương thẳng đứng một góc α thỏa mãn $\tan\alpha = -0,1$ (tham khảo như hình vẽ). Biết rằng tại vị trí A và B, khinh khí cầu sẽ ở độ cao 30 mét theo phương thẳng đứng với mặt đất. Tính khoảng cách AB (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị theo mét).

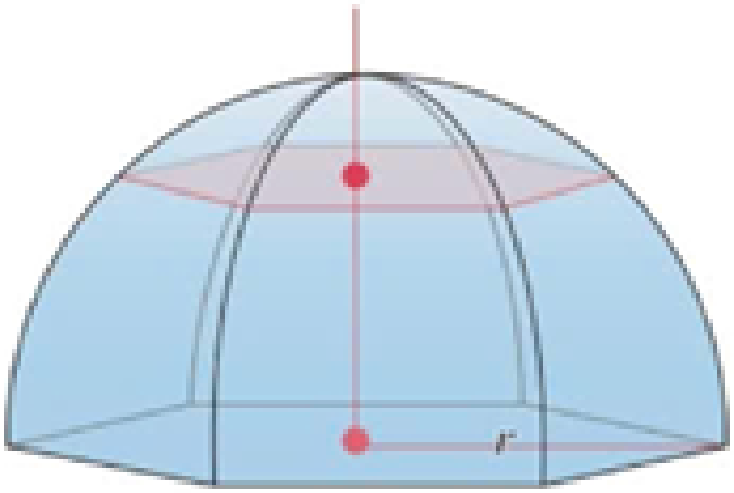


Bài 115. Một cái cốc thủy tinh dạng hình nón úp ngược có chiều cao $a = 3\,\text{dm}$. Bán kính đáy của nón là $R = 4\,\text{dm}$. Ban đầu, cốc được đổ đầy nước. Người ta thả một quả cầu bằng sắt đặc làm bằng vật liệu không thấm nước vào cốc. Quả cầu được thả vào sao cho nó tiếp xúc với mặt bên trong của cốc nước (tham khảo hình vẽ) và thể tích nước tràn ra ngoài là lớn nhất (xem hình vẽ).

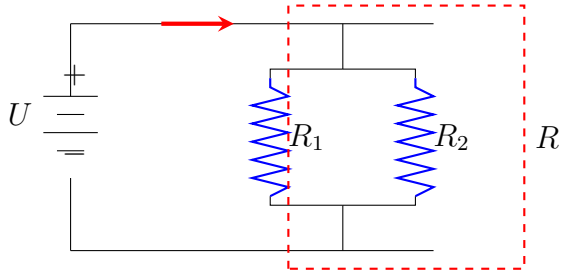


Hỏi thể tích nước lớn nhất đó là bao nhiêu lít (làm tròn đến hàng phần mười)?

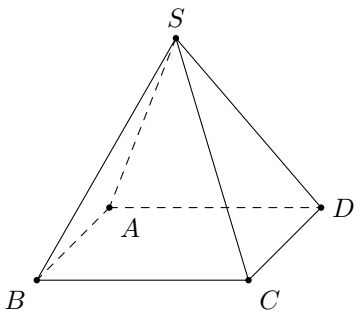
Bài 116. Một mái vòm nhà thờ có thể tích là 200 mét khối được thiết kế với ba giá đỡ hình parabol có hình dạng giống nhau sao cho mỗi mặt cắt ngang (theo phương nằm ngang) đều là một lục giác đều (tham khảo như hình vẽ). Ba parabol có cùng đỉnh và chiều cao, đáy vòm là một hình lục giác đều có độ dài đường chéo bằng 10 mét. Chiều cao của mái vòm bằng bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)? Biết mái vòm cao không quá 10 mét.



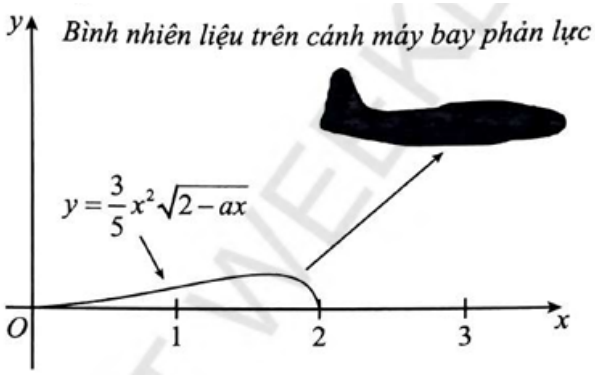
Bài 117. Hai điện trở R_1 và R_2 được mắc song song trong mạch điện để tạo thành một nguồn có tổng trở R. Khi đó giá trị R được xác định thông qua phương trình $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$. Biết rằng ban đầu $R_1 = 120\,(\Omega)$ và đang giảm với tốc độ không đổi $a\,\Omega/s$; $R_2 = b\,(\Omega)$ và đang tăng với tốc độ không đổi $0,5\,\Omega/s$; $R = 40\,(\Omega)$ và đang tăng với tốc độ bằng $\frac{1}{9}\,\Omega/s$ (trong đó $a, b \in \mathbb{R}$). Tổng trở lớn nhất trong mạch điện trên bằng bao nhiêu Ω (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?



Bài 118. Một con kiến di chuyển dọc theo các cạnh của một hình chóp tứ giác. Nó bắt đầu cuộc đi dạo của mình ở đỉnh A, mỗi lần nó đi đúng một cạnh của hình chóp và nó đi tối đa 3 lần. Tại mỗi đỉnh, con kiến quyết định ngẫu nhiên đi theo một trong ba hướng (đối với đỉnh A, B, C) hoặc bốn hướng (đối với đỉnh S trên cùng), trong đó nó cũng được phép chọn hướng mà nó vừa đi đến. Tại đỉnh B có một con thú ăn kiến đang rình rập. Xác suất để con kiến không bị bắt bởi thú ở B là bao nhiêu phần trăm (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



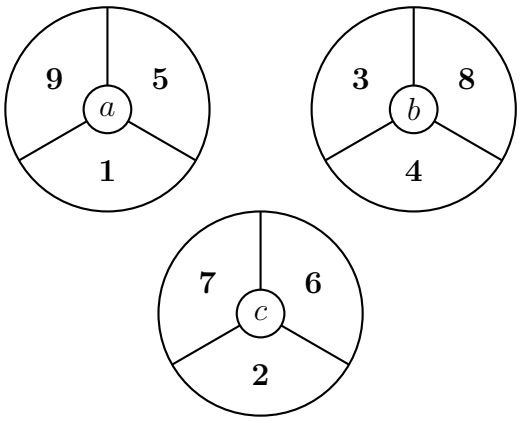
Bài 119. Một bình nhiên liệu trên cánh máy bay phản lực được mô hình hóa bằng cách quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{3}{5}x^2\sqrt{2-ax}$ $(a \in \mathbb{R})$ và trục Ox quanh trục hoành, trong đó x và y được đo bằng mét (xem hình vẽ). Biết rằng chiếc máy bay đó có 4 bình chứa nhiên liệu như nhau và được đổ đầy trước khi bay. Giả sử tốc độ tiêu hao nhiên liệu trên máy bay được mô phỏng bằng hàm số $h'(t) = -3t^2 + 120t + 2000$ lít/giờ (t tính theo giờ, $0 \le t \le 6$). Máy bay đó sẽ tiêu hao hết 90% nhiên liệu sau bao nhiêu giờ bay (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?



Bài 120. Bạn Quỳnh và bạn Hà tham gia chơi trò chơi sau:

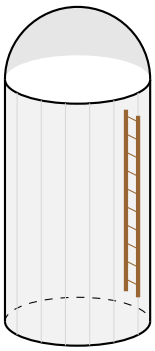
- Quỳnh chọn trước một trong ba vòng quay được cho trong hình.
- Sau đó, Hà chọn một trong hai vòng còn lại.
- Cả hai quay vòng của mình. Người có số lớn hơn là người thắng.

Biết rằng mỗi vùng trên vòng quay đều có xác suất như nhau. Tính xác suất mà Quỳnh chiến thắng. Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.



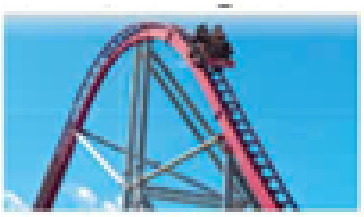
Bài 121. **Silo** là một cấu trúc cao, hình trụ, thường được sử dụng để lưu trữ ngũ cốc. Một silo (không có đáy) được xây dựng dưới dạng một hình trụ có nắp là một nửa hình cầu ở phía trên. Chi phí xây dựng của nửa hình cầu là 100 nghìn đồng mỗi m^2, chi phí xây dựng của hình trụ là 75 nghìn đồng mỗi m^2. Người ta muốn xây dựng một silo để có thể chứa được 24 tấn gạo. Bỏ qua độ dày của silo và lượng vật liệu thừa trong quá trình xây dựng, gạo được chứa trong phần hình trụ. Số tiền tối thiểu mà người ta bỏ ra để xây dựng silo trên là bao nhiêu triệu đồng (làm tròn đến hàng phần trăm)? Biết rằng trong toán học khối lượng của một vật chất bằng tích của thể tích và

khối lượng riêng của nó, gạo có khối lượng riêng là $D = 1200$ kg/m^3.

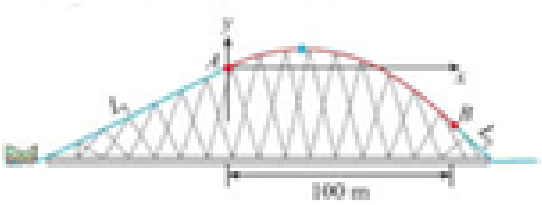


Bài 122. Một kĩ sư thiết kế một đường ray tàu lượn, mà mặt cắt của nó gồm một cung đường cong có dạng parabol (hình a), đoạn dốc lên L_1 và đoạn dốc xuống L_2 là những phần đường thẳng có hệ số góc lần lượt là $0,5$ và -1.

Để tàu lượn chạy êm và không bị đổi hướng đột ngột, L_1 và L_2 phải là những tiếp tuyến của cung parabol tại các điểm chuyển tiếp A và B (hình b). Giả sử gốc tọa độ đặt tại A và phương trình của parabol là $y = ax^2 + bx + c$, trong đó x tính bằng mét. Biết khoảng cách theo phương ngang giữa A và B là 100 (mét). Tìm chênh lệch độ cao giữa hai điểm chuyển tiếp A và B (viết theo đơn vị mét).

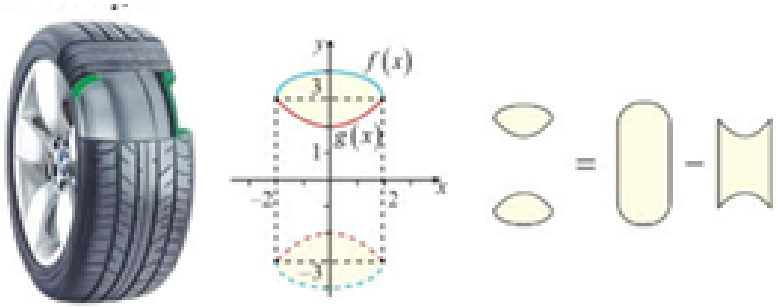


Hình a



Hình b

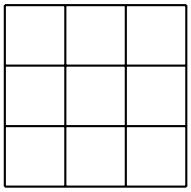
Bài 123. Khoang không khí của một chiếc lốp xe có thể được xem là một vật thể được tạo thành bằng cách xoay mặt cắt ngang của lốp quanh trục bánh xe. Một chiếc bánh xe có đường kính bằng 8 dm, đường kính phần rỗng bên trong bằng 4 dm và chiều cao bằng 4 dm. Chiếc bánh xe được thiết kế khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ quanh trục hoành. Biết rằng đồ thị hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx + c$ $(a, b, c \in \mathbb{R})$ và parabol $y = g(x)$ đều nhận trục Oy là trục đối xứng. Thể tích phần không khí của chiếc lốp xe trên bằng bao nhiêu lít (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?



Bài 124. Vương đưa ra cho con trai của anh ấy một câu đố như sau: trong một ma trận 3×3, điền 9 số tự nhiên từ 1 đến 9 thỏa mãn hai điều kiện:

- Tổng của mỗi hàng, mỗi cột và tổng của 3 ô chéo nhau là bằng nhau.
- Các số điền vào là các số đôi một khác nhau.

Số cách mà con trai anh Vương điền vào ma trận bằng bao nhiêu?



Bài 125. Trong một cuộc thi pha chế, mỗi đội chơi được sử dụng tối đa 15 gam hương liệu hòa tan, 10 lít nước và 450 gam đường để pha chế hai loại nước A và B. Để pha chế 1 lít nước loại A cần 50 gam đường, 1 lít nước và $0,6$ gam hương liệu. Để pha chế 1 lít nước loại B cần 20 gam đường, 1 lít nước và $1,5$ gam hương liệu. Mỗi lít nước loại A nhận được 70 điểm thưởng, mỗi lít nước loại B nhận được 90 điểm thưởng. Để đội chơi được số điểm thưởng là lớn nhất thì cần pha chế a lít nước loại A và b lít nước loại B. Tính tổng $a+b$.

Chương IV

ĐÁP ÁN PHẦN TRẮC NGHIỆM NHIỀU PHƯƠNG ÁN

Câu 1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2x + 1$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1, x = 2$ được xác định bằng công thức

Ⓐ $S = \pi \int\limits_1^2 (2x+1)\,\mathrm{d}x$.
Ⓑ $S = \int\limits_1^2 (2x+1)^2\,\mathrm{d}x$.
Ⓒ $S = \pi \int\limits_1^2 (2x+1)^2\,\mathrm{d}x$.
Ⓓ $S = \int\limits_1^2 (2x+1)\,\mathrm{d}x$.

Hướng dẫn giải. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành $y = 0$ và hai đường thẳng $x = a, x = b$ $(a < b)$ được tính theo công thức $S = \int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Với $x \in [1;2]$, ta có $2x + 1 > 0$ nên $|2x + 1| = 2x + 1$.

Vậy công thức tính diện tích là $S = \int\limits_1^2 (2x+1)\,\mathrm{d}x$.

D

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng đi qua gốc tọa độ và nhận một vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (-1;0;3)$ có phương trình tổng quát là

Ⓐ $-x + 3y = 0$.
Ⓑ $-y + 3z = 0$.
Ⓒ $-x + 3z = 0$.
Ⓓ $-x - 3z = 0$.

Hướng dẫn giải. Mặt phẳng đi qua gốc tọa độ $O(0;0;0)$ và nhận $\vec{n} = (-1;0;3)$ làm vectơ pháp tuyến có phương trình tổng quát là: $-1(x-0) + 0(y-0) + 3(z-0) = 0 \Leftrightarrow -x + 3z = 0$.

C

Câu 3. Nghiệm của phương trình $2^{2x+1} = 8$ là

Ⓐ $x = 1$.
Ⓑ $x = \dfrac{5}{2}$.
Ⓒ $x = 3$.
Ⓓ $x = \dfrac{3}{2}$.

Hướng dẫn giải. Ta có: $2^{2x+1} = 8 \Leftrightarrow 2^{2x+1} = 2^3 \Leftrightarrow 2x + 1 = 3 \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1$.

A

Câu 4. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin x + \cos x$ là

Ⓐ $\cos x + \sin x + C$.
Ⓑ $\cos x - \sin x + C$.

Ⓒ $-\cos x-\sin x+C$. Ⓓ $-\cos x+\sin x+C$.

Hướng dẫn giải. Ta có: $\int(\sin x+\cos x)\,\mathrm{d}x=\int\sin x\,\mathrm{d}x+\int\cos x\,\mathrm{d}x=-\cos x+\sin x+C$.

D

Câu 5. Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(ac\neq 0, ad-bc\neq 0)$ có bảng biến thiên như hình sau:

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
y'		$-$		$-$	
y	1	$\searrow$	$-\infty$ | $+\infty$	$\searrow$	1

Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho có phương trình là

Ⓐ $y=-2$. Ⓑ $x=-2$. Ⓒ $y=1$. Ⓓ $x=1$.

Hướng dẫn giải. Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy tại $x=-2$ hàm số không xác định và có giới hạn vô cực: $\lim\limits_{x\to -2^-}y=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to -2^+}y=+\infty$.

Do đó, đường thẳng $x=-2$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

B

Câu 6. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1=2$ và công sai $d=3$. Giá trị của u_5 bằng

Ⓐ 14. Ⓑ 15. Ⓒ 17. Ⓓ 12.

Hướng dẫn giải. Ta có công thức số hạng tổng quát của cấp số cộng: $u_n=u_1+(n-1)d$.

Với $n=5$, ta có $u_5=u_1+4d=2+4\cdot 3=14$.

A

Câu 7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x-4y+3z-9=0$. Vectơ nào sau đây là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P)?

Ⓐ $\vec{n}_3=(-2;4;3)$. Ⓑ $\vec{n}_1=(2;4;3)$.
Ⓒ $\vec{n}_4=(2;-4;3)$. Ⓓ $\vec{n}_2=(2;4;-3)$.

Hướng dẫn giải. Mặt phẳng $(P): Ax+By+Cz+D=0$ có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(A;B;C)$.

Dựa vào phương trình mặt phẳng $(P): 2x-4y+3z-9=0$, ta thấy một vectơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n}_4=(2;-4;3)$.

C

Câu 8. Một người chia thời lượng (đơn vị: giây) thực hiện các cuộc gọi điện thoại của mình trong một tuần thành sáu nhóm và lập bảng tần số ghép nhóm như sau:

Nhóm	$[0;30)$	$[30;60)$	$[60;90)$	$[90;120)$	$[120;150)$	$[150;180)$
Tần số	10	11	8	6	4	1

Tứ phân vị thứ ba Q_3 (đơn vị: giây) của mẫu số liệu ghép nhóm trên bằng

Ⓐ 105. Ⓑ 95. Ⓒ 90. Ⓓ 100.

Hướng dẫn giải. Tổng số cuộc gọi là $n=10+11+8+6+4+1=40$.

Tứ phân vị thứ ba Q_3 là giá trị ở vị trí thứ $\dfrac{3n}{4} = \dfrac{3 \cdot 40}{4} = 30$.
Cộng dồn tần số: $10, 21, 29, 35, 39, 40$.
Giá trị thứ 30 thuộc nhóm $[90; 120)$, do đó nhóm chứa Q_3 là $[90; 120)$.
Ta có: $L = 90, h = 30, n = 40, cf_{k-1} = 29, n_k = 6$.
Áp dụng công thức: $Q_3 = L + \left(\dfrac{\frac{3n}{4} - cf_{k-1}}{n_k}\right) \cdot h = 90 + \left(\dfrac{30 - 29}{6}\right) \cdot 30 = 90 + 5 = 95$.

B

Câu 9. Tập nghiệm của phương trình $\sin x = 1$ là

Ⓐ $S = \left\{\dfrac{\pi}{2} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.
Ⓑ $S = \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.
Ⓒ $S = \{k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
Ⓓ $S = \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Hướng dẫn giải. Phương trình lượng giác cơ bản: $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{\dfrac{\pi}{2} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

A

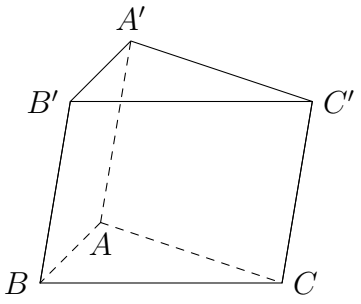
Câu 10. Cho khối chóp $O.ABC$ có OA vuông góc với mặt phẳng (ABC), tam giác ABC vuông tại A và $OA = 2, AB = 3, AC = 6$. Thể tích của khối chóp $O.ABC$ bằng

Ⓐ 12.
Ⓑ 18.
Ⓒ 6.
Ⓓ 36.

Hướng dẫn giải. Diện tích đáy là diện tích tam giác vuông ABC: $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot AB \cdot AC = \dfrac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 = 9$.
Vì $OA \perp (ABC)$ nên OA là chiều cao của khối chóp, $h = OA = 2$.
Thể tích khối chóp là: $V = \dfrac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot h = \dfrac{1}{3} \cdot 9 \cdot 2 = 6$.

C

Câu 11. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ (xem hình bên). Đường thẳng $B'C'$ song song với mặt phẳng nào sau đây?



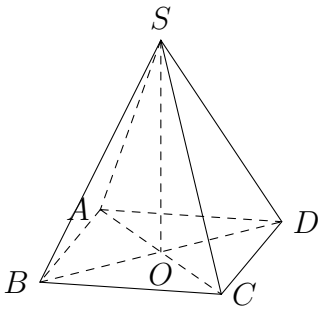
Ⓐ $(A'B'C')$.
Ⓑ $(B'BC')$.
Ⓒ $(AB'C')$.
Ⓓ (ABC).

Hướng dẫn giải. Trong hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, ta có $B'C'$ song song với BC (do $BCC'B'$ là hình bình hành).
Mà $BC \subset (ABC)$ và $B'C' \not\subset (ABC)$, suy ra $B'C' // (ABC)$.

D

Câu 12. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ (xem hình bên). Gọi O là giao điểm của AC và

BD. Phát biểu nào sau đây đúng?

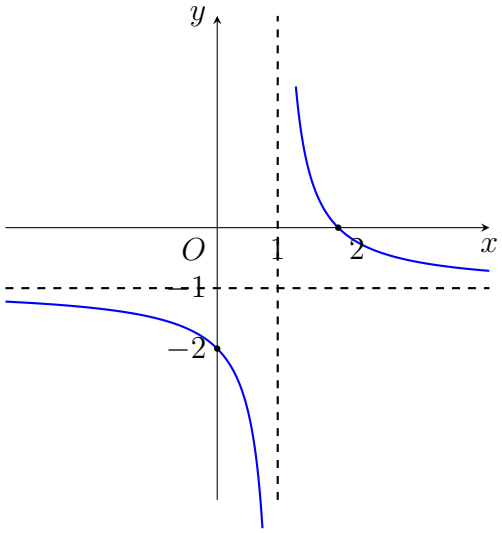


Ⓐ $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}=4\overrightarrow{SO}$.
Ⓑ $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}=2\overrightarrow{SO}$.
Ⓒ $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}=\vec{0}$.
Ⓓ $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}=\overrightarrow{SO}$.

Hướng dẫn giải. Vì O là tâm của hình vuông $ABCD$ nên O là trung điểm của AC và BD.
Theo quy tắc trung điểm, ta có: $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=2\overrightarrow{SO}$ và $\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=2\overrightarrow{SO}$.
Cộng vế theo vế, ta được: $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}=4\overrightarrow{SO}$.

A

Câu 13. Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(ac\neq 0, ad-bc\neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Trong các hệ số a,b,c,d có bao nhiêu số dương?



Ⓐ 2.
Ⓑ 1.
Ⓒ 3.
Ⓓ 0.

Hướng dẫn giải. Dựa vào đồ thị hàm số, ta có:

- Tiệm cận đứng $x=-\dfrac{d}{c}=1>0\Rightarrow c,d$ trái dấu. Giả sử $c>0\Rightarrow d<0$.
- Tiệm cận ngang $y=\dfrac{a}{c}=-1<0\Rightarrow a,c$ trái dấu. Với $c>0\Rightarrow a<0$.
- Giao điểm với trục tung Oy: $x=0\Rightarrow y=\dfrac{b}{d}=-2<0\Rightarrow b,d$ trái dấu. Với $d<0\Rightarrow b>0$.
- Giao điểm với trục hoành Ox: $y=0\Rightarrow x=-\dfrac{b}{a}=2>0\Rightarrow a,b$ trái dấu. (Phù hợp vì $a<0, b>0$).

Vậy nếu $c>0$ thì các dấu là: $a<0, b>0, c>0, d<0$. Có 2 số dương là b,c.

Nếu $c<0$ thì các dấu ngược lại: $a>0, b<0, c<0, d>0$. Có 2 số dương là a, d.
Trong cả hai trường hợp, luôn có đúng 2 số dương trong bộ số a, b, c, d.

A

Câu 14. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ với tâm O. Chọn đẳng thức sai.

Ⓐ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC_1}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{D_1A}=\vec{0}$.
Ⓑ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{AD_1}+\overrightarrow{D_1O}+\overrightarrow{OC_1}$.
Ⓒ $\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}$.
Ⓓ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DD_1}$.

Hướng dẫn giải. Xét các phương án:

- A: $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD})+\overrightarrow{BC_1}+\overrightarrow{D_1A}=\vec{0}+\overrightarrow{BC_1}+\overrightarrow{D_1A}=\overrightarrow{AD_1}+\overrightarrow{D_1A}=\vec{0}$ (Đúng).
- B: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{AC_1}$ và $\overrightarrow{AD_1}+\overrightarrow{D_1O}+\overrightarrow{OC_1}=\overrightarrow{AC_1}$ (Đúng).
- C: Quy tắc hình hộp: $\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}$ (Đúng).
- D: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{AB_1}$ còn $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DD_1}=\overrightarrow{AD_1}$. Vì $AB_1\neq AD_1$ nên đẳng thức này sai.

D

Câu 15. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 1dm, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=\sqrt{2}$dm. Thể tích V của khối chóp $S.ABCD$ là

Ⓐ $V=\dfrac{\sqrt{2}}{3}\text{dm}^3$.
Ⓑ $V=\dfrac{\sqrt{2}}{4}\text{dm}^3$.
Ⓒ $V=\dfrac{\sqrt{2}}{6}\text{dm}^3$.
Ⓓ $V=\sqrt{2}\text{dm}^3$.

Hướng dẫn giải. Diện tích đáy $ABCD$ là $S_{ABCD}=1^2=1\text{dm}^2$.
Chiều cao của khối chóp là $h=SA=\sqrt{2}$dm.
Thể tích khối chóp là $V=\dfrac{1}{3}S_{ABCD}\cdot h=\dfrac{1}{3}\cdot 1\cdot\sqrt{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}\text{dm}^3$.

A

Câu 16. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_3=8$ và công sai $d=3$. Giá trị của u_5 bằng

Ⓐ 17. Ⓑ 14. Ⓒ 12. Ⓓ 15.

Hướng dẫn giải. Ta có công thức liên hệ giữa các số hạng của cấp số cộng: $u_n=u_m+(n-m)d$.
Áp dụng cho $n=5, m=3$: $u_5=u_3+(5-3)d=8+2\cdot 3=14$.

B

Câu 17. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sin 2x+\cos 2x$ là

Ⓐ $2(-\cos 2x+\sin 2x)+C$.
Ⓑ $\dfrac{1}{2}(\cos 2x-\sin 2x)+C$.
Ⓒ $\dfrac{1}{2}(\sin 2x-\cos 2x)+C$.
Ⓓ $2(\cos 2x-\sin 2x)+C$.

Hướng dẫn giải. Ta có: $\displaystyle\int(\sin 2x+\cos 2x)\,\mathrm{d}x=\int\sin 2x\,\mathrm{d}x+\int\cos 2x\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}\sin 2x+C$.
Hay có thể viết lại là: $\dfrac{1}{2}(\sin 2x-\cos 2x)+C$.

C

Câu 18. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng đi qua gốc tọa độ và nhận $\vec{n}=$

$(-4;3;0)$ làm một vectơ pháp tuyến có phương trình tổng quát là

Ⓐ $4x-3z=0$. Ⓑ $-4x+3y=0$.
Ⓒ $-4y+3z=0$. Ⓓ $-4x+3z=0$.

Hướng dẫn giải. Mặt phẳng đi qua gốc tọa độ $O(0;0;0)$ và nhận $\vec{n}=(-4;3;0)$ làm vectơ pháp tuyến có phương trình là: $-4(x-0)+3(y-0)+0(z-0)=0 \Leftrightarrow -4x+3y=0$.

B

Câu 19. Cho tứ diện $ABCD$, G là trọng tâm tam giác ABD. Trên đoạn BC lấy điểm M sao cho $MB=2MC$. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ MG song song (ACB). Ⓑ MG song song (BCD).
Ⓒ MG song song (ABD). Ⓓ MG song song (ACD).

Hướng dẫn giải. Gọi N là trung điểm của AD. Vì G là trọng tâm tam giác ABD nên $G \in BN$ và $\dfrac{BG}{BN}=\dfrac{2}{3}$.

Xét tam giác BNC, ta có $M \in BC$ sao cho $MB=2MC \Rightarrow \dfrac{BM}{BC}=\dfrac{2}{3}$.

Trong tam giác BNC, ta có $\dfrac{BG}{BN}=\dfrac{BM}{BC}=\dfrac{2}{3}$, theo định lí Thales đảo suy ra $MG//NC$.

Mà $NC \subset (ACD)$ và $MG \not\subset (ACD)$, do đó $MG//(ACD)$.

D

Câu 20. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=3x-1$, trục hoành và hai đường thẳng $x=1, x=3$ được xác định bằng công thức nào sau đây?

Ⓐ $S=\displaystyle\int_1^3 (3x-1)^2\,\mathrm{d}x$. Ⓑ $S=\pi\displaystyle\int_1^3 |3x-1|\,\mathrm{d}x$.
Ⓒ $S=\displaystyle\int_1^3 (3x-1)\,\mathrm{d}x$. Ⓓ $S=\pi\displaystyle\int_1^3 (3x-1)^2\,\mathrm{d}x$.

Hướng dẫn giải. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y=f(x)$, trục hoành và các đường thẳng $x=a, x=b$ là $S=\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Với $x \in [1;3]$, ta có $3x-1>0$ nên $|3x-1|=3x-1$.

Vậy $S=\displaystyle\int_1^3 (3x-1)\,\mathrm{d}x$.

C

Câu 21. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x-3z-5=0$. Vectơ nào sau đây là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P)?

Ⓐ $\vec{u}=(2;0;-3)$. Ⓑ $\vec{a}=(2;-3;-5)$.
Ⓒ $\vec{v}=(2;-3;0)$. Ⓓ $\vec{b}=(-2;3;0)$.

Hướng dẫn giải. Mặt phẳng $(P): Ax+By+Cz+D=0$ có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(A;B;C)$.

Từ phương trình $(P): 2x+0y-3z-5=0$, ta có một vectơ pháp tuyến là $\vec{u}=(2;0;-3)$.

A

Câu 22. Một người chia thời lượng (đơn vị: giây) thực hiện các cuộc gọi điện thoại của mình trong một tuần thành sáu nhóm và lập bảng tần số ghép nhóm như sau:

Nhóm	$[0;30)$	$[30;60)$	$[60;90)$	$[90;120)$	$[120;150)$	$[150;180)$
Tần số	11	10	6	8	3	2

Trung vị (đơn vị: giây, làm tròn đến hàng đơn vị) của mẫu số liệu ghép nhóm trên bằng

Ⓐ 57. Ⓑ 31. Ⓒ 90. Ⓓ 27.

Hướng dẫn giải. Tổng số cuộc gọi là $n = 11+10+6+8+3+2 = 40$. Cỡ mẫu $n = 40$.
Vị trí của trung vị là $\dfrac{n}{2} = 20$.
Cộng dồn tần số: $cf_1 = 11, cf_2 = 21$. Vì $cf_1 < 20 < cf_2$ nên nhóm chứa trung vị là nhóm thứ hai $[30;60)$.
Ta có: $L = 30, h = 30, n_2 = 10, cf_1 = 11$.
Trung vị $Me = L + \dfrac{\frac{n}{2} - cf_1}{n_2} \cdot h = 30 + \dfrac{20-11}{10} \cdot 30 = 30 + 0,9 \cdot 30 = 57$.

A

Câu 23. Tập nghiệm của phương trình $\sin 2x = -1$ là

Ⓐ $S = \left\{-\dfrac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. Ⓑ $S = \left\{k\dfrac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.
Ⓒ $S = \left\{-\dfrac{\pi}{2} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. Ⓓ $S = \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Hướng dẫn giải. Ta có: $\sin 2x = -1 \Leftrightarrow 2x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

A

Câu 24. Nghiệm của phương trình $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2x-1} = 27$ là

Ⓐ $x = 3$. Ⓑ $x = 1$. Ⓒ $x = \dfrac{5}{2}$. Ⓓ $x = \dfrac{3}{2}$.

Hướng dẫn giải. Phương trình tương đương với: $3^{-(-2x-1)} = 3^3 \Leftrightarrow 3^{2x+1} = 3^3 \Leftrightarrow 2x+1 = 3 \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1$.

B

Câu 25. Biết $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 3$, khi đó $\displaystyle\int_{-1}^{1} [2f(x)+1]\,\mathrm{d}x$ bằng:

Ⓐ 8. Ⓑ 10. Ⓒ 7. Ⓓ 6.

Hướng dẫn giải. Ta có: $\displaystyle\int_{-1}^{1} [2f(x)+1]\,\mathrm{d}x = 2\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{1} 1\,\mathrm{d}x = 2\cdot 3 + [x]\Big|_{-1}^{1} = 6 + [1-(-1)] = 8$.

A

Câu 26. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(2;-2;1)$, $B(0;1;2)$. Tọa độ điểm M thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho 3 điểm A, B, M thẳng hàng là

Ⓐ $M(4;-5;0)$. Ⓑ $M(2;-3;0)$. Ⓒ $M(4;5;0)$. Ⓓ $M(0;0;1)$.

Hướng dẫn giải. Vì $M \in (Oxy)$ nên $M(x;y;0)$.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-2;3;1)$. Đường thẳng AB đi qua $B(0;1;2)$ có phương trình tham số: $\begin{cases} x = -2t \\ y = 1 + 3t \\ z = 2 + t \end{cases}$.

Vì $M \in AB$ nên tọa độ M ứng với $z = 0 \Rightarrow 2 + t = 0 \Rightarrow t = -2$.
Khi đó $x = -2(-2) = 4$ và $y = 1 + 3(-2) = -5$.
Vậy $M(4;-5;0)$.

A

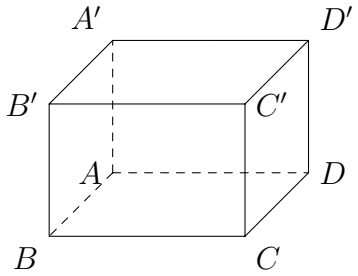
Câu 27. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Biết $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

Ⓐ $a^3\sqrt{3}$. Ⓑ $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. Ⓒ $\dfrac{a^3}{4}$. Ⓓ $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Hướng dẫn giải. Diện tích đáy hình vuông $ABCD$ là $S_{ABCD} = a^2$.
Chiều cao khối chóp là $h = SA = a\sqrt{3}$.
Thể tích khối chóp là $V = \dfrac{1}{3}S_{ABCD} \cdot h = \dfrac{1}{3}a^2 \cdot a\sqrt{3} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

B

Câu 28. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$.



Khẳng định nào đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{AD}$ cùng hướng với $\overrightarrow{B'C'}$. Ⓑ $\overrightarrow{AC'}$ cùng phương với $\overrightarrow{A'C'}$.
Ⓒ $\overrightarrow{CD}$ cùng hướng với $\overrightarrow{D'C'}$. Ⓓ $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{BD'}$.

Hướng dẫn giải. Trong hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$, ta có $AD // B'C'$ và $AD = B'C'$.
Hơn nữa, các vectơ $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{B'C'}$ cùng hướng đi từ trái sang phải.
Vậy $\overrightarrow{AD}$ cùng hướng với $\overrightarrow{B'C'}$.

A

Câu 29. Phương trình $3^{x-2} = \dfrac{1}{9}$ có nghiệm

Ⓐ $x = \dfrac{19}{9}$. Ⓑ $x = 0$. Ⓒ $x = 4$. Ⓓ $x = 2$.

Hướng dẫn giải. Ta có: $3^{x-2} = \dfrac{1}{9} \Leftrightarrow 3^{x-2} = 3^{-2} \Leftrightarrow x - 2 = -2 \Leftrightarrow x = 0$.

B

Câu 30. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-2}{x+1}$ là

Ⓐ $x = -1$. Ⓑ $x = 1$. Ⓒ $x = -2$. Ⓓ $x = 2$.

Hướng dẫn giải. Đường tiệm cận đứng là nghiệm của mẫu số: $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$.

A

Câu 31. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a}=(1;2;3)$, $\vec{b}=(2;2;-1)$. Tọa độ $\vec{a}-2\vec{b}$ là:

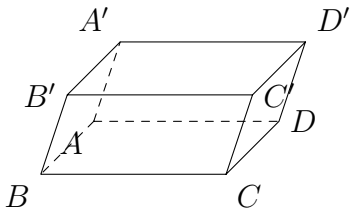
Ⓐ $(-3;-2;1)$. Ⓑ $(3;2;5)$. Ⓒ $(-3;-2;5)$. Ⓓ $(-1;0;4)$.

Hướng dẫn giải. Ta có: $2\vec{b}=(4;4;-2)$.

Suy ra $\vec{a}-2\vec{b}=(1-4;2-4;3-(-2))=(-3;-2;5)$.

C

Câu 32. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.



Đường thẳng AB song song với mặt phẳng nào sau đây?

Ⓐ $(CC'A'A)$. Ⓑ $(BB'C'C)$. Ⓒ $(A'B'C'D')$. Ⓓ $(AA'D'D)$.

Hướng dẫn giải. Trong hình hộp, ta có $AB//A'B'$. Mà $A'B' \subset (A'B'C'D')$ nên $AB//(A'B'C'D')$.

C

Câu 33. Tập nghiệm của phương trình $\sin x=0$

Ⓐ $S=\left\{\dfrac{\pi}{2}+k2\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$. Ⓑ $S=\{k2\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$.

Ⓒ $S=\{k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$. Ⓓ $S=\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Hướng dẫn giải. Phương trình lượng giác cơ bản: $\sin x=0 \Leftrightarrow x=k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

C

Câu 34. Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x)=2\sin x+1$ trên $\mathbb{R}$ là

Ⓐ $2\cos x$. Ⓑ $-2\cos x+x+C$.

Ⓒ $2\cos x+x+C$. Ⓓ $-2\cos x+1+C$.

Hướng dẫn giải. Ta có: $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int(2\sin x+1)\,\mathrm{d}x=-2\cos x+x+C$.

B

Câu 35. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, đường thẳng d đi qua điểm $M(-1;4;6)$, nhận $\vec{u}(3;-2;7)$ làm vectơ chỉ phương có phương trình là

Ⓐ $\frac{x-3}{-1}=\frac{y+2}{4}=\frac{z-7}{6}$. Ⓑ $\frac{x-1}{3}=\frac{y+4}{-2}=\frac{z+6}{7}$.

Ⓒ $\frac{x+3}{-1}=\frac{y-2}{4}=\frac{z+7}{6}$. Ⓓ $\frac{x+1}{3}=\frac{y-4}{-2}=\frac{z-6}{7}$.

Hướng dẫn giải. Đường thẳng d đi qua $M(x_0;y_0;z_0)=M(-1;4;6)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}(a;b;c)=(3;-2;7)$ có phương trình chính tắc là:

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c} \Leftrightarrow \frac{x+1}{3}=\frac{y-4}{-2}=\frac{z-6}{7}.$$

D

Câu 36. Cho cấp số nhân (u_n) thỏa mãn $u_4 = u_1 \cdot 8$. Công bội q của (u_n) bằng

Ⓐ 3. Ⓑ 2. Ⓒ -2. Ⓓ -3.

Hướng dẫn giải. Ta có công thức số hạng tổng quát của cấp số nhân: $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$. Áp dụng cho u_4: $u_4 = u_1 \cdot q^3$. Theo giả thiết $u_4 = u_1 \cdot 8$, suy ra $u_1 \cdot q^3 = u_1 \cdot 8 \Rightarrow q^3 = 8 \Leftrightarrow q = 2$.

B

Câu 37. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$ liên tục trên $[-2;3]$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Biết $\int\limits_{-2}^{1} f'(x)\,\mathrm{d}x = 3$ và diện tích $S = \frac{5}{3}$. Giá trị $f(3) - f(-2)$ bằng

Ⓐ $\frac{4}{3}$. Ⓑ $\frac{14}{3}$. Ⓒ $-\frac{4}{3}$. Ⓓ $-\frac{14}{3}$.

Hướng dẫn giải. Ta có $f(3) - f(-2) = \int\limits_{-2}^{3} f'(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-2}^{1} f'(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{1}^{3} f'(x)\,\mathrm{d}x$.

Dựa vào đồ thị, trên đoạn $[1;3]$ đồ thị hàm số $f'(x)$ nằm hoàn toàn phía dưới trục hoành nên: $\int\limits_{1}^{3} f'(x)\,\mathrm{d}x = -S = -\frac{5}{3}$.

Vậy $f(3) - f(-2) = 3 + \left(-\frac{5}{3}\right) = \frac{4}{3}$.

A

Câu 38. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A và $BC = 2a$, $AA' = 2\sqrt{3}a$, $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

Ⓐ $6a^3$. Ⓑ a^3. Ⓒ $2a^3$. Ⓓ $3a^3$.

Hướng dẫn giải. Trong tam giác vuông ABC tại A: $AB = BC \cdot \cos 60^\circ = 2a \cdot \frac{1}{2} = a$; $AC = BC \cdot \sin 60^\circ = 2a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

Diện tích đáy: $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a\sqrt{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Thể tích khối lăng trụ: $V = S_{ABC} \cdot AA' = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot 2\sqrt{3}a = 3a^3$.

D

Câu 39. Cho $P(A), P(B) > 0$. Công thức xác suất có điều kiện của biến cố A khi biết biến cố B đã xảy ra là

Ⓐ $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(A)}$. Ⓑ $P(A|B) = \frac{P(B)}{P(A)}$.
Ⓒ $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$. Ⓓ $P(A|B) = \frac{P(A)}{P(B)}$.

Hướng dẫn giải. Theo định nghĩa xác suất có điều kiện: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(AB)}{P(B)}$.

C

Câu 40. Tập nghiệm của phương trình $\cot x = \sqrt{3}$ là

Ⓐ $S = \left\{\frac{\pi}{3} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. Ⓑ $S = \left\{\frac{\pi}{6} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.
Ⓒ $S = \left\{\frac{\pi}{6} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. Ⓓ $S = \left\{\frac{\pi}{3} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Hướng dẫn giải. Phương trình $\cot x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \cot x = \cot \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{\frac{\pi}{6} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

B

Câu 41. Cho hình tứ diện $ABCD$ có M, N, O lần lượt là trung điểm của AB, CD, MN. Phát biểu nào sau đây là đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AO}$.
Ⓑ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AO}$.
Ⓒ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 4\overrightarrow{AO}$.
Ⓓ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AO}$.

Hướng dẫn giải. Vì M là trung điểm của AB, N là trung điểm của CD nên với mọi điểm O ta có:
$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OM}$ và $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{ON}$.
Do O là trung điểm của MN nên $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = \vec{0}$.
Suy ra $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}) = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = -\overrightarrow{OA}$.
Khi đó: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}) = (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) - 3\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OA} - 3\overrightarrow{OA} = -4\overrightarrow{OA} = 4\overrightarrow{AO}$.

C

Câu 42. Tập xác định của hàm số $y = \log_2(3 - x)$ là

Ⓐ $(-\infty; 3]$.
Ⓑ $(-\infty; 3)$.
Ⓒ $(2; 3)$.
Ⓓ $(3; +\infty)$.

Hướng dẫn giải. Hàm số $y = \log_2(3 - x)$ xác định khi $3 - x > 0 \Leftrightarrow x < 3$.
Vậy tập xác định của hàm số là $D = (-\infty; 3)$.

B

Câu 43. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có điểm M thuộc đoạn thẳng AC (M không trùng với A hoặc C). Đường thẳng B_1M song song với mặt phẳng nào sau đây?

Ⓐ (CDD_1).
Ⓑ (DA_1C_1).
Ⓒ (ADD_1).
Ⓓ (BDD_1).

Hướng dẫn giải. Xét mặt phẳng (B_1AC) và mặt phẳng (DA_1C_1).
Ta có $B_1C // A_1D$ (do A_1B_1CD là hình bình hành) và $B_1A // C_1D$ (do ABC_1D_1 là hình bình hành).
Suy ra $(B_1AC) // (DA_1C_1)$.
Vì $M \in AC$ nên $B_1M \subset (B_1AC)$.
Do đó $B_1M // (DA_1C_1)$.

B

Câu 44. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) đi qua O và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}(2; -2; 1)$. Khoảng cách từ điểm $M(3; -1; 1)$ đến (P) bằng

Ⓐ 9.
Ⓑ 1.
Ⓒ $\frac{5}{3}$.
Ⓓ 3.

Hướng dẫn giải. Mặt phẳng (P) đi qua $O(0; 0; 0)$ và có $\vec{n}(2; -2; 1)$ nên có phương trình: $2x - 2y + z = 0$.
Khoảng cách từ $M(3; -1; 1)$ đến (P) là: $d(M, (P)) = \frac{|2 \cdot 3 - 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 1|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{9}{3} = 3$.

D

Câu 45. Cho mẫu số liệu ghép nhóm sau:

Nhóm	$[6; 7)$	$[7; 8)$	$[8; 9)$	$[9; 10)$	$[10; 11)$
Tần số	8	12	10	2	3

Tứ phân vị thứ ba (làm tròn đến hàng phần trăm) của mẫu số liệu bằng

Ⓐ $8,63$. Ⓑ $7,79$. Ⓒ $7,76$. Ⓓ $8,57$.

Hướng dẫn giải. Tổng số số liệu là $n = 8 + 12 + 10 + 2 + 3 = 35$.
Vị trí của tứ phân vị thứ ba là $\frac{3n}{4} = \frac{3 \cdot 35}{4} = 26,25$.
Nhóm chứa Q_3 là nhóm $[8;9)$ vì có tần số tích lũy đến nhóm này là $8 + 12 + 10 = 30 > 26,25$.
Ta có $L = 8$ (giới hạn dưới), $n = 35$, $cf_p = 20$ (tần số tích lũy trước nhóm), $f_q = 10$ (tần số nhóm chứa Q_3), $w = 1$ (độ rộng nhóm).
Áp dụng công thức: $Q_3 = L + \frac{\frac{3n}{4} - cf_p}{f_q} \cdot w = 8 + \frac{26,25-20}{10} \cdot 1 = 8,625 \approx 8,63$.

A

Câu 46. Cô Hằng thống kê đường kính thân gỗ của một số cây xoan đào 6 năm tuổi được trồng ở một lâm trường như sau:

Đường kính (cm)	$[45;50)$	$[50;55)$	$[55;60)$	$[60;65)$	$[65;70)$
Tần số	20	18	7	1	3

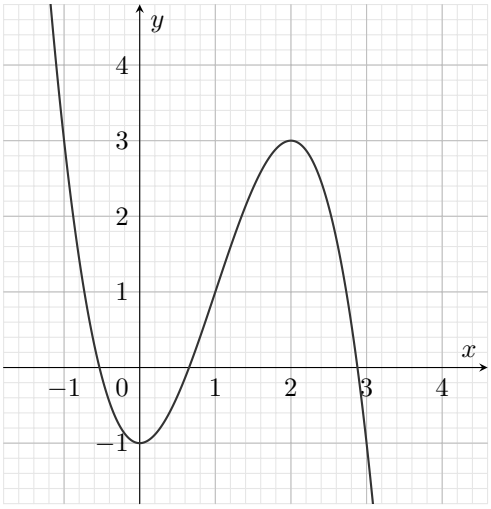
Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm trên là

Ⓐ 25. Ⓑ 5. Ⓒ 20. Ⓓ 18.

Hướng dẫn giải. Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm được tính bằng hiệu giữa đầu mút phải của nhóm cuối cùng và đầu mút trái của nhóm đầu tiên.
Ta có: $R = 70 - 45 = 25$.

A

Câu 47. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình sau đây:



Giá trị cực tiểu của hàm số $y = f(x)$ là

Ⓐ $N(0;-1)$. Ⓑ $y = -1$. Ⓒ $x = 0$. Ⓓ $x = -1$.

Hướng dẫn giải. Dựa vào đồ thị hàm số, ta thấy điểm cực tiểu của đồ thị là $(0;-1)$.
Giá trị cực tiểu của hàm số là tung độ của điểm cực tiểu: $y_{ct} = -1$.

B

Câu 48. Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

Ⓐ $y = 3^{-x}$. Ⓑ $y = 2026^x$. Ⓒ $y = \frac{2x-1}{x-1}$. Ⓓ $y = \log_2 x$.

Hướng dẫn giải. - Hàm số $y = 3^{-x} = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ vì cơ số $0 < \frac{1}{3} < 1$.

- Hàm số $y = 2026^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ vì cơ số $2026 > 1$.
- Hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ có đạo hàm $y' = \frac{-1}{(x-1)^2} < 0$, nghịch biến trên từng khoảng xác định.
- Hàm số $y = \log_2 x$ chỉ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

B

Câu 49. Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{x+3}{2x-4}$ là

Ⓐ $x = \frac{1}{2}$. Ⓑ $y = 2$. Ⓒ $y = \frac{1}{2}$. Ⓓ $x = 2$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x+3}{2x-4} = \dfrac{1}{2}$.
Vậy đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là $y = \frac{1}{2}$.

C

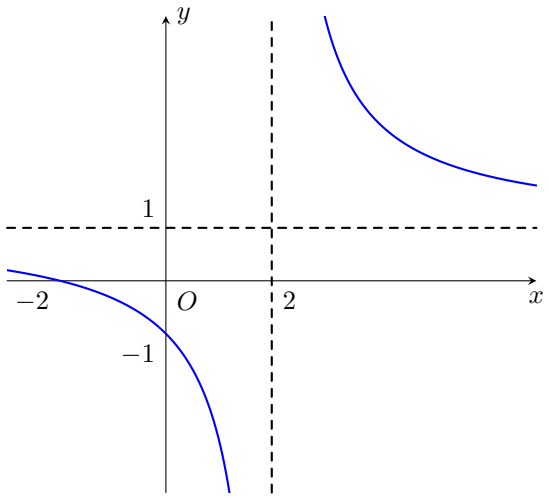
Câu 50. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm M có hình chiếu vuông góc lên mặt phẳng (Oxy) và (Oxz) lần lượt là $M_1(2;3;0)$ và $M_2(2;0;-5)$. Tọa độ của điểm M là

Ⓐ $M(-2;-3;5)$. Ⓑ $M(2;3;-5)$.
Ⓒ $M(2;-5;3)$. Ⓓ $M(2;-3;5)$.

Hướng dẫn giải. Hình chiếu của $M(x;y;z)$ lên mặt phẳng (Oxy) là $M_1(x;y;0) \Rightarrow x = 2, y = 3$.
Hình chiếu của $M(x;y;z)$ lên mặt phẳng (Oxz) là $M_2(x;0;z) \Rightarrow x = 2, z = -5$.
Vậy tọa độ điểm M là $M(2;3;-5)$.

B

Câu 51. Cho hàm số $y = \frac{ax+2}{x+c}$ có đồ thị như hình sau đây:



Tính giá trị của biểu thức $P = a - 2c$.

Ⓐ 5. Ⓑ 3. Ⓒ -3. Ⓓ -5.

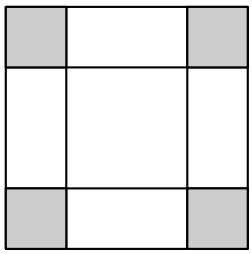
Hướng dẫn giải. Dựa vào đồ thị ta thấy:
- Tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 2 \Rightarrow -c = 2 \Rightarrow c = -2$.
- Tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 1 \Rightarrow \frac{a}{1} = 1 \Rightarrow a = 1$.

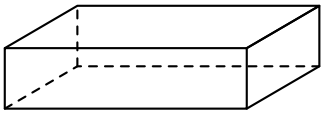
Khi đó $P = a - 2c = 1 - 2(-2) = 1 + 4 = 5$.

A

Câu 52. Bạn An có một tấm bìa hình vuông cạnh 20 cm. Bạn muốn cắt bỏ ở bốn góc bốn hình vuông nhỏ bằng nhau để gấp và dán lại thành một hình hộp chữ nhật không có nắp (tham khảo

hình vẽ). Để hộp có thể tích lớn nhất thì độ dài cạnh của hình vuông nhỏ bị cắt là





Ⓐ $\frac{20}{3}$ cm. Ⓑ $\frac{10}{3}$ cm. Ⓒ 5 cm. Ⓓ 4 cm.

Hướng dẫn giải. Gọi x (cm) là độ dài cạnh của hình vuông nhỏ bị cắt bỏ ($0 < 2x < 20 \Rightarrow 0 < x < 10$).
Khi đó, hình hộp chữ nhật có các kích thước là: đáy là hình vuông cạnh $20 - 2x$ và chiều cao là x.
Thể tích khối hộp là: $V(x) = x(20-2x)^2 = 4x(10-x)^2 = 4(x^3 - 20x^2 + 100x)$.
Xét hàm số $V(x)$ trên $(0;10)$, ta có: $V'(x) = 4(3x^2 - 40x + 100)$.

$$V'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 10 \text{ (loại)} \\ x = \dfrac{10}{3} \text{ (nhận)} \end{array}\right.$$

Lập bảng biến thiên ta thấy thể tích $V(x)$ đạt giá trị lớn nhất khi $x = \frac{10}{3}$.

B

Câu 53. Một cấp số nhân có ba số hạng liên tiếp là $4; 10; a$. Tính $2a$.

Ⓐ 25. Ⓑ 32. Ⓒ 16. Ⓓ 50.

Hướng dẫn giải. Vì $4; 10; a$ là ba số hạng liên tiếp của một cấp số nhân nên ta có: $10^2 = 4 \cdot a \Leftrightarrow 100 = 4a \Leftrightarrow a = 25$.
Vậy $2a = 2 \cdot 25 = 50$.

D

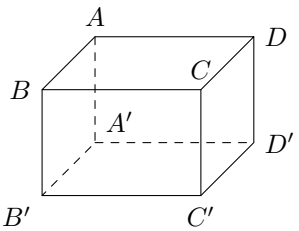
Câu 54. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn (C) có phương trình $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 5$. Tọa độ tâm I và bán kính R của đường tròn (C) là

Ⓐ $I(2;-3), R = \sqrt{5}$. Ⓑ $I(2;-3), R = 5$.
Ⓒ $I(-2;3), R = 5$. Ⓓ $I(-2;3), R = \sqrt{5}$.

Hướng dẫn giải. Phương trình đường tròn có dạng $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$.
Từ phương trình $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 5$, ta suy ra tâm $I(2;-3)$ và bán kính $R = \sqrt{5}$.

A

Câu 55. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Chọn đẳng thức đúng:



Ⓐ $\overrightarrow{DB'} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DD'} + \overrightarrow{DB}$. Ⓑ $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

Ⓒ $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AD}$. Ⓓ $\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DD'}+\overrightarrow{DC}$.

Hướng dẫn giải. Theo quy tắc hình hộp, vectơ đường chéo xuất phát từ một đỉnh bằng tổng ba vectơ cạnh xuất phát từ đỉnh đó.
Đối với đỉnh A, ta có: $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}$.

C

Câu 56. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} & \text{khi } x>1\\ mx+2 & \text{khi } x\le 1\end{cases}$. Tìm giá trị của tham số m để hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ⓐ $\frac{1}{4}$. Ⓑ $-\frac{7}{12}$. Ⓒ $-\frac{7}{4}$. Ⓓ $\frac{1}{12}$.

Hướng dẫn giải. Hàm số liên tục trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$. Để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$, nó phải liên tục tại $x=1$.
Ta có $f(1)=m(1)+2=m+2$.
$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(mx+2)=m+2$.
$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x+3-4}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{\sqrt{x+3}+2}=\dfrac{1}{4}$.
Để hàm số liên tục tại $x=1$ thì $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=f(1)\Leftrightarrow m+2=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow m=-\dfrac{7}{4}$.

C

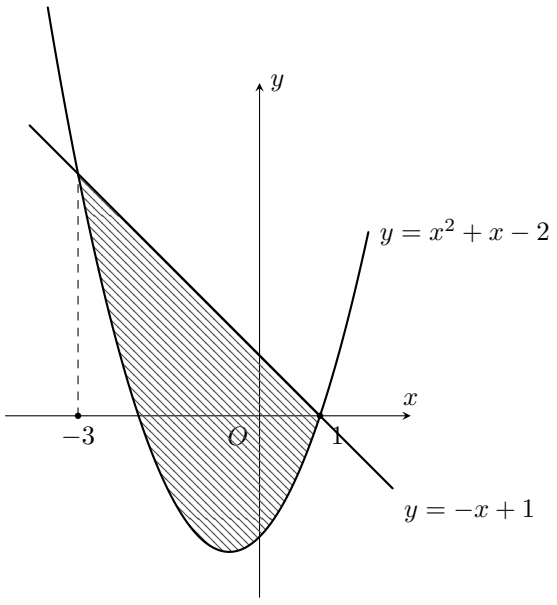
Câu 57. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}=(1;0;1)$, $\vec{b}=(2;0;0)$. Góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là

Ⓐ $30°$. Ⓑ $150°$. Ⓒ $60°$. Ⓓ $45°$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\dfrac{1\cdot 2+0\cdot 0+1\cdot 0}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}\cdot\sqrt{2^2+0^2+0^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{2}\cdot 2}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.
Suy ra $(\vec{a},\vec{b})=45°$.

D

Câu 58. Diện tích phần gạch sọc trong hình vẽ bằng:



Ⓐ $\displaystyle\int_{-3}^{1} |-x^2-2x-3|\,\mathrm{d}x$.
Ⓑ $\displaystyle\int_{-3}^{1} (x^2-2x-3)\,\mathrm{d}x$.
Ⓒ $\displaystyle\int_{-3}^{1} (x^2+2x-3)\,\mathrm{d}x$.
Ⓓ $\displaystyle\int_{-3}^{1} (-x^2-2x+3)\,\mathrm{d}x$.

Hướng dẫn giải. Dựa vào hình vẽ, diện tích phần gạch sọc được giới hạn bởi hai đồ thị hàm số trên đoạn $[-3;1]$.
Trong khoảng $(-3;1)$, đường thẳng $y=-x+1$ nằm phía trên parabol $y=x^2+x-2$.
Diện tích cần tìm là:

$$S=\int_{-3}^{1}[(-x+1)-(x^2+x-2)]\,\mathrm{d}x=\int_{-3}^{1}(-x^2-2x+3)\,\mathrm{d}x.$$

D

Câu 59. Mỗi ngày bác Mạnh đều đi bộ để rèn luyện sức khỏe. Quãng đường đi bộ mỗi ngày của bác trong 20 ngày được thống kê lại ở bảng sau:

Quãng đường	$[2,7;3,0)$	$[3,0;3,3)$	$[3,3;3,6)$	$[3,6;3,9)$	$[3,9;4,2)$
Số ngày	3	6	5	4	2

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm gần nhất với giá trị nào sau đây?

Ⓐ $0,19$. Ⓑ $1,26$. Ⓒ $0,13$. Ⓓ $0,26$.

Hướng dẫn giải. Giá trị đại diện của các nhóm lần lượt là: $x_1=2,85; x_2=3,15; x_3=3,45; x_4=3,75; x_5=4,05$.
Tổng số ngày là $n=3+6+5+4+2=20$.
Số trung bình cộng của mẫu số liệu:

$$\bar{x}=\frac{3\cdot 2,85+6\cdot 3,15+5\cdot 3,45+4\cdot 3,75+2\cdot 4,05}{20}=3,39.$$

Phương sai của mẫu số liệu:

$$s^2=\frac{1}{20}\sum n_i x_i^2-\bar{x}^2=\frac{3\cdot 2,85^2+\cdots+2\cdot 4,05^2}{20}-3,39^2\approx 0,1314.$$

Giá trị gần nhất là $0,13$.

C

Câu 60. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-2)(x+1), \forall x\in\mathbb{R}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

Ⓐ Hàm số đã cho đồng biến trên $(-1;+\infty)$.
Ⓑ Hàm số đã cho nghịch biến trên $(2;+\infty)$.
Ⓒ Hàm số đã cho nghịch biến trên $(-1;2)$.
Ⓓ Hàm số đã cho đồng biến trên $(-1;2)$.

Hướng dẫn giải. Xét dấu đạo hàm $f'(x)=(x-2)(x+1)$:
$f'(x)=0\Leftrightarrow x=-1$ hoặc $x=2$.
Bảng xét dấu $f'(x)$:
- $f'(x)>0$ trên $(-\infty;-1)\cup(2;+\infty)\Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên các khoảng này.
- $f'(x)<0$ trên $(-1;2)\Rightarrow$ Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;2)$.

Vậy mệnh đề đúng là "Hàm số đã cho nghịch biến trên $(-1;2)$".

C

Câu 61. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng đi qua tâm của mặt cầu $(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=12$ và song song với mặt phẳng (Oxz) có phương trình là:

Ⓐ $y+1=0$. Ⓑ $y-2=0$.
Ⓒ $y+2=0$. Ⓓ $x+z-1=0$.

Hướng dẫn giải. Mặt cầu có tâm $I(1;-2;0)$.
Mặt phẳng (Oxz) có phương trình là $y=0$.
Mặt phẳng song song với (Oxz) có phương trình dạng $y+D=0$ $(D\neq 0)$.
Vì mặt phẳng này đi qua tâm $I(1;-2;0)$ nên thay tọa độ I vào ta được: $-2+D=0\Rightarrow D=2$.
Vậy phương trình mặt phẳng là $y+2=0$.

C

Câu 62. Biết đồ thị (C) của hàm số $y=\frac{x^2-4x+5}{x-1}$ có hai điểm cực trị. Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị (C) cắt trục hoành tại điểm M có hoành độ x_M bằng

Ⓐ $x_M=2$. Ⓑ $x_M=1-\sqrt{2}$.
Ⓒ $x_M=1$. Ⓓ $x_M=1+\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải. Đối với hàm số phân thức bậc hai trên bậc nhất $y=\frac{u(x)}{v(x)}$, đường thẳng đi qua hai điểm cực trị có phương trình là $y=\frac{u'(x)}{v'(x)}$.
Ta có $u(x)=x^2-4x+5\Rightarrow u'(x)=2x-4$.
$v(x)=x-1\Rightarrow v'(x)=1$.
Phương trình đường thẳng đi qua hai cực trị là: $y=\frac{2x-4}{1}=2x-4$.
Điểm M thuộc trục hoành nên $y_M=0\Rightarrow 2x_M-4=0\Rightarrow x_M=2$.

A

Câu 63. Với a là số thực dương tùy ý, $\log_3 2+\log_3 a$ bằng

Ⓐ $\log_3 2\cdot\log_3 a$. Ⓑ $\log_3(a+2)$.
Ⓒ $\log_3 a^2$. Ⓓ $\log_3(2a)$.

Hướng dẫn giải. Ta có công thức: $\log_c A+\log_c B=\log_c(A\cdot B)$.
Áp dụng: $\log_3 2+\log_3 a=\log_3(2\cdot a)=\log_3(2a)$.

D

Câu 64. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ:

x	$-\infty$		2		6		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	10	↘	0	↗	$+\infty$

Hàm số nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây?

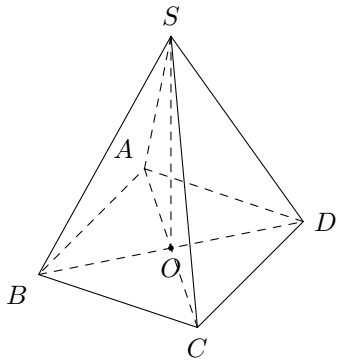
Ⓐ $(-\infty;2)$. Ⓑ $(6;+\infty)$. Ⓒ $(2;6)$. Ⓓ $(-\infty;6)$.

Hướng dẫn giải. Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy trên khoảng $(2;6)$, đạo hàm $f'(x)<0$ (mang dấu trừ) và đồ thị hàm số đi xuống.
Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(2;6)$.

C

Câu 65. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O. Giao tuyến giữa hai mặt

phẳng (SAC) và (SBD) là đường thẳng



Ⓐ SA. Ⓑ SB. Ⓒ SO. Ⓓ SC.

Hướng dẫn giải. Xét hai mặt phẳng (SAC) và (SBD):
- Điểm S là điểm chung thứ nhất.
- Trong mặt phẳng đáy $(ABCD)$, gọi O là giao điểm của AC và BD. Vì $O \in AC \subset (SAC)$ và $O \in BD \subset (SBD)$ nên O là điểm chung thứ hai.

Vậy giao tuyến là đường thẳng SO.

C

Câu 66. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho vectơ $\vec{a} = (1; -2; 0)$ và $\vec{b} = 2\vec{a}$. Tìm tọa độ của vectơ $\vec{b}$.

Ⓐ $\vec{b} = (2; 4; 2)$. Ⓑ $\vec{b} = (2; -4; 0)$.
Ⓒ $\vec{b} = (3; 0; 2)$. Ⓓ $\vec{b} = (2; 4; 0)$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\vec{a} = (1; -2; 0) \Rightarrow \vec{b} = 2\vec{a} = (2 \cdot 1; 2 \cdot (-2); 2 \cdot 0) = (2; -4; 0)$.

B

Câu 67. Phương trình $\sin x = \sin \frac{\pi}{5}$ có tập nghiệm là

Ⓐ $S = \left\{\frac{\pi}{5} + k2\pi; \frac{4\pi}{5} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
Ⓑ $S = \left\{\frac{1}{5} + k2\pi; \frac{4}{5} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
Ⓒ $S = \left\{\frac{\pi}{5} + k2\pi; -\frac{\pi}{5} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
Ⓓ $S = \left\{\frac{1}{5} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Hướng dẫn giải. Phương trình $\sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

Với $\alpha = \frac{\pi}{5}$, ta có: $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{5} + k2\pi \\ x = \pi - \dfrac{\pi}{5} + k2\pi = \dfrac{4\pi}{5} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

A

Câu 68. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = -3; u_6 = 27$. Tính công sai d.

Ⓐ $d = 7$. Ⓑ $d = 5$. Ⓒ $d = 8$. Ⓓ $d = 6$.

Hướng dẫn giải. Sử dụng công thức số hạng tổng quát: $u_n = u_1 + (n-1)d$.
Thay $n = 6$ vào: $u_6 = u_1 + 5d \Leftrightarrow 27 = -3 + 5d \Leftrightarrow 5d = 30 \Leftrightarrow d = 6$.

D

Câu 69. Trong không gian $Oxyz$, một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(P)\colon 2x+3y-z+5=0$ là

Ⓐ $\vec{n}_1=(3;-2;-1)$. Ⓑ $\vec{n}_2=(2;-3;-1)$.
Ⓒ $\vec{n}_3=(-1;3;2)$. Ⓓ $\vec{n}_4=(2;3;-1)$.

Hướng dẫn giải. Mặt phẳng $(P)\colon Ax+By+Cz+D=0$ có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(A;B;C)$.
Từ phương trình mặt phẳng $(P)\colon 2x+3y-z+5=0$, ta có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_4=(2;3;-1)$.

D

Câu 70. Một đội văn nghệ có 6 bạn nam và 4 bạn nữ. Có bao nhiêu cách chọn gồm 1 bạn nam và 1 bạn nữ để thể hiện một tiết mục song ca?

Ⓐ 45. Ⓑ 10. Ⓒ 24. Ⓓ 90.

Hướng dẫn giải. Số cách chọn 1 bạn nam từ 6 bạn nam là 6 cách.
Số cách chọn 1 bạn nữ từ 4 bạn nữ là 4 cách.
Theo quy tắc nhân, số cách chọn một cặp nam - nữ là $6\cdot 4=24$ cách.

C

Câu 71. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2-4$, trục hoành và hai đường thẳng $x=-2$; $x=2$ bằng

Ⓐ $S=\pi\displaystyle\int_{-2}^{2}(x^2-4)\,\mathrm{d}x$. Ⓑ $S=\displaystyle\int_{-2}^{2}|x^2-4|\,\mathrm{d}x$.
Ⓒ $S=\displaystyle\int_{-2}^{2}(x^2-4)\,\mathrm{d}x$. Ⓓ $S=\pi\displaystyle\int_{-2}^{2}(x^2-4)^2\,\mathrm{d}x$.

Hướng dẫn giải. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ $(a<b)$ được tính theo công thức $S=\displaystyle\int_{a}^{b}|f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Áp dụng với $f(x)=x^2-4$, trên đoạn $[-2;2]$, ta có $S=\displaystyle\int_{-2}^{2}|x^2-4|\,\mathrm{d}x$.

B

Câu 72. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x-1)>2$ là

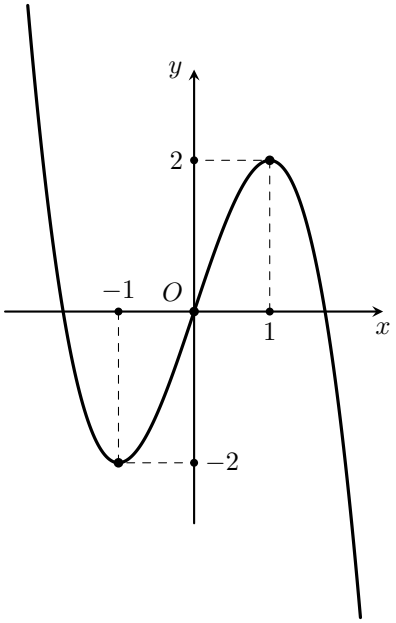
Ⓐ $S=\left(\frac{5}{4};+\infty\right)$. Ⓑ $S=\left(-\infty;\frac{5}{4}\right)$.
Ⓒ $S=\left(1;\frac{5}{4}\right)$. Ⓓ $S=(1;5)$.

Hướng dẫn giải. Điều kiện xác định: $x-1>0\Leftrightarrow x>1$.
Bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x-1)>2\Leftrightarrow x-1<\left(\frac{1}{2}\right)^2$ (do cơ số $0<\frac{1}{2}<1$).
$\Leftrightarrow x-1<\frac{1}{4}\Leftrightarrow x<\frac{5}{4}$.
Kết hợp với điều kiện $x>1$, tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left(1;\frac{5}{4}\right)$.

C

Câu 73. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $[-1;1]$ và có đồ thị như hình vẽ. Tìm

giá trị x_0 để hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị lớn nhất trên $[-1; 1]$.



Ⓐ $x_0 = -2$. Ⓑ $x_0 = 2$. Ⓒ $x_0 = -1$. Ⓓ $x_0 = 1$.

Hướng dẫn giải. Dựa vào đồ thị hàm số trên đoạn $[-1; 1]$, ta thấy điểm cao nhất của đồ thị là điểm có tọa độ $(1; 2)$.
Giá trị lớn nhất $M = 2$ đạt được tại $x_0 = 1$.

D

Câu 74. Để đánh giá chất lượng dịch vụ tài xế công nghệ của hãng X, người ta ghi lại thời gian chờ của các khách hàng được thể hiện trong bảng sau:

Thời gian chờ (phút)	$[1; 2, 5)$	$[2, 5; 4)$	$[4; 5, 5)$	$[5, 5; 7)$	$[7; 8, 5)$
Số khách hàng	10	5	23	6	3

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu trên gần nhất với giá trị nào sau đây?

Ⓐ $2, 3$. Ⓑ $1, 9$. Ⓒ $2, 6$. Ⓓ $3, 1$.

Hướng dẫn giải. Tổng số khách hàng $n = 10 + 5 + 23 + 6 + 3 = 47$.
- Tứ phân vị thứ nhất Q_1 ở vị trí thứ $11, 75$. Nhóm chứa Q_1 là $[2, 5; 4)$.
$Q_1 = 2, 5 + \frac{11,75-10}{5} \cdot 1, 5 = 3, 025$.
- Tứ phân vị thứ ba Q_3 ở vị trí thứ $35, 25$. Nhóm chứa Q_3 là $[4; 5, 5)$.
$Q_3 = 4 + \frac{35,25-15}{23} \cdot 1, 5 \approx 5, 321$.
Khoảng tứ phân vị $\Delta_Q = Q_3 - Q_1 \approx 5, 321 - 3, 025 = 2, 296$.
Giá trị này gần nhất với $2, 3$.

A

Câu 75. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2^x$ là

Ⓐ $\frac{2^{x+1}}{x+1} + C$. Ⓑ $\frac{2^x}{\ln 2} + C$.
Ⓒ $\frac{2^x}{x} + C$. Ⓓ $x \cdot 2^{x-1} + C$.

Hướng dẫn giải. Áp dụng công thức nguyên hàm cơ bản: $\int a^x \, \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C$.

Với $a=2$, ta có $\int 2^x \,\mathrm{d}x = \dfrac{2^x}{\ln 2} + C$.

B

Câu 76. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

Ⓐ 3. Ⓑ 2. Ⓒ -2. Ⓓ -3.

Hướng dẫn giải. Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số đạt cực đại tại điểm $x=3$.
Giá trị cực đại của hàm số là $y_{C\text{Đ}} = f(3) = 2$.

B

Câu 77. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_2=2; u_5=11$. Công sai d của cấp số cộng là

Ⓐ 1. Ⓑ 2. Ⓒ 4. Ⓓ 3.

Hướng dẫn giải. Ta có công thức: $u_5 = u_2 + (5-2)d = u_2 + 3d$.
Thay số vào: $11 = 2 + 3d \Rightarrow 3d = 9 \Rightarrow d = 3$.

D

Câu 78. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x+1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

Ⓐ $(-1;+\infty)$. Ⓑ $(1;+\infty)$. Ⓒ $(-\infty;-1)$. Ⓓ $(-\infty;1)$.

Hướng dẫn giải. Hàm số nghịch biến khi $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x+1<0 \Leftrightarrow x<-1$.
Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

C

Câu 79. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng d đi qua điểm $M(1;-1;3)$ và song song với đường thẳng $\Delta\colon \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+3}{-1}$ có phương trình là

Ⓐ $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-1+t \\ z=3-t \end{cases}$. Ⓑ $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-1+t \\ z=3+t \end{cases}$.

Ⓒ $\begin{cases} x=2+t \\ y=1-t \\ z=-1+3t \end{cases}$. Ⓓ $\begin{cases} x=1+2t \\ y=1+t \\ z=3-t \end{cases}$.

Hướng dẫn giải. Đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u}_\Delta = (2;1;-1)$.
Vì $d // \Delta$ nên d nhận $\vec{u}_d = \vec{u}_\Delta = (2;1;-1)$ làm vectơ chỉ phương.

Đường thẳng d đi qua $M(1;-1;3)$ có phương trình tham số: $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-1+t \\ z=3-t \end{cases}$.

A

Câu 80. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(9-x^2)<0$ chứa bao nhiêu số nguyên?

Ⓐ 1. Ⓑ 5. Ⓒ 3. Ⓓ 4.

Hướng dẫn giải. Điều kiện: $9-x^2>0 \Leftrightarrow -3<x<3$.

Bất phương trình $\Leftrightarrow 9-x^2>\left(\frac{1}{2}\right)^0=1$ (do cơ số $\frac{1}{2}<1$).

$\Leftrightarrow x^2<8 \Leftrightarrow -2\sqrt{2}<x<2\sqrt{2}$.

Vì $2\sqrt{2}\approx 2,82$, nên các giá trị nguyên thỏa mãn là $x\in\{-2;-1;0;1;2\}$.

Có tất cả 5 số nguyên.

B

Câu 81. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u}=(1;-4;0)$ và $\vec{v}=(-1;-2;1)$. Vectơ $\vec{u}+3\vec{v}$ có tọa độ là

Ⓐ $(-2;-10;3)$. Ⓑ $(-2;-6;3)$.
Ⓒ $(-4;-8;4)$. Ⓓ $(-2;-10;-3)$.

Hướng dẫn giải. Ta có $3\vec{v}=(3\cdot(-1);3\cdot(-2);3\cdot 1)=(-3;-6;3)$.

$\vec{u}+3\vec{v}=(1+(-3);-4+(-6);0+3)=(-2;-10;3)$.

A

Câu 82. Tâm đối xứng của đồ thị hàm số $y=\frac{3x+1}{x-2}$ có tọa độ là

Ⓐ $(3;-2)$. Ⓑ $(3;2)$. Ⓒ $(-2;3)$. Ⓓ $(2;3)$.

Hướng dẫn giải. Hàm số $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ có tâm đối xứng là giao điểm của hai đường tiệm cận.

Tiệm cận đứng: $x=-\frac{d}{c}=2$. Tiệm cận ngang: $y=\frac{a}{c}=3$.

Vậy tâm đối xứng có tọa độ là $(2;3)$.

D

Câu 83. Cho hàm số $f(x)=x^2+\sin x+1$. Biết rằng $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và thỏa mãn $F(0)=1$. Khi đó $F(x)$ bằng

Ⓐ $F(x)=x^3-\cos x+x+2$. Ⓑ $F(x)=\frac{x^3}{3}-\cos x+x+2$.
Ⓒ $F(x)=\frac{x^3}{3}+\cos x+x$. Ⓓ $F(x)=\frac{x^3}{3}+\cos x+2$.

Hướng dẫn giải. Ta có $F(x)=\int(x^2+\sin x+1)\,\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}-\cos x+x+C$.

Theo giả thiết $F(0)=1$, suy ra: $\frac{0^3}{3}-\cos 0+0+C=1 \Leftrightarrow -1+C=1 \Leftrightarrow C=2$.

Vậy $F(x)=\frac{x^3}{3}-\cos x+x+2$.

B

Câu 84. Cho mẫu số liệu ghép nhóm ở bảng sau. Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép

nhóm (làm tròn đến hàng phần trăm) là:

Nhóm	Tần số
$[20;30)$	3
$[30;40)$	7
$[40;50)$	6
$[50;60)$	4
$[60;70)$	5
	$n=25$

Ⓐ $19,15$. Ⓑ $21,32$. Ⓒ $20,07$. Ⓓ $22,23$.

Hướng dẫn giải. Số phần tử của mẫu là $n=25$.

- Tứ phân vị thứ nhất Q_1: Vị trí thứ $0,25\cdot 25=6,25$. Nhóm chứa Q_1 là $[30;40)$.

$Q_1=30+\frac{6,25-3}{7}\cdot 10\approx 34,64$.

- Tứ phân vị thứ ba Q_3: Vị trí thứ $0,75\cdot 25=18,75$. Nhóm chứa Q_3 là $[50;60)$.

$Q_3=50+\frac{18,75-16}{4}\cdot 10=56,875$.

Khoảng tứ phân vị $\Delta_Q=Q_3-Q_1=56,875-34,6428\cdots\approx 22,23$.

D

Câu 85. Người ta thống kê lại đường kính thân gỗ của một số cây xoan đào 6 năm tuổi được trồng ở một lâm trường ở bảng sau:

Đường kính (cm)	$[40;45)$	$[45;50)$	$[50;55)$	$[55;60)$	$[60;65)$
Tần số	5	20	18	7	3

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm trên là

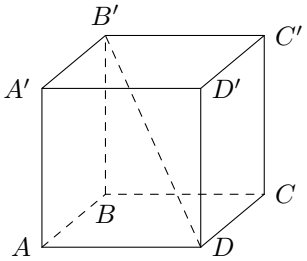
Ⓐ 25. Ⓑ 30. Ⓒ 6. Ⓓ $69,8$.

Hướng dẫn giải. Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm là hiệu giữa đầu mút phải của nhóm cuối cùng và đầu mút trái của nhóm đầu tiên.

Ta có $R=65-40=25$.

A

Câu 86. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ (xem hình vẽ). Phát biểu nào sau đây là đúng?



Ⓐ $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{AD}$. Ⓑ $\overrightarrow{DB'}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DD'}+\overrightarrow{DC}$.

Ⓒ $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$. Ⓓ $\overrightarrow{DB'}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DD'}+\overrightarrow{DC}$.

Hướng dẫn giải. Theo quy tắc hình hộp, Xét đường chéo DB', ta có $\overrightarrow{DB'}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DD'}$.

B

Câu 87. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng nào?

Ⓐ $(-\infty;-1)$. Ⓑ $(-2;4)$. Ⓒ $(2;+\infty)$. Ⓓ $(-1;2)$.

Hướng dẫn giải. Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy trên khoảng $(-1;2)$, đạo hàm $f'(x)>0$ (mang dấu $+$) và đồ thị hàm số đi lên.
Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;2)$.

D

Câu 88. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2;-1;4)$ và mặt phẳng $(P)\colon 3x-2y+z+1=0$. Phương trình của mặt phẳng đi qua M và song song với mặt phẳng (P) là

Ⓐ $2x-2y+4z-21=0$. Ⓑ $x-2z+1=0$.
Ⓒ $10x+9y+5z-74=0$. Ⓓ $3x-2y+z-12=0$.

Hướng dẫn giải. Mặt phẳng song song với mặt phẳng $(P)\colon 3x-2y+z+1=0$ nên có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(3;-2;1)$.
Phương trình mặt phẳng đi qua $M(2;-1;4)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(3;-2;1)$ là:

$$3(x-2)-2(y+1)+1(z-4)=0\Leftrightarrow 3x-2y+z-12=0.$$

D

Câu 89. Điều tra về mức lương khởi điểm (đơn vị: triệu đồng) của 20 công nhân, ta có bảng số liệu sau:

Mức lương	$[5;6)$	$[6;7)$	$[7;8)$	$[8;9)$	$[9;10)$
Tần số	4	5	5	4	2

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là (làm tròn đến hàng phần trăm):

Ⓐ $s^2=0,63$. Ⓑ $s^2=2,52$. Ⓒ $s^2=1,26$. Ⓓ $s^2=1,59$.

Hướng dẫn giải. - Giá trị đại diện x_i của các nhóm lần lượt là: $5;5;6;5;7;5;8;5;9;5$.
- Số trung bình: $\bar{x}=\frac{4\cdot 5,5+5\cdot 6,5+5\cdot 7,5+4\cdot 8,5+2\cdot 9,5}{20}=7,25$.
- Phương sai: $s^2=\frac{1}{20}[4\cdot 5,5^2+5\cdot 6,5^2+5\cdot 7,5^2+4\cdot 8,5^2+2\cdot 9,5^2]-7,25^2=1,5875\approx 1,59$.

D

Câu 90. Hàm số nào sau đây không là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=3x^2+2x-1$?

Ⓐ $F(x)=x^3+x^2-1$. Ⓑ $F(x)=x^3+x^2-x$.
Ⓒ $F(x)=x^3+x^2-x+2025$. Ⓓ $F(x)=x^3+x^2-x-1$.

Hướng dẫn giải. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$ là:

$$\int (3x^2 + 2x - 1)\,\mathrm{d}x = x^3 + x^2 - x + C.$$

Đáp án A không có thành phần $-x$ nên không phải là nguyên hàm của $f(x)$.

A

Câu 91. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $M(1;1;1), N(2;3;4), P(7;7;5)$. Tìm tọa độ điểm Q để tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành

Ⓐ $Q(6;5;2)$. Ⓑ $Q(-6;-5;-2)$.
Ⓒ $Q(-2;-3;-4)$. Ⓓ $Q(-4;-3;0)$.

Hướng dẫn giải. Tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành khi $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$.

Ta có $\overrightarrow{MN} = (1;2;3)$. Gọi $Q(x;y;z)$, ta có $\overrightarrow{QP} = (7-x;7-y;5-z)$.

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP} \Leftrightarrow \begin{cases} 7-x=1 \\ 7-y=2 \\ 5-z=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=5 \\ z=2 \end{cases} \Rightarrow Q(6;5;2).$$

A

Câu 92. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = \frac{1}{4}$ và công sai $d = -\frac{1}{4}$. Tổng 5 số hạng đầu tiên của cấp số cộng là

Ⓐ $S_5 = \frac{5}{4}$. Ⓑ $S_5 = \frac{4}{5}$. Ⓒ $S_5 = -\frac{5}{4}$. Ⓓ $S_5 = -\frac{4}{5}$.

Hướng dẫn giải. Áp dụng công thức tổng n số hạng đầu tiên của cấp số cộng: $S_n = \frac{n}{2}[2u_1 + (n-1)d]$.

Với $n = 5$, ta có:

$$S_5 = \frac{5}{2}\left[2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)\right] = \frac{5}{2}\left[\frac{1}{2} - 1\right] = \frac{5}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{4}.$$

C

Câu 93. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 2$ và $u_4 = 16$. Công bội của cấp số nhân đã cho bằng

Ⓐ $q = 4$. Ⓑ $q = 2$. Ⓒ $q = -2$. Ⓓ $q = -4$.

Hướng dẫn giải. Ta có công thức số hạng tổng quát của cấp số nhân: $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$.

Áp dụng cho u_4: $u_4 = u_1 \cdot q^3 \Leftrightarrow 16 = 2 \cdot q^3 \Leftrightarrow q^3 = 8 \Leftrightarrow q = 2$.

B

Câu 94. Cho khối lăng trụ đứng có cạnh bên bằng 5, đáy là hình vuông có cạnh bằng 4. Hỏi thể tích của khối lăng trụ bằng bao nhiêu?

Ⓐ 100. Ⓑ 20. Ⓒ 64. Ⓓ 80.

Hướng dẫn giải. Diện tích đáy của hình lăng trụ là: $S = 4^2 = 16$.

Thể tích khối lăng trụ đứng là: $V = S \cdot h = 16 \cdot 5 = 80$.

D

Câu 95. Cho hàm số đa thức bậc ba $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

Giá trị cực đại của hàm số $y = f(x)$ bằng

Ⓐ $y_{CĐ} = -2$. Ⓑ $y_{CĐ} = 2$. Ⓒ $y_{CĐ} = -1$. Ⓓ $y_{CĐ} = 1$.

Hướng dẫn giải. Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy đạo hàm đổi dấu từ dương sang âm khi qua điểm $x = -1$.
Giá trị cực đại của hàm số là $y(-1) = 2$.

B

Câu 96. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 2z - 3 = 0$. Tìm tọa độ tâm I và bán kính R của (S).

Ⓐ $I(2;-1;1)$ và $R = 3$. Ⓑ $I(-2;1;-1)$ và $R = 3$.
Ⓒ $I(2;-1;1)$ và $R = 9$. Ⓓ $I(-2;1;-1)$ và $R = 9$.

Hướng dẫn giải. Phương trình mặt cầu có dạng $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$.
Ta có $a = 2, b = -1, c = 1, d = -3$.
Tâm $I(a;b;c) = I(2;-1;1)$.
Bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d} = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2 - (-3)} = \sqrt{4 + 1 + 1 + 3} = \sqrt{9} = 3$.

A

Câu 97. Mệnh đề nào **sai** trong các mệnh đề sau?

Ⓐ $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = -\cot x + C$. Ⓑ $\displaystyle\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C$.
Ⓒ $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \tan x + C$. Ⓓ $\displaystyle\int \sin x\,\mathrm{d}x = \cos x + C$.

Hướng dẫn giải. Công thức đúng là $\displaystyle\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C$.
Vậy mệnh đề D là sai.

D

Câu 98. Với a là số thực dương tùy ý, $\log_{\sqrt{3}}(9a^3)$ bằng

Ⓐ $4 + 6\log_3 a$. Ⓑ $1 + \frac{3}{2}\log_3 a$. Ⓒ $4 - 6\log_3 a$. Ⓓ $1 - \frac{3}{2}\log_3 a$.

Hướng dẫn giải. Ta có: $\log_{\sqrt{3}}(9a^3) = \log_{3^{1/2}}(3^2 \cdot a^3) = 2 \cdot \log_3(3^2 \cdot a^3) = 2 \cdot (\log_3 3^2 + \log_3 a^3) = 2(2 + 3\log_3 a) = 4 + 6\log_3 a$.

A

Câu 99. Phương trình $\cot 3x = \cot x$ có các nghiệm là

Ⓐ $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. Ⓑ $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
Ⓒ $x = \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$. Ⓓ $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Hướng dẫn giải. Điều kiện: $\begin{cases}\sin 3x \neq 0\\ \sin x \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3x \neq k\pi\\ x \neq k\pi\end{cases} \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{3}$.

Phương trình $\cot 3x = \cot x \Leftrightarrow 3x = x + k\pi \Leftrightarrow 2x = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

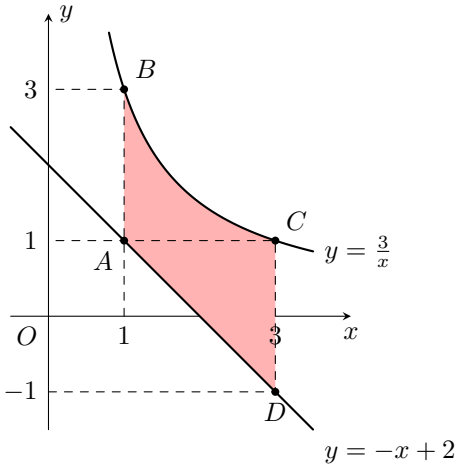
Kết hợp điều kiện:

- Nếu k chẵn ($k = 2m$): $x = m\pi$, loại vì không thỏa mãn điều kiện.
- Nếu k lẻ ($k = 2m + 1$): $x = \frac{(2m+1)\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + m\pi$, thỏa mãn điều kiện.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

D

Câu 100. Hình thang cong $ABCD$ ở hình vẽ bên có diện tích bằng



Ⓐ $\int\limits_1^3 \left(\frac{3}{x} - x + 2\right) \mathrm{d}x$.

Ⓑ $\int\limits_1^3 \left(\frac{3}{x} - x - 2\right) \mathrm{d}x$.

Ⓒ $\int\limits_1^3 \left(\frac{3}{x} + x + 2\right) \mathrm{d}x$.

Ⓓ $\int\limits_1^3 \left(\frac{3}{x} + x - 2\right) \mathrm{d}x$.

Hướng dẫn giải. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = \frac{3}{x}$, đường thẳng $y = -x+2$ và hai đường thẳng $x = 1, x = 3$ là:

$$S = \int\limits_1^3 \left|\frac{3}{x} - (-x + 2)\right| \mathrm{d}x = \int\limits_1^3 \left(\frac{3}{x} + x - 2\right) \mathrm{d}x$$

(Vì trên đoạn $[1; 3]$, đồ thị hàm số $y = \frac{3}{x}$ nằm trên đường thẳng $y = -x + 2$).

D

Câu 101. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P): $2x - y - 2z + 3 = 0$. Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(4; 1; -3)$ và vuông góc với (P) có phương trình chính tắc là

Ⓐ $\frac{x+4}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{-2}$.

Ⓑ $\frac{x-2}{4} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{-3}$.

Ⓒ $\frac{x+2}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{-2}$.

Ⓓ $\frac{x-4}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+3}{-2}$.

Hướng dẫn giải. Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_P = (2; -1; -2)$.

Vì đường thẳng $\Delta \perp (P)$ nên Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u}_\Delta = \vec{n}_P = (2; -1; -2)$.

Đường thẳng Δ đi qua $M(4; 1; -3)$ có phương trình chính tắc là: $\frac{x-4}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+3}{-2}$.

D

Câu 102. Cho mẫu số liệu ghép nhóm về điểm số và số học sinh như bảng sau.

Điểm số	$[2;4)$	$[4;6)$	$[6;8)$	$[8;10)$	$[10;12)$	$[12;14)$
Số học sinh	7	3	8	10	7	10

Tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm đã cho (làm tròn đến hàng phần trăm).

Ⓐ $7,31$. Ⓑ $5,33$. Ⓒ $2,74$. Ⓓ $2,59$.

Hướng dẫn giải. Tổng số học sinh là $n = 7+3+8+10+7+10 = 45$.

- Tìm Q_1: Vị trí $\frac{n}{4} = 11,25$. Nhóm chứa Q_1 là $[6;8)$.

Ta có $L = 6, n = 45, cf = 10, f = 8, h = 2 \Rightarrow Q_1 = 6 + \frac{11,25-10}{8} \cdot 2 = 6,3125$.

- Tìm Q_3: Vị trí $\frac{3n}{4} = 33,75$. Nhóm chứa Q_3 là $[10;12)$.

Ta có $L = 10, n = 45, cf = 28, f = 7, h = 2 \Rightarrow Q_3 = 10 + \frac{33,75-28}{7} \cdot 2 \approx 11,6428$.

Khoảng tứ phân vị: $\Delta_Q = Q_3 - Q_1 \approx 11,6428 - 6,3125 = 5,3303 \approx 5,33$.

B

Câu 103. Tìm đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \frac{3x^2+4x-5}{x-1}$.

Ⓐ $y = x-1$. Ⓑ $y = 3x+3$. Ⓒ $y = 5x+10$. Ⓓ $y = 3x+7$.

Hướng dẫn giải. Ta thực hiện phép chia đa thức: $\frac{3x^2+4x-5}{x-1} = 3x+7+\frac{2}{x-1}$.

Vì $\lim\limits_{x\to\infty}[y-(3x+7)] = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x-1} = 0$.

Vậy đường tiệm cận xiên là $y = 3x+7$.

D

Câu 104. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x-2y+z-5=0$. Điểm nào dưới đây thuộc (P)?

Ⓐ $P(0;0;-5)$. Ⓑ $M(1;1;6)$. Ⓒ $Q(2;-1;5)$. Ⓓ $N(-5;0;0)$.

Hướng dẫn giải. Thay tọa độ các điểm vào phương trình mặt phẳng $(P)\colon x-2y+z-5=0$:

- Thay $M(1;1;6)$ vào: $1-2(1)+6-5=0$ (thỏa mãn).
- Thay $P(0;0;-5)$ vào: $0-2(0)+(-5)-5=-10\neq 0$.
- Thay $Q(2;-1;5)$ vào: $2-2(-1)+5-5=4\neq 0$.
- Thay $N(-5;0;0)$ vào: $-5-2(0)+0-5=-10\neq 0$.

Vậy điểm M thuộc mặt phẳng (P).

B

Câu 105. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào sau đây là phương trình tổng quát của mặt phẳng?

Ⓐ $2x+y^2+z+1=0$. Ⓑ $x^2+y+z+2=0$.
Ⓒ $2x+y+z+3=0$. Ⓓ $2x+y+z^2+4=0$.

Hướng dẫn giải. Phương trình tổng quát của mặt phẳng có dạng $Ax+By+Cz+D=0$ (A, B, C không đồng thời bằng 0). Đây là phương trình bậc nhất đối với ba biến x, y, z. Trong các phương án đã cho, chỉ có phương trình $2x+y+z+3=0$ là bậc nhất đối với cả x, y, z.

C

Câu 106. Thời gian (phút) đọc sách mỗi ngày của 60 học sinh được cho trong bảng sau

Thời gian (phút)	$[10;15)$	$[15;20)$	$[20;25)$	$[25;30)$	$[30;35)$
Số học sinh	3	10	12	15	20

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm (làm tròn đến hàng phần trăm) là

Ⓐ $6,18$. Ⓑ $7,2$. Ⓒ $5,3$. Ⓓ $6,45$.

Hướng dẫn giải. - Giá trị đại diện các nhóm lần lượt là: $x_1 = 12,5$; $x_2 = 17,5$; $x_3 = 22,5$; $x_4 = 27,5$; $x_5 = 32,5$.
- Cỡ mẫu $n = 3 + 10 + 12 + 15 + 20 = 60$.
- Số trung bình: $\bar{x} = \frac{3\cdot 12,5+10\cdot 17,5+12\cdot 22,5+15\cdot 27,5+20\cdot 32,5}{60} = 25,75$.
- Phương sai: $s^2 = \frac{1}{60}\sum n_i x_i^2 - \bar{x}^2 = \frac{42075}{60} - 25,75^2 = 38,1875$.
- Độ lệch chuẩn: $s = \sqrt{38,1875} \approx 6,18$.

A

Câu 107. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, không âm trên đoạn $[a;b]$ như hình vẽ. Hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ quay quanh trục Ox tạo thành một khối tròn xoay có thể tích bằng

Ⓐ $V = \pi \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Ⓑ $V = \displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Ⓒ $V = \displaystyle\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$. Ⓓ $V = \pi \displaystyle\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$.

Hướng dẫn giải. Theo công thức tính thể tích khối tròn xoay, khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ $(y \geq 0)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ quanh trục Ox, ta được thể tích $V = \pi \displaystyle\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$.

D

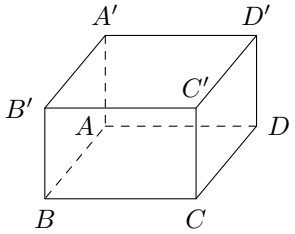
Câu 108. Cho tập $M = \{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$. Số các số tự nhiên gồm 4 chữ số phân biệt lập từ M là

Ⓐ $4!$. Ⓑ A_9^4. Ⓒ 4^9. Ⓓ C_9^4.

Hướng dẫn giải. Mỗi số tự nhiên gồm 4 chữ số phân biệt được lập từ tập M có 9 phần tử là một chỉnh hợp chập 4 của 9. Vậy số các số lập được là A_9^4.

B

Câu 109. Trong không gian, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

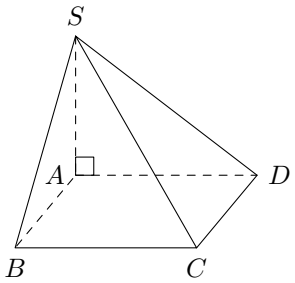


Ⓐ $\overrightarrow{CA'}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CC'}$.
Ⓑ $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}$.
Ⓒ $\overrightarrow{BD'}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BB'}$.
Ⓓ $\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}$.

Hướng dẫn giải. Theo quy tắc hình hộp, ta có $\overrightarrow{BD'}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB'}$. Vì $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BD}$ nên $\overrightarrow{BD'}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BB'}$. Đẳng thức ở phương án C ghi là $\overrightarrow{BD'}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BB'}$ là sai vì nó tương đương với $2\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BB'}$.

C

Câu 110. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và $SA\perp(ABCD)$. Đường thẳng nào sau đây vuông góc với SA?

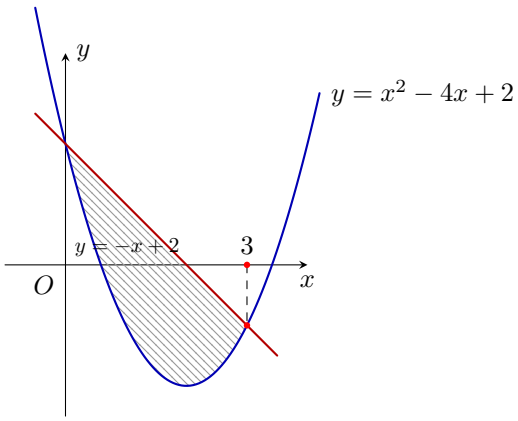


Ⓐ SC.
Ⓑ BD.
Ⓒ SB.
Ⓓ SD.

Hướng dẫn giải. Vì $SA\perp(ABCD)$ nên SA vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng $(ABCD)$. Mà đường thẳng BD nằm trong mặt phẳng $(ABCD)$ nên $SA\perp BD$.

B

Câu 111. Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào dưới đây?



Ⓐ $\displaystyle\int_0^3 (x^2-3x)\,\mathrm{d}x$.
Ⓑ $\displaystyle\int_0^3 (-x^2+3x)\,\mathrm{d}x$.
Ⓒ $\displaystyle\int_0^3 (x^2-4x+2)\,\mathrm{d}x-\int_0^3 (-x+2)\,\mathrm{d}x$.
Ⓓ $\displaystyle\int_0^3 (-x+2)\,\mathrm{d}x+\int_0^3 (x^2-4x+2)\,\mathrm{d}x$.

Hướng dẫn giải. Xét phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng và parabol: $x^2-4x+2=$

$-x+2 \Leftrightarrow x^2-3x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=3 \end{array}\right.$

Trên đoạn $[0;3]$, dựa vào hình vẽ ta thấy đường thẳng $y=-x+2$ nằm phía trên parabol $y=x^2-4x+2$. Do đó, diện tích S được tính bằng công thức:

$$S=\int_0^3 [(-x+2)-(x^2-4x+2)]\,\mathrm{d}x=\int_0^3 (-x^2+3x)\,\mathrm{d}x.$$

B

Câu 112. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a}=(1;2;-3)$. Độ dài của vectơ $\vec{a}$ là

Ⓐ $\sqrt{13}$. Ⓑ 0. Ⓒ $\sqrt{14}$. Ⓓ $\sqrt{12}$.

Hướng dẫn giải. Độ dài của vectơ $\vec{a}=(x;y;z)$ được tính theo công thức $|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.
Ta có: $|\vec{a}|=\sqrt{1^2+2^2+(-3)^2}=\sqrt{1+4+9}=\sqrt{14}$.

C

Câu 113. Cho cấp số nhân (u_n) biết $u_1=2, u_2=1$. Công bội của cấp số nhân đó là

Ⓐ -2. Ⓑ 2. Ⓒ $-\frac{1}{2}$. Ⓓ $\frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải. Công bội q của cấp số nhân thỏa mãn $u_2=u_1\cdot q \Rightarrow q=\frac{u_2}{u_1}=\frac{1}{2}$.

D

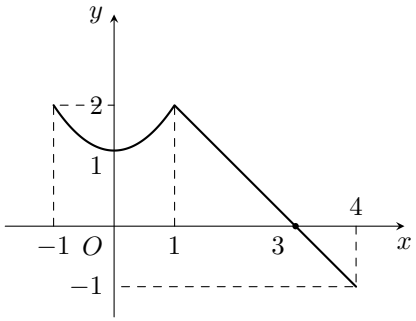
Câu 114. Tích phân $\int_0^1 e^x\,\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ e. Ⓑ $e-1$. Ⓒ $\frac{e-1}{2}$. Ⓓ e^2-1.

Hướng dẫn giải. Ta có: $\int_0^1 e^x\,\mathrm{d}x=e^x\Big|_0^1=e^1-e^0=e-1$.

B

Câu 115. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

Ⓐ $(0;1)$. Ⓑ $(1;2)$. Ⓒ $(0;3)$. Ⓓ $(1;4)$.

Hướng dẫn giải. Dựa vào đồ thị hàm số, trên khoảng $(0;1)$, đồ thị có hướng đi lên từ trái sang phải, do đó hàm số đồng biến trên khoảng $(0;1)$.

A

Câu 116. Cho khối chóp có thể tích bằng 18 cm^3 và diện tích đáy bằng 9 cm^2. Chiều cao của khối chóp đó là

Ⓐ 2 cm. Ⓑ 6 cm. Ⓒ 3 cm. Ⓓ 4 cm.

Hướng dẫn giải. Thể tích khối chóp là $V = \frac{1}{3}S_{\text{đáy}} \cdot h \Rightarrow h = \frac{3V}{S_{\text{đáy}}} = \frac{3 \cdot 18}{9} = 6$ cm.

B

Câu 117. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(3x+1) < 2$ là

Ⓐ $\left[-\frac{1}{3}; 1\right)$. Ⓑ $\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$. Ⓒ $\left(-\frac{1}{3}; 1\right)$. Ⓓ $(-\infty; 1)$.

Hướng dẫn giải. Điều kiện xác định: $3x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{3}$.
Bất phương trình tương đương: $3x+1 < 2^2 \Leftrightarrow 3x < 3 \Leftrightarrow x < 1$.
Kết hợp điều kiện, tập nghiệm là $S = \left(-\frac{1}{3}; 1\right)$.

C

Câu 118. Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$ là

Ⓐ $\tan x + C$. Ⓑ $-\cot x + C$. Ⓒ $\cot x + C$. Ⓓ $-\tan x + C$.

Hướng dẫn giải. Ta có công thức nguyên hàm cơ bản: $\int -\frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \cot x + C$.

C

Câu 119. Một mẫu số liệu ghép nhóm về chiều cao của một lớp (đơn vị là centimet) có phương sai là $6,25$. Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu đó bằng

Ⓐ $2,5$ cm. Ⓑ $12,5$ cm. Ⓒ $3,125$ cm. Ⓓ $42,25$ cm.

Hướng dẫn giải. Độ lệch chuẩn s được tính bằng căn bậc hai của phương sai s^2. Ta có $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{6,25} = 2,5$ cm.

A

Câu 120. Tập xác định của hàm số $y = \log_{\frac{1}{5}}(x-2)$ là

Ⓐ $(-\infty; +\infty)$. Ⓑ $(2; +\infty)$. Ⓒ $[2; +\infty)$. Ⓓ $\left(\frac{1}{5}; +\infty\right)$.

Hướng dẫn giải. Hàm số $y = \log_a f(x)$ xác định khi $f(x) > 0$. Điều kiện xác định: $x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$. Vậy tập xác định của hàm số là $D = (2; +\infty)$.

B

Câu 121. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình sau:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	4	↘	$-\infty$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

Ⓐ $(1; 2)$. Ⓑ $(-2; +\infty)$. Ⓒ $(-1; 2)$. Ⓓ $(-\infty; 0)$.

Hướng dẫn giải. Dựa vào bảng biến thiên, hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$ và $(0; +\infty)$. Xét các phương án:

- Khoảng $(1;2) \subset (0;+\infty)$, do đó hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;2)$.
- Các phương án còn lại đều chứa khoảng hàm số đồng biến hoặc không nằm hoàn toàn trong khoảng nghịch biến.

A

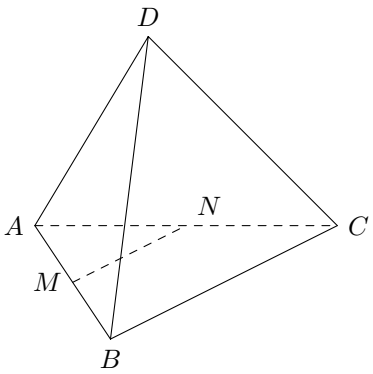
Câu 122. Cho $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 2$ và $\int_0^2 g(x)\,\mathrm{d}x = 3$. Tích phân $\int_0^2 [2f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ 5. Ⓑ 7. Ⓒ -1. Ⓓ 1.

Hướng dẫn giải. Ta có: $\int_0^2 [2f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x = 2\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^2 g(x)\,\mathrm{d}x = 2 \cdot 2 - 3 = 1$.

D

Câu 123. Cho tứ diện $ABCD$ có M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC. Mặt phẳng nào sau đây song song với đường thẳng MN?



Ⓐ (ACD). Ⓑ (ABD). Ⓒ (ABC). Ⓓ (BCD).

Hướng dẫn giải. Xét tam giác ABC, M và N lần lượt là trung điểm của AB và AC. Suy ra MN là đường trung bình của tam giác $ABC \Rightarrow MN // BC$. Mà $BC \subset (BCD)$ và $MN \not\subset (BCD)$, do đó $MN // (BCD)$.

D

Câu 124. Trong không gian $Oxyz$, phương trình của mặt cầu có tâm O và đi qua điểm $M(1;2;-2)$ là

Ⓐ $x^2 + y^2 + z^2 = 9$. Ⓑ $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
Ⓒ $x^2 + y^2 + z^2 = 0$. Ⓓ $x^2 + y^2 + z^2 = 3$.

Hướng dẫn giải. Bán kính mặt cầu $R = OM = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{1+4+4} = 3$. Phương trình mặt cầu tâm $O(0;0;0)$ bán kính $R = 3$ là: $x^2 + y^2 + z^2 = 3^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

A

Câu 125. Hàm số $y = \frac{x^2+2x+4}{x+2}$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

Ⓐ $(-2;0)$. Ⓑ $(-\infty;-2)$. Ⓒ $(0;+\infty)$. Ⓓ $(-4;0)$.

Hướng dẫn giải. Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Ta có $y' = \frac{(2x+2)(x+2)-(x^2+2x+4)}{(x+2)^2} = \frac{2x^2+6x+4-x^2-2x-4}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4x}{(x+2)^2}$.

$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -4 \end{array}\right.$

Bảng xét dấu y':

x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-4;-2)$ và $(-2;0)$. Đối chiếu các phương án, chọn A.

A

Câu 126. Biết rằng $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[1;4]$ và $F(4)=9, F(1)=3$. Giá trị của $\displaystyle\int_1^4 [f(x)+2]\,\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ 0. Ⓑ 8. Ⓒ -4. Ⓓ 12.

Hướng dẫn giải. Ta có: $\displaystyle\int_1^4 [f(x)+2]\,\mathrm{d}x = \int_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_1^4 2\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_1^4 + 2x\Big|_1^4$.
$= (F(4)-F(1)) + (2\cdot 4 - 2\cdot 1) = (9-3)+(8-2) = 6+6 = 12$.

D

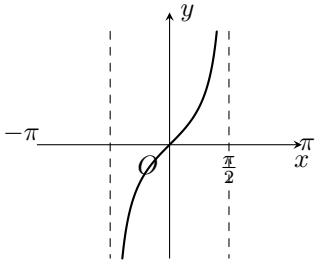
Câu 127. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3(x-2)<1$ là

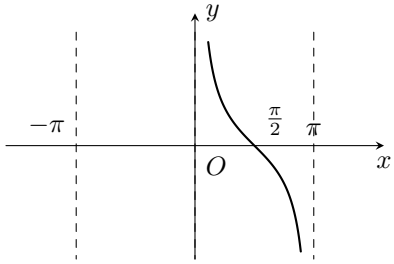
Ⓐ $(5;+\infty)$. Ⓑ $(-\infty;5)$. Ⓒ $(0;5)$. Ⓓ $(2;5)$.

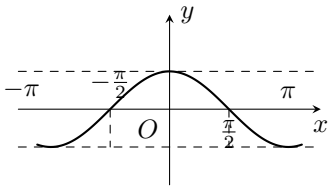
Hướng dẫn giải. Điều kiện xác định: $x-2>0 \Leftrightarrow x>2$.
Bất phương trình $\log_3(x-2)<1 \Leftrightarrow x-2<3^1 \Leftrightarrow x<5$.
Kết hợp điều kiện ta được $2<x<5$. Vậy tập nghiệm là $S=(2;5)$.

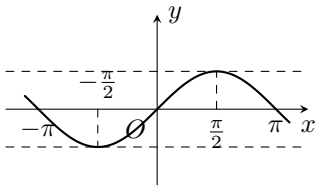
D

Câu 128. Đồ thị nào dưới đây là đồ thị của hàm số $y=\sin x$?

Ⓐ 

Ⓑ 

Ⓒ 

Ⓓ 

Hướng dẫn giải. Hàm số $y=\sin x$ có đồ thị đi qua gốc tọa độ $O(0;0)$, đạt cực đại tại $x=\frac{\pi}{2}$ (giá trị bằng 1) và cực tiểu tại $x=-\frac{\pi}{2}$ (giá trị bằng -1). Đối chiếu 4 hình vẽ, ta thấy hình D thỏa mãn các đặc điểm này.

D

Câu 129. Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a}=(2;-1;0)$, $\vec{b}=(-1;-3;2)$, $\vec{c}=(-2;-4;-3)$. Tọa độ của vectơ $\vec{u}=2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}$ là

Ⓐ $(3;7;9)$. Ⓑ $(-3;-7;-9)$.
Ⓒ $(5;3;-9)$. Ⓓ $(-5;-3;9)$.

Hướng dẫn giải. Ta có:

- $2\vec{a} = (4; -2; 0)$
- $-3\vec{b} = (3; 9; -6)$
- $\vec{c} = (-2; -4; -3)$

Cộng vế theo vế các tọa độ: $\vec{u} = (4 + 3 - 2; -2 + 9 - 4; 0 - 6 - 3) = (5; 3; -9)$.

C

Câu 130. Mỗi ngày ông An đều đi bộ để rèn luyện sức khỏe. Quãng đường đi bộ mỗi ngày (đơn vị: km) của ông An trong 20 ngày được thống kê lại ở bảng sau:

Quãng đường (km)	$[2,7; 3,0)$	$[3,0; 3,3)$	$[3,3; 3,6)$	$[3,6; 3,9)$	$[3,9; 4,2]$
Số ngày	3	6	5	4	2

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu trên là

Ⓐ $1,2$. Ⓑ $0,9$. Ⓒ $1,5$. Ⓓ $0,3$.

Hướng dẫn giải. Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm là hiệu giữa đầu mút phải của nhóm cuối cùng và đầu mút trái của nhóm đầu tiên.
Ta có: $R = 4,2 - 2,7 = 1,5$.

C

Câu 131. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ có bảng biến thiên như hình bên. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu đường tiệm cận ngang?

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$-$		$-$	
y	2	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	-2

Ⓐ 0. Ⓑ 2. Ⓒ 3. Ⓓ 1.

Hướng dẫn giải. Dựa vào bảng biến thiên, ta có:

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2 \Rightarrow y = 2$ là một đường tiệm cận ngang.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -2 \Rightarrow y = -2$ là một đường tiệm cận ngang.

Vậy đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận ngang.

B

Câu 132. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục Ox và các đường thẳng $x = a, x = b$ là

Ⓐ $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$. Ⓑ $\left|\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|$.

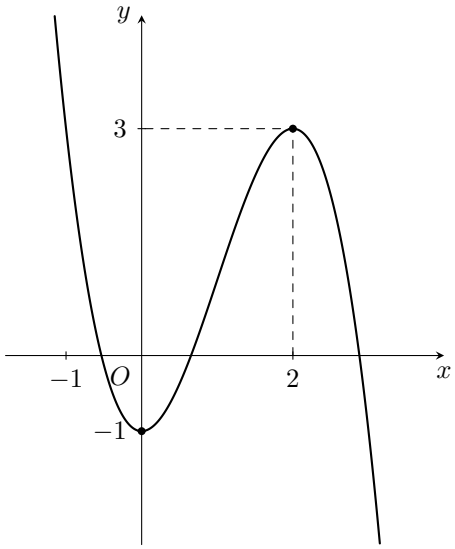
Ⓒ $\pi \displaystyle\int_a^b [f(x)]^2\,\mathrm{d}x$. Ⓓ $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Hướng dẫn giải. Theo công thức tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$,

trục hoành và hai đường thẳng $x=a, x=b$ là $S=\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

A

Câu 133. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



Ⓐ $(-1;2)$. Ⓑ $(2;+\infty)$. Ⓒ $(-1;3)$. Ⓓ $(0;2)$.

Hướng dẫn giải. Dựa vào đồ thị, hàm số đồng biến khi đồ thị đi lên từ trái sang phải.

Ta thấy trên khoảng $(0;2)$, đồ thị hàm số đi lên từ điểm cực tiểu $(0;-1)$ đến điểm cực đại $(2;3)$. Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

D

Câu 134. Cho cấp số nhân (u_n) với số hạng đầu $u_1=6$ và công bội $q=-\frac{1}{2}$. Tính u_5.

Ⓐ $\frac{3}{8}$. Ⓑ -3. Ⓒ $-\frac{3}{8}$. Ⓓ $\frac{4}{3}$.

Hướng dẫn giải. Số hạng tổng quát của cấp số nhân là $u_n=u_1\cdot q^{n-1}$.

Áp dụng cho $n=5$: $u_5=6\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{5-1}=6\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^4=6\cdot\frac{1}{16}=\frac{3}{8}$.

A

Câu 135. Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^x<\frac{1}{8}$ là

Ⓐ $(3;+\infty)$. Ⓑ $(-\infty;3)$. Ⓒ $[3;+\infty)$. Ⓓ $(-\infty;3]$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\left(\frac{1}{2}\right)^x<\frac{1}{8}\Leftrightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^x<\left(\frac{1}{2}\right)^3$.

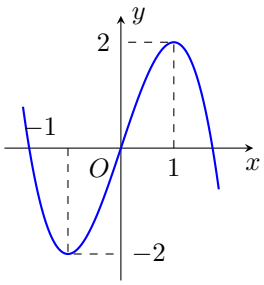
Vì cơ số $a=\frac{1}{2}<1$ nên bất phương trình đổi chiều: $x>3$.

Vậy tập nghiệm là $(3;+\infty)$.

A

Câu 136. Cho hàm số có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào

sau đây?



Ⓐ $(-\infty;-1)$. Ⓑ $(-\infty;1)$. Ⓒ $(-1;1)$. Ⓓ $(1;+\infty)$.

Hướng dẫn giải. Dựa vào đồ thị, trong khoảng $(-1;1)$, đồ thị hàm số đi lên từ trái sang phải. Do đó, hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;1)$.

C

Câu 137. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và $SA \perp (ABCD)$. Đường thẳng nào sau đây vuông góc với mặt phẳng (SAD)?

Ⓐ SC. Ⓑ SB. Ⓒ BC. Ⓓ CD.

Hướng dẫn giải. Vì $ABCD$ là hình chữ nhật nên $CD \perp AD$.

Mặt khác, $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp CD$.

Ta có $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD)$.

D

Câu 138. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho vectơ $\vec{u} = \vec{j} - 4\vec{k}$. Tọa độ vectơ $\vec{u}$ là

Ⓐ $(1;-4)$. Ⓑ $(0;1;-4)$. Ⓒ $(1;0;-4)$. Ⓓ $(0;-1;4)$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \Leftrightarrow \vec{u} = (x;y;z)$.

Ở đây $\vec{u} = 0 \cdot \vec{i} + 1 \cdot \vec{j} - 4 \cdot \vec{k} \Rightarrow \vec{u} = (0;1;-4)$.

B

Câu 139. Cho $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 1$ và $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = -4$. Tích phân $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ 5. Ⓑ -3. Ⓒ -5. Ⓓ 3.

Hướng dẫn giải. Ta có $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x + \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$.

$\Rightarrow \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x - \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = -4 - 1 = -5$.

C

Câu 140. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào sau đây là phương trình tổng quát của mặt phẳng?

Ⓐ $2x + y^2 + z + 1 = 0$. Ⓑ $x^2 + y + z + 2 = 0$.
Ⓒ $2x + y + z + 3 = 0$. Ⓓ $2x + y + z^2 + 4 = 0$.

Hướng dẫn giải. Phương trình tổng quát của mặt phẳng có dạng bậc nhất: $Ax+By+Cz+D = 0$.

Phương trình $2x+y+z+3=0$ thỏa mãn dạng này. Các câu còn lại đều có biến bậc hai (y^2, x^2, z^2).

C

Câu 141. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^{4x+3}$ là

Ⓐ $e^{4x+3}+C$. Ⓑ $4e^{4x+3}+C$.
Ⓒ $(4x+3)e^{4x+2}$. Ⓓ $\frac{1}{4}e^{4x+3}+C$.

Hướng dẫn giải. Áp dụng công thức nguyên hàm cơ bản: $\int e^{ax+b}\mathrm{d}x=\frac{1}{a}e^{ax+b}+C$.
Với $f(x)=e^{4x+3}$, ta có $\int e^{4x+3}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}e^{4x+3}+C$.

D

Câu 142. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;-1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P): 2x-2y-z-8=0$ có phương trình là

Ⓐ $(S):(x+1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=9$.
Ⓑ $(S):(x+1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=3$.
Ⓒ $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=3$.
Ⓓ $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$.

Hướng dẫn giải. Bán kính mặt cầu bằng khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng (P): $R=d(I,(P))=\frac{|2\cdot1-2\cdot2-(-1)-8|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+(-1)^2}}=\frac{|2-4+1-8|}{3}=\frac{|-9|}{3}=3$.
Phương trình mặt cầu tâm $I(1;2;-1)$, bán kính $R=3$ là: $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$.

D

Câu 143. Phương trình $2^x=7$ có nghiệm là

Ⓐ $x=\log_2 7$. Ⓑ $x=\log_7 2$. Ⓒ $x=3$. Ⓓ $x=2$.

Hướng dẫn giải. Theo định nghĩa lôgarit: $a^x=b\Leftrightarrow x=\log_a b$ (với $0<a\neq1, b>0$).
Do đó, $2^x=7\Leftrightarrow x=\log_2 7$.

A

Câu 144. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, đường thẳng nào sau đây có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(2;3;-1)$?

Ⓐ $\begin{cases}x=1-4t\\y=2-6t\\z=-1+2t\end{cases}$. Ⓑ $\begin{cases}x=1+4t\\y=2+6t\\z=-1-4t\end{cases}$.
Ⓒ $\begin{cases}x=1-2t\\y=2-3t\\z=-1-t\end{cases}$. Ⓓ $\begin{cases}x=1+2t\\y=2-3t\\z=-1-t\end{cases}$.

Hướng dẫn giải. Vectơ chỉ phương của đường thẳng trong câu A là $\vec{a}=(-4;-6;2)=-2(2;3;-1)$.
Vì $\vec{a}$ cùng phương với $\vec{u}=(2;3;-1)$ nên đường thẳng ở đáp án A nhận $\vec{u}$ làm VTCP.

A

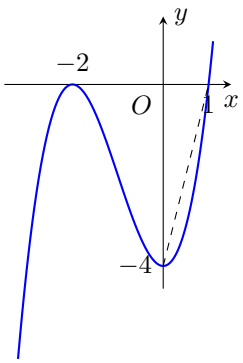
Câu 145. Hàm số nào sau đây **không** có cực trị?

Ⓐ $y=\frac{x^2-3}{x-2}$. Ⓑ $y=\frac{2x-1}{x+2}$.
Ⓒ $y=x^3-2x-1$. Ⓓ $y=-x^4-x^2+1$.

Hướng dẫn giải. Xét hàm số bậc nhất trên bậc nhất $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ (với $ad - bc \neq 0$).
Ta có $y' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$ luôn cùng dấu trên từng khoảng xác định (không đổi dấu và không bằng 0).
Do đó, hàm số $y = \frac{2x-1}{x+2}$ không có cực trị.

B

Câu 146. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



Ⓐ $(0; +\infty)$. Ⓑ $(-1; +\infty)$. Ⓒ $(-2; 0)$. Ⓓ $(-4; +\infty)$.

Hướng dẫn giải. Dựa vào đồ thị, hàm số đi lên từ trái sang phải trên các khoảng $(-\infty; -2)$ và $(0; +\infty)$.
Đối chiếu các phương án, khoảng $(0; +\infty)$ thỏa mãn.

A

Câu 147. Cho cấp số nhân (u_n), biết $u_1 = 1; u_4 = 64$. Tìm công bội q của cấp số nhân.

Ⓐ $q = 2$. Ⓑ $q = 8$. Ⓒ $q = 4$. Ⓓ $q = 2\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải. Số hạng tổng quát của cấp số nhân là $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$.
Áp dụng cho $n = 4$: $u_4 = u_1 \cdot q^3 \Leftrightarrow 64 = 1 \cdot q^3 \Leftrightarrow q^3 = 4^3 \Leftrightarrow q = 4$.

C

Câu 148. Tập xác định của hàm số $y = \log_2(x - 3)$ là

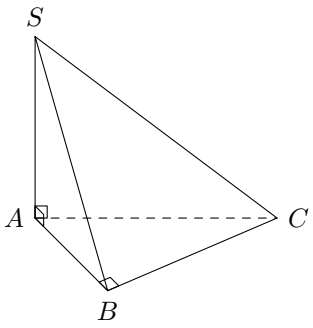
Ⓐ $(3; +\infty)$. Ⓑ $(0; 3)$. Ⓒ $[3; +\infty)$. Ⓓ $[0; 3]$.

Hướng dẫn giải. Điều kiện xác định: $x - 3 > 0 \Leftrightarrow x > 3$.
Vậy tập xác định của hàm số là $D = (3; +\infty)$.

A

Câu 149. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B và cạnh bên SA vuông

góc với mặt phẳng đáy. Phát biểu nào sau đây là **sai**?

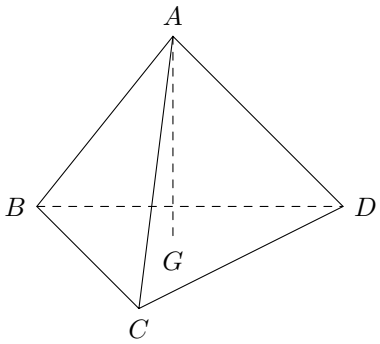


Ⓐ $(SAB) \perp (ABC)$.
Ⓑ $(SAC) \perp (ABC)$.
Ⓒ $(SAC) \perp (SBC)$.
Ⓓ $(SAB) \perp (SBC)$.

Hướng dẫn giải. Vì $SA \perp (ABC)$ nên các mặt phẳng (SAB) và (SAC) đều vuông góc với đáy (ABC).
Vì $BC \perp AB$ và $BC \perp SA$ nên $BC \perp (SAB) \Rightarrow (SBC) \perp (SAB)$.
Vậy khẳng định $(SAC) \perp (SBC)$ là sai trong trường hợp tổng quát.

C

Câu 150. Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm của tam giác BCD. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{x}, \overrightarrow{AC} = \vec{y}, \overrightarrow{AD} = \vec{z}$. Phát biểu nào sau đây là đúng?



Ⓐ $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\vec{x} + \vec{y} + \vec{z})$.
Ⓑ $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}(\vec{x} + \vec{y} + \vec{z})$.
Ⓒ $\overrightarrow{AG} = -\frac{1}{3}(\vec{x} + \vec{y} + \vec{z})$.
Ⓓ $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}(\vec{x} + \vec{y} + \vec{z})$.

Hướng dẫn giải. Với G là trọng tâm tam giác BCD, ta luôn có hệ thức:
$3\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} \Rightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\vec{x} + \vec{y} + \vec{z})$.

A

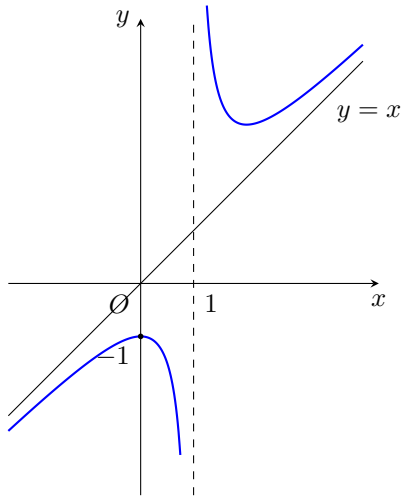
Câu 151. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $\Delta : \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{-1}$ song song với mặt phẳng nào sau đây?

Ⓐ $(P) : x + y - z = 0$.
Ⓑ $(\beta) : x + z = 0$.
Ⓒ $(Q) : x + y + 2z = 0$.
Ⓓ $(\alpha) : x - y + 1 = 0$.

Hướng dẫn giải. Đường thẳng Δ có VTCP $\vec{u} = (1; -1; -1)$.
Xét mặt phẳng (β) có VTPT $\vec{n} = (1; 0; 1)$. Ta có $\vec{u} \cdot \vec{n} = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + (-1) \cdot 1 = 0$.
Điểm $M(1; 1; 0) \in \Delta$ nhưng $M \notin (\beta)$ (vì $1 + 0 \neq 0$). Vậy $\Delta // (\beta)$.

B

Câu 152. Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



Ⓐ $y=\frac{x^2+x-1}{x-1}$. Ⓑ $y=\frac{x^2-x+1}{x-1}$. Ⓒ $y=\frac{x^2-4x-1}{x+1}$. Ⓓ $y=\frac{x^2-4x+5}{x-2}$.

Hướng dẫn giải. Đồ thị có TCĐ $x=1$, loại C và D. Đồ thị cắt trục tung tại $(0;-1)$.
Thay $x=0$ vào đáp án B: $y=\frac{1}{-1}=-1$ (Đúng).

B

Câu 153. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình của đường thẳng đi qua điểm $M(1;-3;5)$ và có một véc-tơ chỉ phương $\vec{u}(2;-1;1)$ là

Ⓐ $\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-5}{1}$. Ⓑ $\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+5}{1}$.
Ⓒ $\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z-5}{1}$. Ⓓ $\frac{x+1}{2}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z-5}{1}$.

Hướng dẫn giải. Đường thẳng đi qua $M(x_0;y_0;z_0)$ và có VTCP $\vec{u}(a;b;c)$ có phương trình chính tắc là: $\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$.
Thay $M(1;-3;5)$ và $\vec{u}(2;-1;1)$, ta được: $\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z-5}{1}$.

C

Câu 154. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(x-1)<3$ là

Ⓐ $(1;9)$. Ⓑ $(-\infty;9)$. Ⓒ $(9;+\infty)$. Ⓓ $(1;7)$.

Hướng dẫn giải. Điều kiện: $x-1>0\Leftrightarrow x>1$.
Bất phương trình tương đương với: $x-1<2^3\Leftrightarrow x-1<8\Leftrightarrow x<9$.
Kết hợp điều kiện, ta có tập nghiệm $S=(1;9)$.

A

Câu 155. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và $SA\perp(ABCD)$. Mặt phẳng nào sau đây vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$?

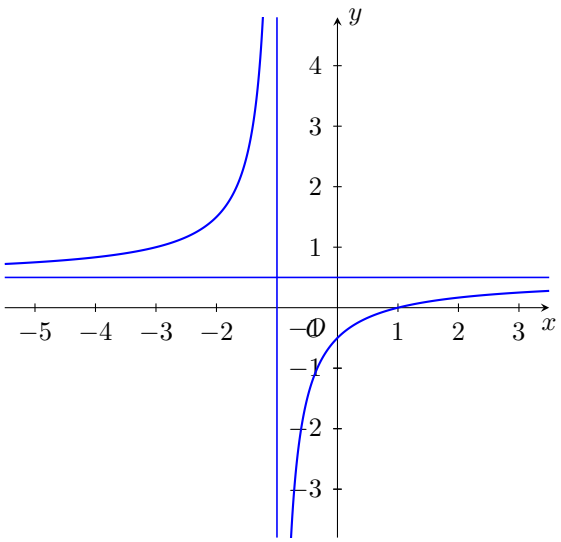
Ⓐ (SAB). Ⓑ (SBC). Ⓒ (SCD). Ⓓ (SBD).

Hướng dẫn giải. Vì $SA\perp(ABCD)$ và đường thẳng SA nằm trong mặt phẳng (SAB), nên theo định lý về hai mặt phẳng vuông góc, ta có $(SAB)\perp(ABCD)$.

A

Câu 156. Cho hàm số $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ $(c\neq 0, ad-bc\neq 0)$ có đồ thị như hình bên. Tiệm cận ngang

của đồ thị hàm số là



Ⓐ $x=-1$. Ⓑ $y=\frac{1}{2}$. Ⓒ $y=-1$. Ⓓ $x=\frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải. Dựa vào đồ thị, ta thấy khi $x\to\pm\infty$, giá trị y tiến dần về đường nằm ngang nằm giữa 0 và 1. Đó chính là đường thẳng $y=\frac{1}{2}$.

B

Câu 157. Nghiệm của phương trình $2^x=6$ là

Ⓐ $x=\log_6 2$. Ⓑ $x=3$. Ⓒ $x=4$. Ⓓ $x=\log_2 6$.

Hướng dẫn giải. Áp dụng định nghĩa lôgarit: $a^x=b\Leftrightarrow x=\log_a b$. Ta có $x=\log_2 6$.

D

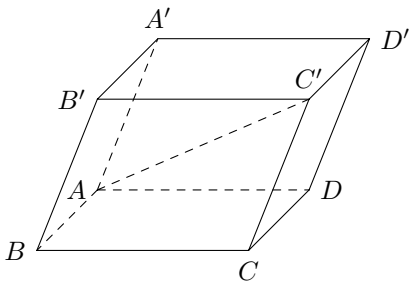
Câu 158. Cấp số cộng (u_n) có $u_1=1$ và $u_2=3$. Số hạng u_5 của cấp số cộng là

Ⓐ 5. Ⓑ 7. Ⓒ 9. Ⓓ 11.

Hướng dẫn giải. Công sai $d=u_2-u_1=3-1=2$.
Số hạng thứ 5: $u_5=u_1+4d=1+4\cdot 2=9$.

C

Câu 159. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ (minh họa như hình dưới). Phát biểu nào sau đây là đúng?



Ⓐ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{B'A'}=\overrightarrow{AC'}$.
Ⓑ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC'}+\overrightarrow{C'D'}=\overrightarrow{AC'}$.
Ⓒ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$.
Ⓓ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC'}$.

Hướng dẫn giải. Theo quy tắc hình hộp, tổng ba vectơ chung gốc là ba cạnh của hình hộp bằng vectơ đường chéo xuất phát từ gốc đó: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$.

D

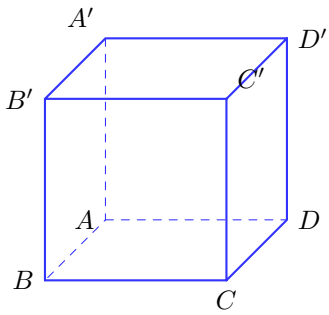
Câu 160. Tập nghiệm của bất phương trình $3^{2x-3}\le\frac{1}{3}$ là

Ⓐ $(-\infty;1]$. Ⓑ $[1;+\infty)$. Ⓒ $(-\infty;2]$. Ⓓ $[2;+\infty)$.

Hướng dẫn giải. Ta có $3^{2x-3}\le\frac{1}{3}\Leftrightarrow 3^{2x-3}\le 3^{-1}$.
Vì cơ số $3>1$ nên bất phương trình tương đương: $2x-3\le -1\Leftrightarrow 2x\le 2\Leftrightarrow x\le 1$.
Vậy tập nghiệm là $(-\infty;1]$.

A

Câu 161. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Độ dài của vectơ $\vec{u}=\overrightarrow{A'C'}-\overrightarrow{A'A}$ bằng



Ⓐ $\sqrt{2}a$. Ⓑ $\frac{\sqrt{3}a}{2}$. Ⓒ $\sqrt{6}a$. Ⓓ $\sqrt{3}a$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\vec{u}=\overrightarrow{A'C'}-\overrightarrow{A'A}=\overrightarrow{A'C'}+\overrightarrow{AA'}$.
Mà $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{CC'}$ nên $\vec{u}=\overrightarrow{A'C'}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{A'C}$.
Độ dài $|\vec{u}|=A'C=\sqrt{a^2+a^2+a^2}=a\sqrt{3}$.

D

Câu 162. Một vườn thú ghi lại tuổi thọ (đơn vị: năm) của 20 con hổ và thu được kết quả như sau:

Tuổi thọ	$[14;15)$	$[15;16)$	$[16;17)$	$[17;18)$	$[18;19)$
Số con hổ	1	3	8	6	2

Nhóm chứa tứ phân vị thứ nhất là

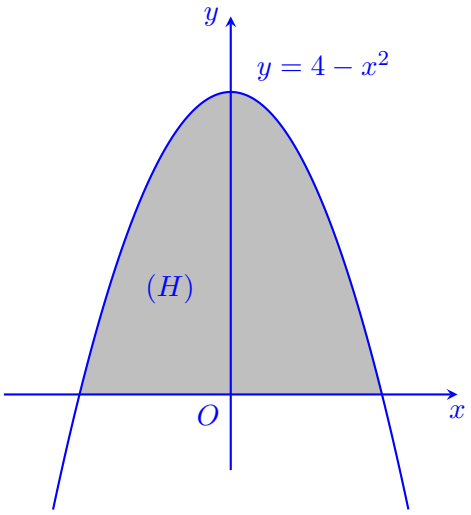
Ⓐ $[14;15)$. Ⓑ $[15;16)$. Ⓒ $[16;17)$. Ⓓ $[17;18)$.

Hướng dẫn giải. Cỡ mẫu $n=20$. Tứ phân vị thứ nhất Q_1 là giá trị thứ $\frac{20}{4}=5$.
Số con hổ tích lũy đến nhóm $[15;16)$ là $1+3=4$.
Số con hổ tích lũy đến nhóm $[16;17)$ là $4+8=12$.
Vì $4<5\le 12$ nên nhóm chứa Q_1 là $[16;17)$.

C

Câu 163. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=4-x^2$ và trục hoành. Thể tích

của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox bằng



Ⓐ $\frac{32\pi}{3}$. Ⓑ $\frac{512}{15}$. Ⓒ $\frac{512\pi}{15}$. Ⓓ $\frac{32}{3}$.

Hướng dẫn giải. Phương trình hoành độ giao điểm: $4-x^2=0 \Leftrightarrow x=\pm 2$.
Thể tích $V=\pi\int_{-2}^{2}(4-x^2)^2dx=\pi\int_{-2}^{2}(16-8x^2+x^4)dx=\frac{512\pi}{15}$.

C

Câu 164. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(2)=2$ và $F(x)=\int[x-f(x)]\mathrm{d}x, \forall x\in\mathbb{R}$. Giá trị của $F(4)$ bằng

Ⓐ 5. Ⓑ 6. Ⓒ 8. Ⓓ 9.

Hướng dẫn giải. Từ $F(x)=\int[x-f(x)]dx \Rightarrow F'(x)=x-f(x)$.
Mà $F'(x)=f(x) \Rightarrow f(x)=x-f(x) \Rightarrow f(x)=\frac{x}{2}$.
Suy ra $F(x)=\int\frac{x}{2}dx=\frac{x^2}{4}+C$.
$F(2)=2 \Rightarrow \frac{2^2}{4}+C=2 \Rightarrow C=1$. Vậy $F(x)=\frac{x^2}{4}+1 \Rightarrow F(4)=\frac{4^2}{4}+1=5$.

A

Câu 165. Mặt phẳng đi qua ba điểm $A(0;0;2)$, $B(1;0;0)$ và $C(0;3;0)$ có phương trình là

Ⓐ $\frac{x}{1}+\frac{y}{3}+\frac{z}{2}=1$. Ⓑ $\frac{x}{1}+\frac{y}{3}+\frac{z}{2}=-1$.
Ⓒ $\frac{x}{2}+\frac{y}{1}+\frac{z}{3}=1$. Ⓓ $\frac{x}{2}+\frac{y}{1}+\frac{z}{3}=-1$.

Hướng dẫn giải. Phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn đi qua $B(1;0;0)$, $C(0;3;0)$, $A(0;0;2)$ là: $\frac{x}{1}+\frac{y}{3}+\frac{z}{2}=1$.

A

Câu 166. Nếu $\int_{-1}^{2}f(x)\mathrm{d}x=5$ thì $\int_{-1}^{2}4f(x)\mathrm{d}x$ bằng:

Ⓐ 20. Ⓑ 10. Ⓒ $\frac{5}{2}$. Ⓓ $\frac{5}{4}$.

Hướng dẫn giải. Ta có: $\int_{-1}^{2}4f(x)\mathrm{d}x=4\int_{-1}^{2}f(x)\mathrm{d}x=4\cdot 5=20$.

A

Câu 167. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S) có tâm $I(2;1;-1)$ và đường kính bằng 6 có phương trình là

Ⓐ $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=36$.
Ⓑ $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=9$.
Ⓒ $(x+2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=9$.
Ⓓ $(x+2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=36$.

Hướng dẫn giải. Đường kính $d=6 \Rightarrow$ bán kính $R=3$. Phương trình mặt cầu tâm $I(2;1;-1)$ là: $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=3^2=9$.

B

Câu 168. Một mẫu số liệu ghép nhóm về chiều cao của một lớp (đơn vị là centimét) có phương sai bằng $6,25$. Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu đó bằng:

Ⓐ $2,5$(cm). Ⓑ $12,5$(cm). Ⓒ $3,125$(cm). Ⓓ $42,25$(cm).

Hướng dẫn giải. Độ lệch chuẩn là căn bậc hai của phương sai: $s=\sqrt{6,25}=2,5$.

A

Câu 169. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y=\frac{3x-1}{x-3}$ trên đoạn $[0;2]$.

Ⓐ $M=5$. Ⓑ $M=-5$. Ⓒ $M=\frac{1}{3}$. Ⓓ $M=-\frac{1}{3}$.

Hướng dẫn giải. Hàm số liên tục trên $[0;2]$. Ta có $y'=\frac{-8}{(x-3)^2}<0, \forall x\in[0;2]$. Hàm số nghịch biến trên đoạn đang xét nên giá trị lớn nhất đạt tại đầu mút bên trái $x=0$: $M=y(0)=\frac{3(0)-1}{0-3}=\frac{1}{3}$.

C

Câu 170. Cho hai biến cố A, B với $0<P(B)<1$. Phát biểu nào sau đây là **đúng**?

Ⓐ $P(A)=P(\overline{B})\cdot P(A|B)+P(B)\cdot P(A|\overline{B})$.
Ⓑ $P(A)=P(B)\cdot P(A|B)-P(\overline{B})\cdot P(A|\overline{B})$.
Ⓒ $P(A)=P(\overline{B})\cdot P(A|\overline{B})-P(B)\cdot P(A|B)$.
Ⓓ $P(A)=P(B)\cdot P(A|B)+P(\overline{B})\cdot P(A|\overline{B})$.

Hướng dẫn giải. Theo công thức xác suất đầy đủ với hệ đầy đủ $\{B,\overline{B}\}$, ta có: $P(A)=P(B)\cdot P(A|B)+P(\overline{B})\cdot P(A|\overline{B})$.

D

Câu 171. Một thư viện ghi lại số giờ đọc sách của 50 sinh viên trong một ngày và thu được mẫu số liệu ghép nhóm sau:

Nhóm giờ	$[0;1)$	$[1;2)$	$[2;3)$	$[3;4)$	$[4;5)$
Số sinh viên	8	11	15	9	7

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm gần nhất với giá trị nào sau đây?

Ⓐ $1,69$. Ⓑ $1,85$. Ⓒ $2,02$. Ⓓ $1,98$.

Hướng dẫn giải. Cỡ mẫu $n=50$. - Tìm Q_1: Vị trí $0,25\times 50=12,5$ thuộc nhóm $[1;2)$. $Q_1=1+\frac{12,5-8}{11}\cdot 1\approx 1,409$. - Tìm Q_3: Vị trí $0,75\times 50=37,5$ thuộc nhóm $[3;4)$. $Q_3=3+\frac{37,5-34}{9}\cdot 1\approx 3,389$. - Khoảng tứ phân vị $\Delta_Q=Q_3-Q_1\approx 3,389-1,409=1,98$.

D

Câu 172. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_5(2x-1)<\log_5(x+2)$ là

Ⓐ $S=(3;+\infty)$. Ⓑ $S=(-\infty;3)$.

Ⓒ $S=\left(\frac{1}{2};3\right)$. Ⓓ $S=(-2;3)$.

Hướng dẫn giải. Điều kiện: $\begin{cases}2x-1>0\\x+2>0\end{cases}\Leftrightarrow x>\frac{1}{2}$. Vì cơ số $5>1$ nên bất phương trình $\Leftrightarrow 2x-1<x+2\Leftrightarrow x<3$. Kết hợp điều kiện ta được tập nghiệm $S=\left(\frac{1}{2};3\right)$.

C

Câu 173. Cho cấp số nhân (u_n) có tổng n số hạng đầu tiên là $S_n=5^n-1$ với $n\in\mathbb{N}^*$. Tìm số hạng đầu u_1 và công bội q của cấp số nhân đó.

Ⓐ $u_1=5,q=4$. Ⓑ $u_1=4,q=6$.
Ⓒ $u_1=4,q=5$. Ⓓ $u_1=6,q=5$.

Hướng dẫn giải. Ta có $u_1=S_1=5^1-1=4$.
$S_2=5^2-1=24\Rightarrow u_2=S_2-S_1=24-4=20$.
Công bội $q=\frac{u_2}{u_1}=\frac{20}{4}=5$.

C

Câu 174. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-2;1)$ và $B(0;1;2)$. Tọa độ điểm M thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho ba điểm A,B,M thẳng hàng là:

Ⓐ $M(4;-5;0)$. Ⓑ $M(2;-3;0)$. Ⓒ $M(0;0;1)$. Ⓓ $M(4;5;0)$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\overrightarrow{AB}=(-2;3;1)$. Phương trình đường thẳng AB đi qua $B(0;1;2)$ là:
$$\begin{cases}x=-2t\\y=1+3t\\z=2+t\end{cases}.$$
Vì $M\in(Oxy)$ nên cao độ $z_M=0\Rightarrow 2+t=0\Leftrightarrow t=-2$.
Thay $t=-2$ vào ta được $x=4,y=-5$. Vậy $M(4;-5;0)$.

A

Câu 175. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\frac{x^2+3}{x-1}$ trên đoạn $[2;4]$ là

Ⓐ $\min\limits_{[2;4]}y=6$. Ⓑ $\min\limits_{[2;4]}y=-2$.
Ⓒ $\min\limits_{[2;4]}y=-3$. Ⓓ $\min\limits_{[2;4]}y=\frac{19}{3}$.

Hướng dẫn giải. Xét $y'=\frac{2x(x-1)-(x^2+3)}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$.
$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\notin[2;4]\\x=3\in[2;4]\end{array}\right.$.
Tính $y(2)=7,y(3)=6,y(4)=\frac{19}{3}$. Vậy $\min\limits_{[2;4]}y=6$.

A

Câu 176. Tập nghiệm của bất phương trình $5^{x-1}\geq 5^{x^2-x-9}$ là

Ⓐ $[-2;4]$. Ⓑ $[-4;2]$.
Ⓒ $(-\infty;-2]\cup[4;+\infty)$. Ⓓ $(-\infty;-4]\cup[2;+\infty)$.

Hướng dẫn giải. Vì cơ số $5>1$ nên bất phương trình tương đương với: $x-1\geq x^2-x-9\Leftrightarrow x^2-2x-8\leq 0\Leftrightarrow -2\leq x\leq 4$.

A

Câu 177. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=x^2-1$ và $y=x-1$ bằng

Ⓐ $\frac{\pi}{6}$. Ⓑ $\frac{13}{6}$. Ⓒ $\frac{13\pi}{6}$. Ⓓ $\frac{1}{6}$.

✍ *Hướng dẫn giải.* Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2-1=x-1 \Leftrightarrow x^2-x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$.

Diện tích $S=\displaystyle\int_0^1 |x^2-x|\mathrm{d}x=\int_0^1 (x-x^2)\mathrm{d}x=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1=\frac{1}{6}$.

D

Câu 178. Cho hàm số $y=\frac{x-2}{x+3}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

Ⓐ Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.
Ⓑ Hàm số nghịch biến trên từng khoảng $(-\infty;-3)$ và $(-3;+\infty)$.
Ⓒ Hàm số đồng biến trên từng khoảng $(-\infty;-3)$ và $(-3;+\infty)$.
Ⓓ Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

✍ *Hướng dẫn giải.* Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{-3\}$.

Ta có $y'=\frac{1\cdot 3-1\cdot(-2)}{(x+3)^2}=\frac{5}{(x+3)^2}>0, \forall x\in D$.

Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.

C

Câu 179. Cho hai biến cố A và B với $P(A)=0,3; P(B)=0,4$ và $P(AB)=0,2$. Xác suất để A hoặc B xảy ra bằng

Ⓐ $0,3$. Ⓑ $0,4$. Ⓒ $0,6$. Ⓓ $0,5$.

✍ *Hướng dẫn giải.* Xác suất để A hoặc B xảy ra là: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0,3+0,4-0,2=0,5$.

D

Câu 180. Biết $F(x)=x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\displaystyle\int_1^3 [1+f(x)]\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ 10. Ⓑ 8. Ⓒ $\frac{26}{3}$. Ⓓ $\frac{32}{3}$.

✍ *Hướng dẫn giải.* Ta có $\displaystyle\int_1^3 [1+f(x)]\mathrm{d}x=\int_1^3 1\mathrm{d}x+\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x=x|_1^3+F(x)|_1^3=(3-1)+(3^2-1^2)=2+8=10$.

A

Câu 181. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1=2$ và công bội $q=3$. Tìm số hạng thứ 4 của cấp số nhân?

Ⓐ 24. Ⓑ 54. Ⓒ 162. Ⓓ 48.

✍ *Hướng dẫn giải.* Số hạng tổng quát của cấp số nhân là $u_n=u_1\cdot q^{n-1}$.

Với $n=4$, ta có $u_4=u_1\cdot q^3=2\cdot 3^3=2\cdot 27=54$.

B

Câu 182. Cho hai hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ liên tục trên $[a;b]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)$ và các đường thẳng $x=a$, $x=b$ bằng

Ⓐ $\left|\displaystyle\int_a^b [f(x)-g(x)]\mathrm{d}x\right|$. Ⓑ $\displaystyle\int_a^b |f(x)+g(x)|\mathrm{d}x$.

Ⓒ $\int_a^b |f(x)-g(x)|\mathrm{d}x$. Ⓓ $\int_a^b [f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$.

Hướng dẫn giải. Theo công thức tính diện tích hình phẳng, diện tích giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ là $S=\int_a^b |f(x)-g(x)|\mathrm{d}x$.

C

Câu 183. Trong không gian, biết $|\vec{u}|=2, |\vec{v}|=1$ và góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ bằng $\frac{2\pi}{3}$. Tính tích vô hướng của hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$.

Ⓐ -1. Ⓑ 1. Ⓒ 2. Ⓓ $\frac{4\pi}{3}$.

Hướng dẫn giải. Tích vô hướng của hai vectơ được tính theo công thức: $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos(\vec{u},\vec{v})=2\cdot 1\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)=2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$.

A

Câu 184. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=1-2t\\ y=-1\\ z=3+t\end{cases}$. Vectơ nào sau đây là một vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ?

Ⓐ $\vec{u}_\Delta=(-2;-1;1)$. Ⓑ $\vec{u}_\Delta=(1;-1;3)$.
Ⓒ $\vec{u}_\Delta=(-2;0;1)$. Ⓓ $\vec{u}_\Delta=(2;0;1)$.

Hướng dẫn giải. Từ phương trình tham số của đường thẳng Δ, ta có hệ số của tham số t tương ứng là $x:-2, y:0, z:1$.
Do đó một vectơ chỉ phương là $\vec{u}_\Delta=(-2;0;1)$.

C

Câu 185. Cho tích phân $\int_0^1 [f(x)+2x]\mathrm{d}x=2$. Khi đó tích phân $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng?

Ⓐ 1. Ⓑ 4. Ⓒ 2. Ⓓ 0.

Hướng dẫn giải. Ta có $\int_0^1 [f(x)+2x]\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^1 2x\mathrm{d}x=2$.
Tính $\int_0^1 2x\mathrm{d}x=x^2\big|_0^1=1$.
Suy ra $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+1=2\Rightarrow\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=1$.

A

Câu 186. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;1), B(0;2;1)$ và $C(1;-1;2)$. Mặt phẳng đi qua A và vuông góc với BC có phương trình là

Ⓐ $\frac{x+1}{1}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z+1}{1}$. Ⓑ $x-3y+z-1=0$.
Ⓒ $x-3y+z+1=0$. Ⓓ $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z-1}{1}$.

Hướng dẫn giải. Mặt phẳng vuông góc với BC nên nhận $\overrightarrow{BC}=(1-0;-1-2;2-1)=(1;-3;1)$ làm vectơ pháp tuyến.
Phương trình mặt phẳng đi qua $A(1;1;1)$ là: $1(x-1)-3(y-1)+1(z-1)=0\Leftrightarrow x-3y+z+1=0$.

C

Câu 187. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^{2x}+\frac{3}{x}$ là

Ⓐ $\int f(x)\mathrm{d}x=e^{2x}+3\ln x+C$.
Ⓑ $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{e^{2x}}{2}+3\ln|x|+C$.
Ⓒ $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{e^{2x}}{2}+3\ln x+C$.
Ⓓ $\int f(x)\mathrm{d}x=e^{2x}+3\ln|x|+C$.

Hướng dẫn giải. Sử dụng công thức nguyên hàm cơ bản: $\int\left(e^{2x}+\frac{3}{x}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}e^{2x}+3\ln|x|+C$.

B

Câu 188. Cho cấp số cộng (u_n) với năm số hạng đầu là $2;7;12;17;22$. Số hạng tổng quát của cấp số cộng là

Ⓐ $u_n=3n+5$.
Ⓑ $u_n=3n-5$.
Ⓒ $u_n=5n+3$.
Ⓓ $u_n=5n-3$.

Hướng dẫn giải. Ta có số hạng đầu $u_1=2$ và công sai $d=7-2=5$.
Số hạng tổng quát: $u_n=u_1+(n-1)d=2+(n-1)\cdot 5=5n-3$.

D

Câu 189. Cho A,B là hai biến cố của một phép thử. Biết $P(A)=0,8;P(B)=0,6;P(A|B)=0,72$. Hãy tính $P(B|A)$.

Ⓐ $0,54$.
Ⓑ $0,46$.
Ⓒ $0,6$.
Ⓓ $0,48$.

Hướng dẫn giải. Ta có $P(A\cap B)=P(B)\cdot P(A|B)=0,6\cdot 0,72=0,432$.
Xác suất có điều kiện: $P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{0,432}{0,8}=0,54$.

A

Câu 190. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P):2x-y-z-3=0$ và $(Q):x-z-2=0$. Góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng

Ⓐ $30°$.
Ⓑ $45°$.
Ⓒ $60°$.
Ⓓ $90°$.

Hướng dẫn giải. Vectơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n}_P=(2;-1;-1)$, của (Q) là $\vec{n}_Q=(1;0;-1)$.
Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng, ta có: $\cos\alpha=\frac{|\vec{n}_P\cdot\vec{n}_Q|}{|\vec{n}_P|\cdot|\vec{n}_Q|}=\frac{|2\cdot 1+(-1)\cdot 0+(-1)\cdot(-1)|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}}=\frac{3}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}}=\frac{3}{\sqrt{12}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.
Suy ra $\alpha=30°$.

A

Câu 191. Khảo sát thời gian tập thể dục của một số học sinh khối 11 thu được mẫu số liệu ghép nhóm sau:

Thời gian (phút)	$[0;20)$	$[20;40)$	$[40;60)$	$[60;80)$	$[80;100)$
Số học sinh	5	9	12	10	6

Mốt của mẫu số liệu ghép nhóm trên là:

Ⓐ 52.
Ⓑ 42.
Ⓒ 53.
Ⓓ 54.

Hướng dẫn giải. Nhóm chứa mốt là $[40;60)$ vì có tần số lớn nhất $(n_3=12)$.
Ta có $L=40,h=20,n_3=12,n_2=9,n_4=10$.

Mốt $M_o = L + \dfrac{n_3 - n_2}{(n_3 - n_2) + (n_3 - n_4)} \cdot h = 40 + \dfrac{12 - 9}{(12 - 9) + (12 - 10)} \cdot 20 = 40 + \dfrac{3}{5} \cdot 20 = 52.$

A

Câu 192. Một vật chuyển động có phương trình $s(t) = 3\cos t$. Khi đó, vận tốc tức thời tại thời điểm t của vật là:

Ⓐ $v(t) = -3\sin t$.
Ⓑ $v(t) = -3\cos t$.
Ⓒ $v(t) = 3\cos t$.
Ⓓ $v(t) = 3\sin t$.

Hướng dẫn giải. Vận tốc tức thời là đạo hàm của phương trình quãng đường theo thời gian: $v(t) = s'(t) = (3\cos t)' = -3\sin t$.

A

Câu 193. Trong không gian $Oxyz$, một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $\dfrac{x}{-2} + \dfrac{y}{-1} + \dfrac{z}{3} = 1$ là

Ⓐ $\vec{n} = (3; 6; -2)$.
Ⓑ $\vec{n} = (2; -1; 3)$.
Ⓒ $\vec{n} = (-3; -6; -2)$.
Ⓓ $\vec{n} = (-2; -1; 3)$.

Hướng dẫn giải. Mặt phẳng có dạng phương trình đoạn chắn $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$ có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = \left(\dfrac{1}{a}; \dfrac{1}{b}; \dfrac{1}{c}\right)$.

$\Rightarrow \vec{n}_0 = \left(-\dfrac{1}{2}; -1; \dfrac{1}{3}\right)$.

Nhân tọa độ với -6, ta được vectơ cùng phương $\vec{n} = (3; 6; -2)$.

A

Câu 194. Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{a} = (-1; 0; 2)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

Ⓐ $2\vec{a} = (2; 0; -4)$.
Ⓑ $2\vec{a} = (-2; 0; -4)$.
Ⓒ $2\vec{a} = (-2; 0; 4)$.
Ⓓ $2\vec{a} = (2; 0; 4)$.

Hướng dẫn giải. Ta có $2\vec{a} = 2 \cdot (-1; 0; 2) = (-2; 0; 4)$.

C

Câu 195. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x - 2)(x + 1), \forall x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

Ⓐ Hàm số đồng biến trên $(-1; +\infty)$.
Ⓑ Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 2)$.
Ⓒ Hàm số đồng biến trên $(-1; 2)$.
Ⓓ Hàm số nghịch biến trên $(-1; 2)$.

Hướng dẫn giải. Xét $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -1 \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu $f'(x)$:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu, hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 2)$.

D

Câu 196. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-3}$. Mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(1; 0; 1)$ và vuông góc với đường thẳng d có phương trình là:

Ⓐ $2x+y-3z+1=0$. Ⓑ $2x+y-3z-1=0$.
Ⓒ $x+z+1=0$. Ⓓ $x+z-1=0$.

Hướng dẫn giải. Mặt phẳng (P) vuông góc với đường thẳng d nên nhận vectơ chỉ phương $\vec{u}_d=(2;1;-3)$ làm vectơ pháp tuyến.
Phương trình mặt phẳng (P) đi qua $A(1;0;1)$ là: $2(x-1)+1(y-0)-3(z-1)=0 \Leftrightarrow 2x+y-3z+1=0$.

A

Câu 197. Cho hai biến cố A, B với $P(B)=0,7; P(A|B)=0,6$ và $P(A|\overline{B})=0,4$. Khi đó $P(A)$ bằng:

Ⓐ $0,5$. Ⓑ $0,54$. Ⓒ $0,46$. Ⓓ $0,3$.

Hướng dẫn giải. Ta có $P(\overline{B})=1-P(B)=1-0,7=0,3$.

Áp dụng công thức xác suất đầy đủ: $P(A)=P(B)\cdot P(A|B)+P(\overline{B})\cdot P(A|\overline{B})=0,7\cdot 0,6+0,3\cdot 0,4=0,42+0,12=0,54$.

B

Câu 198. Tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x-3)\geq \log_{\frac{1}{2}}4$ là

Ⓐ $S=(3;7]$. Ⓑ $S=[3;7]$.
Ⓒ $S=(-\infty;7]$. Ⓓ $S=[7;+\infty)$.

Hướng dẫn giải. Điều kiện: $x-3>0 \Leftrightarrow x>3$.
Vì cơ số $a=\frac{1}{2}<1$ nên bất phương trình tương đương với: $x-3\leq 4 \Leftrightarrow x\leq 7$.
Kết hợp điều kiện, ta có $3<x\leq 7$. Vậy $S=(3;7]$.

A

Câu 199. Một công ty thống kê lương của nhân viên theo tuần (đơn vị: USD) theo bảng sau:

Lương theo tuần (USD)	$[10;20)$	$[20;30)$	$[30;40)$	$[40;50)$	$[50;60)$
Số công nhân	4	6	10	20	10

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu này bằng bao nhiêu (làm tròn tới hàng phần chục)?

Ⓐ $11,7$. Ⓑ 12. Ⓒ $11,4$. Ⓓ $12,5$.

Hướng dẫn giải. Tổng số công nhân $n=50$.
Giá trị đại diện các nhóm lần lượt là: $x_1=15, x_2=25, x_3=35, x_4=45, x_5=55$.
Số trung bình: $\bar{x}=\frac{4\cdot 15+6\cdot 25+10\cdot 35+20\cdot 45+10\cdot 55}{50}=40,2$.
Phương sai: $s^2=\frac{4\cdot 15^2+6\cdot 25^2+10\cdot 35^2+20\cdot 45^2+10\cdot 55^2}{50}-(40,2)^2=136,96$.
Độ lệch chuẩn: $s=\sqrt{136,96}\approx 11,7$.

A

Câu 200. Cho hàm số $f(x)=x^2-\frac{4}{x}$. Giá trị của $\int_1^2 f'(x)\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ $\frac{7}{3}-\ln 2$. Ⓑ 3. Ⓒ $\frac{7}{3}$. Ⓓ 5.

Hướng dẫn giải. Ta có $\int_1^2 f'(x)\mathrm{d}x=f(2)-f(1)$.
Với $f(2)=2^2-\frac{4}{2}=4-2=2$.
$f(1)=1^2-\frac{4}{1}=1-4=-3$.

Vậy tích phân bằng $2-(-3)=5$.

D

Câu 201. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số $y=f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

Ⓐ 4. Ⓑ 3. Ⓒ 2. Ⓓ 1.

Hướng dẫn giải. Dựa vào bảng xét dấu, đạo hàm $f'(x)$ đổi dấu 3 lần khi đi qua các điểm $x=-2$, $x=0$ và $x=2$.
Vậy hàm số $y=f(x)$ có 3 điểm cực trị.

B

Câu 202. Biết $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x=3$. Giá trị của $\int_1^3 2f(x)\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ 5. Ⓑ 6. Ⓒ 9. Ⓓ $\frac{3}{2}$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\int_1^3 2f(x)\mathrm{d}x=2\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x=2\cdot 3=6$.

B

Câu 203. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(2;2;1)$ và có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(5;2;-3)$. Phương trình mặt phẳng (P) là

Ⓐ $5x+2y-3z-17=0$. Ⓑ $2x+2y+z-11=0$.
Ⓒ $5x+2y-3z-11=0$. Ⓓ $2x+2y+z-17=0$.

Hướng dẫn giải. Phương trình mặt phẳng (P) đi qua $M(2;2;1)$ với vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(5;2;-3)$ là:

$$5(x-2)+2(y-2)-3(z-1)=0\Leftrightarrow 5x+2y-3z-11=0.$$

C

Câu 204. Nếu cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu $u_1=3$ và công bội $q=3$ thì số hạng tổng quát u_n của cấp số nhân đó bằng

Ⓐ 3^n. Ⓑ 3^{n-1}.
Ⓒ 3^{n+1}. Ⓓ $3+(n-1).3$.

Hướng dẫn giải. Số hạng tổng quát của cấp số nhân được tính theo công thức: $u_n=u_1\cdot q^{n-1}$.
Thay $u_1=3, q=3$, ta được: $u_n=3\cdot 3^{n-1}=3^n$.

A

Câu 205. Tập nghiệm của bất phương trình $2^x\le 4$ là

Ⓐ $(-\infty;2]$. Ⓑ $[0;2]$. Ⓒ $(-\infty;2)$. Ⓓ $(0;2)$.

Hướng dẫn giải. Ta có $2^x\le 4\Leftrightarrow 2^x\le 2^2\Leftrightarrow x\le 2$.
Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=(-\infty;2]$.

A

Câu 206. Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bên và cạnh đáy bằng nhau và $ABCD$ là hình vuông tâm O. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

Ⓐ $SA \perp (ABCD)$. Ⓑ $SO \perp (ABCD)$.
Ⓒ $AB \perp (SBC)$. Ⓓ $AC \perp (SBC)$.

Hướng dẫn giải. Vì hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bên bằng nhau và đáy là hình vuông nên đây là hình chóp đều. Trong hình chóp đều, hình chiếu của đỉnh xuống mặt đáy trùng với tâm của đáy. Do đó $SO \perp (ABCD)$.

B

Câu 207. Phát biểu nào sau đây là đúng?

Ⓐ $\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = |x| + C$. Ⓑ $\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C$.
Ⓒ $\int \ln x \mathrm{d}x = x + C$. Ⓓ $\int \ln|x|\mathrm{d}x = \ln x + C$.

Hướng dẫn giải. Theo bảng nguyên hàm cơ bản, ta có công thức: $\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C$.

B

Câu 208. Phương trình nào sau đây vô nghiệm?

Ⓐ $\pi \sin x = 4$. Ⓑ $\tan x = \pi$. Ⓒ $4 \sin x = \pi$. Ⓓ $\tan x = 4$.

Hướng dẫn giải. Xét phương trình $\pi \sin x = 4 \Leftrightarrow \sin x = \frac{4}{\pi}$.
Vì $\frac{4}{\pi} \approx 1,27 > 1$ nên phương trình $\sin x = \frac{4}{\pi}$ vô nghiệm.
Các phương trình còn lại đều có nghiệm thực.

A

Câu 209. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 3z + 5 = 0$. Tọa độ một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là

Ⓐ $\vec{n} = (1; -3; 5)$. Ⓑ $\vec{n} = (1; 3; 0)$.
Ⓒ $\vec{n} = (1; 0; -3)$. Ⓓ $\vec{n} = (1; -3; 0)$.

Hướng dẫn giải. Mặt phẳng $(P): 1x + 0y - 3z + 5 = 0$ có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1; 0; -3)$.

C

Câu 210. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Hãy chọn khẳng định đúng.

Ⓐ $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{B'D}$. Ⓑ $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{DB'}$.
Ⓒ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC'}$. Ⓓ $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} = \vec{0}$.

Hướng dẫn giải. Theo quy tắc hình hộp, tổng của ba vectơ chung gốc xuất phát từ một đỉnh bằng vectơ đường chéo xuất phát từ đỉnh đó: $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{DB'}$.

B

Câu 211. Với a là một số thực dương tùy ý, $a^{\frac{2}{3}}$ bằng

Ⓐ $\sqrt{a^3}$. Ⓑ a^{-1}. Ⓒ $\frac{a^2}{a^3}$. Ⓓ $\sqrt[3]{a^2}$.

Hướng dẫn giải. Với $a > 0, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, ta có công thức: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.
Vậy $a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}$.

D

Câu 212. Trong các dãy số sau, dãy số nào **không** phải cấp số cộng?

Ⓐ $\frac{1}{2};\frac{3}{2};\frac{5}{2};\frac{7}{2};\frac{9}{2}$.
Ⓑ $1;1;1;1;1$.
Ⓒ $-8;-6;-4;-2;0$.
Ⓓ $3;1;-1;-2;-4$.

Hướng dẫn giải. Xét dãy số $3;1;-1;-2;-4$, ta thấy:
$1-3=-2$;
$-1-1=-2$;
$-2-(-1)=-1\neq -2$.
Vì hiệu hai số hạng liên tiếp không bằng số nên đây không phải là cấp số cộng.

D

Câu 213. Hàm số nào dưới đây là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=3x^2-\frac{2}{x}$?

Ⓐ $y=x^3-2\ln|x|$.
Ⓑ $y=6x-2\ln|x|$.
Ⓒ $y=x^3+\frac{2}{x^2}$.
Ⓓ $y=6x+\frac{2}{x^2}$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x=\int\left(3x^2-\frac{2}{x}\right)\mathrm{d}x=x^3-2\ln|x|+C$.
Với $C=0$, ta được hàm số $y=x^3-2\ln|x|$ là một nguyên hàm của $f(x)$.

A

Câu 214. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Góc giữa hai đường thẳng SB và AD bằng bao nhiêu?

Ⓐ $60°$.
Ⓑ $45°$.
Ⓒ $90°$.
Ⓓ $30°$.

Hướng dẫn giải. Vì $AD//BC$ nên góc giữa SB và AD bằng góc giữa SB và BC, chính là $\widehat{SBC}$.
Ta có $BC\perp AB$ (do $ABCD$ là hình chữ nhật) và $BC\perp SA$ (do $SA\perp(ABCD)$).
Suy ra $BC\perp(SAB)\Rightarrow BC\perp SB\Rightarrow\widehat{SBC}=90°$.

C

Câu 215. Giá trị của $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ 1.
Ⓑ -1.
Ⓒ 0.
Ⓓ 2.

Hướng dẫn giải. Ta có $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x=\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0=1-0=1$.

A

Câu 216. Nếu $\log_a b=3$ thì $\log_a b^2$ bằng

Ⓐ 9.
Ⓑ 4.
Ⓒ 6.
Ⓓ 7.

Hướng dẫn giải. Ta có $\log_a b^2=2\log_a b=2\cdot 3=6$.

C

Câu 217. Cho cấp số nhân có $u_1=4$, $q=3$. Hãy tính giá trị của u_3.

Ⓐ $u_3=-2$.
Ⓑ $u_3=7$.
Ⓒ $u_3=10$.
Ⓓ $u_3=36$.

Hướng dẫn giải. Số hạng thứ ba của cấp số nhân là $u_3=u_1\cdot q^{3-1}=u_1\cdot q^2=4\cdot 3^2=36$.

D

Câu 218. Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Hãy xác định góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{EG}$?

Ⓐ $45°$. Ⓑ $90°$. Ⓒ $60°$. Ⓓ $120°$.

Hướng dẫn giải. Vì $EFGH$ là hình vuông nên $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AC}$.
Khi đó $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{EG}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \widehat{BAC}$.
Vì $ABCD$ là hình vuông nên góc $\widehat{BAC} = 45°$.

A

Câu 219. Biết $\int_2^3 f(x)\mathrm{d}x = 3$. Giá trị của $\int_2^3 [f(x)+3]\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ 6. Ⓑ 3. Ⓒ 9. Ⓓ 5.

Hướng dẫn giải. Ta có $\int_2^3 [f(x)+3]\mathrm{d}x = \int_2^3 f(x)\mathrm{d}x + \int_2^3 3\mathrm{d}x = 3 + 3x\Big|_2^3 = 3 + (9-6) = 6$.

A

Câu 220. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}} x \geq -3$ là

Ⓐ $S = (0;8]$. Ⓑ $S = [0;8]$.
Ⓒ $S = (-\infty;8]$. Ⓓ $S = [8;+\infty)$.

Hướng dẫn giải. Điều kiện: $x > 0$.
Bất phương trình $\Leftrightarrow x \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \Leftrightarrow x \leq 2^3 \Leftrightarrow x \leq 8$.
Kết hợp điều kiện, ta được tập nghiệm $S = (0;8]$.

A

Câu 221. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2+8x-4y+10z-4=0$. Khi đó (S) có tâm I và bán kính R lần lượt là

Ⓐ $I(-4;2;-5), R=7$. Ⓑ $I(-4;2;-5), R=4$.
Ⓒ $I(-4;2;-5), R=49$. Ⓓ $I(-4;2;5), R=7$.

Hướng dẫn giải. Hệ số $a=-4, b=2, c=-5, d=-4$.
Tâm $I(-4;2;-5)$.
Bán kính $R = \sqrt{a^2+b^2+c^2-d} = \sqrt{(-4)^2+2^2+(-5)^2-(-4)} = \sqrt{49} = 7$.

A

Câu 222. Biết rằng thể tích của một khối lập phương bằng 8. Tính tổng diện tích các mặt của hình lập phương đó.

Ⓐ 16. Ⓑ 24. Ⓒ 36. Ⓓ 27.

Hướng dẫn giải. Cạnh hình lập phương $a = \sqrt[3]{8} = 2$.
Hình lập phương có 6 mặt, diện tích mỗi mặt là $a^2 = 2^2 = 4$.
Tổng diện tích các mặt là $S = 6 \cdot 4 = 24$.

B

Câu 223. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = e^x, y = -1, x = 0$ và $x = 1$ được tính bởi công thức nào dưới đây?

Ⓐ $S = \pi \int_0^1 (e^x+1)\mathrm{d}x$. Ⓑ $S = \pi \int_0^1 (e^{2x}+1)\mathrm{d}x$.
Ⓒ $S = \int_0^1 (e^x+1)\mathrm{d}x$. Ⓓ $S = \int_0^1 (e^x-1)\mathrm{d}x$.

Hướng dẫn giải. Ta thấy $e^x > -1$ trên đoạn $[0;1]$.

Diện tích hình phẳng $S = \int_0^1 |e^x - (-1)|\mathrm{d}x = \int_0^1 (e^x + 1)\mathrm{d}x$.

C

Câu 224. Hàm số nào dưới đây là hàm số mũ?

Ⓐ $y = x^{2025}$. Ⓑ $y = x^{-5}$. Ⓒ $y = \log_3 x$. Ⓓ $y = 2025^x$.

Hướng dẫn giải. Hàm số mũ có dạng $y = a^x$ với $0 < a \neq 1$. Do đó, $y = 2025^x$ là hàm số mũ.

D

Câu 225. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;2;1)$. Tính độ dài đoạn thẳng OA.

Ⓐ $OA = 3$. Ⓑ $OA = 9$. Ⓒ $OA = \sqrt{5}$. Ⓓ $OA = 5$.

Hướng dẫn giải. Độ dài đoạn thẳng $OA = \sqrt{x_A^2 + y_A^2 + z_A^2} = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3$.

A

Câu 226. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

Ⓐ $\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1$. Ⓑ $1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$.
Ⓒ $\tan\alpha + \cot\alpha = 2$. Ⓓ $1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$.

Hướng dẫn giải. Ta có hệ thức cơ bản: $\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1$ (với điều kiện các hàm số có nghĩa).

A

Câu 227. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng $(ABCD)$ là

Ⓐ $\widehat{BSA}$. Ⓑ $\widehat{SAB}$. Ⓒ $\widehat{SBA}$. Ⓓ $\widehat{SBC}$.

Hướng dẫn giải. Vì $SA \perp (ABCD)$ nên A là hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $(ABCD)$. Do đó, góc giữa SB và $(ABCD)$ là góc giữa SB và hình chiếu AB, chính là góc $\widehat{SBA}$.

C

Câu 228. Với a, b là các số thực dương tuỳ ý và $a \neq 1$, $\log_a \frac{1}{b^3}$ bằng

Ⓐ $3\log_a b$. Ⓑ $\log_a b$. Ⓒ $-3\log_a b$. Ⓓ $\frac{1}{3}\log_a b$.

Hướng dẫn giải. Ta có: $\log_a \frac{1}{b^3} = \log_a(b^{-3}) = -3\log_a b$.

C

Câu 229. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int_0^2 f'(x)\mathrm{d}x = 45$, $f(0) = 3$. Giá trị của biểu thức $f(2)$ bằng

Ⓐ 42. Ⓑ 15. Ⓒ 48. Ⓓ 135.

Hướng dẫn giải. Ta có $\int_0^2 f'(x)\mathrm{d}x = f(2) - f(0)$.
Theo đề bài: $f(2) - 3 = 45 \Rightarrow f(2) = 45 + 3 = 48$.

C

Câu 230. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P): 2x + y - 1 = 0$ có một vectơ pháp tuyến là

Ⓐ $\vec{n}_4 = (2;1;0)$. Ⓑ $\vec{n}_3 = (1;2;0)$.

Ⓒ $\vec{n}_2 = (2;1;-1)$. Ⓓ $\vec{n}_1 = (-2;-1;1)$.

Hướng dẫn giải. Mặt phẳng $Ax + By + Cz + D = 0$ có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (A;B;C)$.

Ở đây $(P): 2x + 1y + 0z - 1 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (2;1;0)$.

A

Câu 231. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$ là

Ⓐ $x^3 + x^2$. Ⓑ $x^3 + x - C$.
Ⓒ $x^3 + x^2 - x + C$. Ⓓ $6x + 2$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\int (3x^2 + 2x - 1)\mathrm{d}x = x^3 + x^2 - x + C$.

C

Câu 232. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(1;1;0)$ và bán kính bằng 5. Phương trình của (S) là

Ⓐ $(x+1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 25$. Ⓑ $(x+1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 5$.
Ⓒ $(x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 25$. Ⓓ $(x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 5$.

Hướng dẫn giải. Phương trình mặt cầu tâm $I(a;b;c)$, bán kính R là: $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = R^2$.

Thay số: $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-0)^2 = 5^2 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 25$.

C

Câu 233. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho điểm $M(3;2;-1)$ và vectơ $\vec{v} = (2;-1;-2)$. Tọa độ của điểm N thỏa mãn điều kiện $\vec{v} = \overrightarrow{MN}$ là

Ⓐ $(1;5;-3)$. Ⓑ $(1;3;1)$.
Ⓒ $(-1;-3;-1)$. Ⓓ $(5;1;-3)$.

Hướng dẫn giải. Gọi $N(x;y;z)$. Ta có $\overrightarrow{MN} = (x-3;y-2;z+1)$.

Vì $\vec{v} = \overrightarrow{MN} \Rightarrow \begin{cases} x-3=2 \\ y-2=-1 \\ z+1=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=1 \\ z=-3 \end{cases}$. Vậy $N(5;1;-3)$.

D

Câu 234. Để chuẩn bị cho tiết học "Mạng xã hội: lợi và hại", giáo viên đã khảo sát thời gian sử dụng mạng xã hội trong một ngày của học sinh trong lớp 10A1 và thu được mẫu số liệu như sau:

Thời gian sử dụng (phút)	$[10;20)$	$[20;30)$	$[30;40)$	$[40;50)$	$[50;60)$	$[60;70)$
Số học sinh	5	10	15	7	5	3

Thời gian trung bình (phút) sử dụng mạng xã hội của học sinh lớp 10A1 xấp xỉ bằng

Ⓐ 35. Ⓑ 36,3. Ⓒ 33,6. Ⓓ 30,5.

Hướng dẫn giải. Giá trị đại diện các nhóm: $15;25;35;45;55;65$.

Số học sinh $n = 5 + 10 + 15 + 7 + 5 + 3 = 45$.

Thời gian trung bình: $\bar{x} = \frac{5\cdot15+10\cdot25+15\cdot35+7\cdot45+5\cdot55+3\cdot65}{45} = \frac{1635}{45} \approx 36,3$.

B

Câu 235. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 2$ và công bội $q = 3$. Số hạng u_3 của cấp số nhân đã cho là

Ⓐ 5. Ⓑ 6. Ⓒ 18. Ⓓ 8.

Hướng dẫn giải. Số hạng thứ ba của cấp số nhân là $u_3 = u_1 \cdot q^2 = 2 \cdot 3^2 = 2 \cdot 9 = 18$.

C

Câu 236. Nghiệm của phương trình $\log_2(x-1) = 3$ là

Ⓐ 10. Ⓑ 9. Ⓒ 8. Ⓓ 7.

Hướng dẫn giải. Điều kiện: $x > 1$.

Phương trình tương đương với $x - 1 = 2^3 \Leftrightarrow x - 1 = 8 \Leftrightarrow x = 9$ (thỏa mãn).

B

Câu 237. Phương trình $\tan x = -1$ có tất cả các nghiệm là

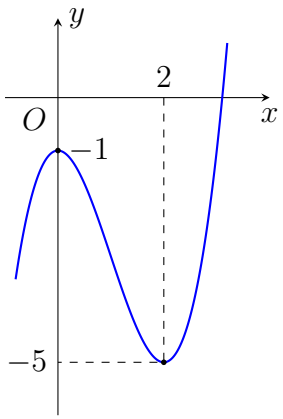
Ⓐ $\frac{\pi}{4} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$. Ⓑ $-\frac{\pi}{4} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Ⓒ $\frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$. Ⓓ $-\frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\tan x = -1 \Leftrightarrow x = \arctan(-1) + k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

D

Câu 238. Cho đồ thị như hình vẽ. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào sau đây?



Ⓐ $(-\infty; -1)$. Ⓑ $(2; +\infty)$. Ⓒ $(-1; 2)$. Ⓓ $(0; 2)$.

Hướng dẫn giải. Dựa vào đồ thị hàm số, ta thấy trên khoảng $(0; 2)$, đồ thị đi xuống từ trái sang phải. Do đó, hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.

D

Câu 239. Tập nghiệm của bất phương trình $(0,21)^x < 1$ là

Ⓐ $(-\infty; 0]$. Ⓑ $[0; +\infty)$. Ⓒ $(-\infty; 0)$. Ⓓ $(0; +\infty)$.

Hướng dẫn giải. Ta có $(0,21)^x < 1 \Leftrightarrow (0,21)^x < (0,21)^0$.

Vì cơ số $0,21 < 1$ nên bất phương trình tương đương với $x > 0$.

Vậy tập nghiệm là $(0; +\infty)$.

D

Câu 240. Tổ một của chi đoàn lớp 12C có 15 đoàn viên trong đó có 8 đoàn viên nam và 7 đoàn viên nữ. Chọn ngẫu nhiên 3 đoàn viên trong tổ. Tính xác suất để chọn được ít nhất 1 đoàn viên nữ.

Ⓐ $\frac{7}{15}$. Ⓑ $\frac{8}{65}$. Ⓒ $\frac{57}{65}$. Ⓓ $\frac{12}{13}$.

Hướng dẫn giải. Số cách chọn 3 đoàn viên bất kì từ 15 đoàn viên là $n(\Omega) = C_{15}^3 = 455$.
Gọi biến cố A: "Chọn được ít nhất 1 đoàn viên nữ".
Biến cố đối $\overline{A}$: "Không chọn được đoàn viên nữ nào" (tức chọn 3 nam từ 8 nam).
Số cách chọn của biến cố đối là $n(\overline{A}) = C_8^3 = 56$.
Xác suất của biến cố A là $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{56}{455} = \frac{399}{455} = \frac{57}{65}$.

C

Câu 241. Tập nghiệm của bất phương trình $3^{3x+1} < \frac{1}{9}$ là

Ⓐ $(-1; +\infty)$. Ⓑ $(-\infty; 1)$. Ⓒ $(1; +\infty)$. Ⓓ $(-\infty; -1)$.

Hướng dẫn giải. Ta có $3^{3x+1} < \frac{1}{9} \Leftrightarrow 3^{3x+1} < 3^{-2} \Leftrightarrow 3x + 1 < -2 \Leftrightarrow 3x < -3 \Leftrightarrow x < -1$.
Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $(-\infty; -1)$.

D

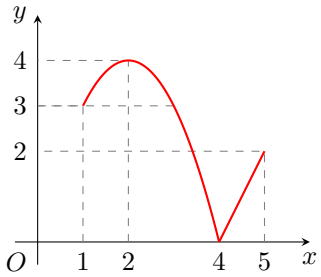
Câu 242. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 2$ và $u_6 = -64$. Số hạng u_3 của cấp số nhân đã cho là

Ⓐ 8. Ⓑ -8. Ⓒ 16. Ⓓ -2.

Hướng dẫn giải. Ta có $u_6 = u_1 \cdot q^5 \Leftrightarrow -64 = 2 \cdot q^5 \Leftrightarrow q^5 = -32 \Leftrightarrow q = -2$.
Số hạng $u_3 = u_1 \cdot q^2 = 2 \cdot (-2)^2 = 8$.

A

Câu 243. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[1; 5]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Trên đoạn $[1; 5]$ hàm số đã cho có giá trị lớn nhất tại điểm



Ⓐ $x = 1$. Ⓑ $x = 5$. Ⓒ $x = 2$. Ⓓ $x = 4$.

Hướng dẫn giải. Dựa vào đồ thị hàm số trên đoạn $[1; 5]$, ta thấy điểm cao nhất của đồ thị là điểm $(2; 4)$.
Vậy hàm số đạt giá trị lớn nhất tại điểm $x = 2$.

C

Câu 244. Cho hai biến cố A, B có $P(A) = 0,6$; $P(B) = 0,8$; $P(AB) = 0,48$. Tính $P(\overline{B}|A)$.

Ⓐ $0,48$. Ⓑ $0,6$. Ⓒ $0,75$. Ⓓ $0,2$.

Hướng dẫn giải. Ta có $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(AB) = 0,6 - 0,48 = 0,12$.
Xác suất có điều kiện: $P(\overline{B}|A) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(A)} = \frac{0,12}{0,6} = 0,2$.

D

Câu 245. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x = 3$, $\int_{0}^{3} f(x)\mathrm{d}x = 1$. Tích phân $\int_{-1}^{3} f(x)\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ 6. Ⓑ 4. Ⓒ 2. Ⓓ 0.

Hướng dẫn giải. Sử dụng tính chất nối của tích phân: $\int_{-1}^{3} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{3} f(x)\mathrm{d}x = 3 + 1 = 4$.

B

Câu 246. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;2;1)$, $B(3;0;1)$, $C(1;0;0)$. Phương trình mặt phẳng (ABC) là

Ⓐ $2x - 3y - 4z + 2 = 0$. Ⓑ $4x + 6y - 8z + 2 = 0$.
Ⓒ $2x + 3y - 4z - 2 = 0$. Ⓓ $2x - 3y - 4z - 2 = 0$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\overrightarrow{AB} = (3;-2;0)$ và $\overrightarrow{AC} = (1;-2;-1)$.
Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) là $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (2;3;-4)$.
Phương trình mặt phẳng (ABC) đi qua $C(1;0;0)$ là:
$2(x-1) + 3(y-0) - 4(z-0) = 0 \Leftrightarrow 2x + 3y - 4z - 2 = 0$.

C

Câu 247. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 4y + 3z - 2 = 0$. Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ pháp tuyến của (P)?

Ⓐ $\vec{n} = (0;-4;3)$. Ⓑ $\vec{n} = (1;4;3)$.
Ⓒ $\vec{n} = (-1;4;-3)$. Ⓓ $\vec{n} = (-4;3;-2)$.

Hướng dẫn giải. Mặt phẳng $(P): x-4y+3z-2 = 0$ có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_0 = (1;-4;3)$.
Vectơ ở đáp án C là $\vec{n} = (-1;4;-3) = -1 \cdot (1;-4;3)$, cùng phương với $\vec{n}_0$ nên cũng là một vectơ pháp tuyến của (P).

C

Câu 248. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là đường thẳng có phương trình

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'	$-$	$\|\|$	$-$
y	$2 \searrow -\infty$	$\|\|$	$+\infty \searrow 2$

Ⓐ $x = 2$. Ⓑ $y = 2$. Ⓒ $x = 1$. Ⓓ $y = 1$.

Hướng dẫn giải. Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$ và $\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$.
Do đó, đường thẳng $x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

C

Câu 249. Cho $f(x)$ và $g(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

Ⓐ $\int [f(x)+g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x$.

Ⓑ $\int kf(x)\mathrm{d}x = k\int f(x)\mathrm{d}x$ (số thực $k \neq 0$).

Ⓒ $\int f(x)g(x)\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x \cdot \int g(x)\mathrm{d}x$.

Ⓓ $\int f'(x)\mathrm{d}x = f(x) + C (C \in \mathbb{R})$.

Hướng dẫn giải. Nguyên hàm không có tính chất nguyên hàm của một tích bằng tích các nguyên hàm. Do đó khẳng định C là sai.

C

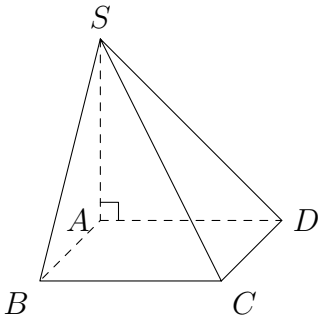
Câu 250. Với a là số thực dương tùy ý, $\log \frac{a^2}{100}$ bằng

Ⓐ $2\log a - 10$. Ⓑ $\frac{1}{2}(\log a - 2)$. Ⓒ $2\log a - 2$. Ⓓ $\log a - 5$.

Hướng dẫn giải. Ta có: $\log \frac{a^2}{100} = \log a^2 - \log 100 = 2\log a - 2$.

C

Câu 251. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình vuông cạnh a, $SA = a\sqrt{3}$. Đường thẳng $SA \perp (ABCD)$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng $(ABCD)$ là



Ⓐ $90°$. Ⓑ $30°$. Ⓒ $45°$. Ⓓ $60°$.

Hướng dẫn giải. Vì $SA \perp (ABCD)$ nên AB là hình chiếu của SB lên mặt phẳng $(ABCD)$.
Góc giữa SB và $(ABCD)$ là góc $\widehat{SBA}$.
Trong tam giác vuông SAB: $\tan \widehat{SBA} = \frac{SA}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SBA} = 60°$.

D

Câu 252. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 3; q = \frac{1}{2}$. Số $\frac{3}{512}$ là số hạng thứ mấy?

Ⓐ 11. Ⓑ 9. Ⓒ 10. Ⓓ 12.

Hướng dẫn giải. Số hạng tổng quát của cấp số nhân là $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$.
Ta có $\frac{3}{512} = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \Leftrightarrow \frac{1}{2^9} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \Leftrightarrow n - 1 = 9 \Leftrightarrow n = 10$.

C

Câu 253. Nhiệt độ trong 55 ngày của một địa phương được cho trong bảng ghép lớp sau:

Nhiệt độ ($°C$)	$[19;22)$	$[22;25)$	$[25;28)$	$[28;31)$	$[31;34)$	$[34;37)$
Số ngày	5	7	8	16	12	7

Phương sai của mẫu số liệu được làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất nằm trong khoảng

Ⓐ $(17;19)$. Ⓑ $(20;21)$. Ⓒ $(19;20)$. Ⓓ $(23;25)$.

Hướng dẫn giải. Giá trị đại diện của các nhóm: $x_1 = 20{,}5; x_2 = 23{,}5; x_3 = 26{,}5; x_4 = 29{,}5; x_5 = 32{,}5; x_6 = 35{,}5$.
Số ngày trung bình là $\bar{x} = \frac{5\cdot 20{,}5+7\cdot 23{,}5+8\cdot 26{,}5+16\cdot 29{,}5+12\cdot 32{,}5+7\cdot 35{,}5}{55} = 28{,}9$.
Phương sai $s^2 = \frac{1}{55}\left(\sum n_i x_i^2\right) - \bar{x}^2 \approx 19{,}4$.
Vì $19{,}4 \in (19;20)$ nên chọn C.

C

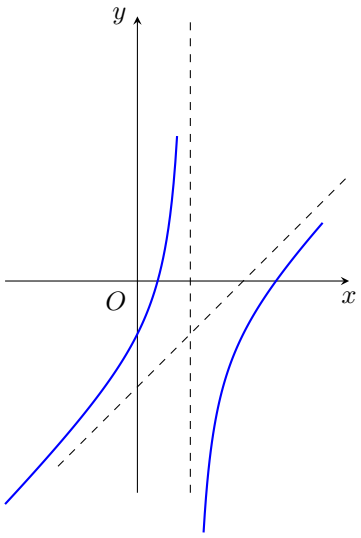
Câu 254. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^x \le \left(\frac{1}{3}\right)^{-x+2}$.

Ⓐ $(-\infty;1)$. Ⓑ $[1;+\infty)$. Ⓒ $(-\infty;1]$. Ⓓ $(1;+\infty)$.

Hướng dẫn giải. Vì cơ số $a = \frac{1}{3} < 1$ nên bất phương trình tương đương với:
$x \ge -x+2 \Leftrightarrow 2x \ge 2 \Leftrightarrow x \ge 1$.
Vậy tập nghiệm là $[1;+\infty)$.

B

Câu 255. Đồ thị trong hình vẽ là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số dưới đây?



Ⓐ $y = \frac{2x+1}{x-1}$. Ⓑ $y = \frac{2x-1}{x-1}$.
Ⓒ $y = \frac{-x^2+3x+1}{x-1}$. Ⓓ $y = \frac{x^2-3x+1}{x-1}$.

Hướng dẫn giải. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 1$ và tiệm cận xiên là đường thẳng có hệ số góc dương. Ta thấy hàm số $y = \frac{x^2-3x+1}{x-1} = x - 2 - \frac{1}{x-1}$ có tiệm cận đứng $x = 1$ và tiệm cận xiên $y = x - 2$. Ngoài ra đồ thị đi qua điểm $(0;-1)$.

D

Câu 256. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;1;1)$ và $B(0;3;-1)$. Mặt cầu đường kính AB có phương trình là

Ⓐ $(x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 9$.
Ⓑ $x^2 + (y-2)^2 + z^2 = 3$.
Ⓒ $(x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 3$.
Ⓓ $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$.

Hướng dẫn giải. Tâm I của mặt cầu là trung điểm AB: $I(1;2;0)$.

Bán kính $R = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{(0-2)^2+(3-1)^2+(-1-1)^2}}{2} = \frac{\sqrt{4+4+4}}{2} = \sqrt{3}$.
Phương trình mặt cầu: $(x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 3$.

C

Câu 257. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{2}$ và mặt phẳng $(P) : 2x - y - z - 5 = 0$. Hãy tính côsin góc tạo bởi đường thẳng (d) và mặt phẳng (P).

Ⓐ $\frac{1}{\sqrt{6}}$. Ⓑ $\frac{1}{2}$. Ⓒ $\frac{\sqrt{30}}{6}$. Ⓓ $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Hướng dẫn giải. Vectơ chỉ phương của d là $\vec{u} = (2; -1; 2)$, vectơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n} = (2; -1; -1)$.
Gọi α là góc giữa đường thẳng và mặt phẳng. Ta có:
$\sin\alpha = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{n}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{n}|} = \frac{|2\cdot2+(-1)\cdot(-1)+2\cdot(-1)|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}\cdot\sqrt{2^2+(-1)^2+(-1)^2}} = \frac{3}{3\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$.
Khi đó $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{1}{6}} = \frac{\sqrt{30}}{6}$.

C

Câu 258. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên dưới.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		$+$		$+$	0	$-$	
y	-1	↗	$+\infty$	↗	2	↘	$-\infty$

Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tổng số bao nhiêu đường tiệm cận đứng và ngang?

Ⓐ 2. Ⓑ 0. Ⓒ 1. Ⓓ 3.

Hướng dẫn giải. - Dựa vào bảng biến thiên, ta có $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1 \Rightarrow y = -1$ là tiệm cận ngang.
- Ta có $\lim_{x\to1^-} f(x) = +\infty$ (hoặc $\lim_{x\to1^+} f(x) = -\infty$) $\Rightarrow x = 1$ là tiệm cận đứng.
Vậy đồ thị hàm số có tổng cộng 2 đường tiệm cận.

A

Câu 259. Hai khẩu pháo cao xạ cùng bắn độc lập với nhau vào một mục tiêu. Xác suất bắn trúng mục tiêu của hai khẩu pháo cao xạ lần lượt là $\frac{1}{4}$ và $\frac{1}{3}$. Xác suất để mục tiêu bị trúng đạn là:

Ⓐ $\frac{1}{2}$. Ⓑ $\frac{7}{12}$. Ⓒ $\frac{5}{12}$. Ⓓ $\frac{1}{4}$.

Hướng dẫn giải. Gọi A, B lần lượt là biến cố khẩu pháo thứ nhất và thứ hai bắn trúng. $P(A) = \frac{1}{4}, P(B) = \frac{1}{3}$.
Xác suất để mục tiêu không bị trúng đạn là: $P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) = (1-\frac{1}{4})(1-\frac{1}{3}) = \frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{2}$.
Xác suất để mục tiêu bị trúng đạn là: $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

A

Câu 260. Phương trình $\sin x = -1$ có nghiệm là

Ⓐ $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. Ⓑ $x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
Ⓒ $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Ⓓ $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Hướng dẫn giải. Theo công thức nghiệm cơ bản: $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

D

Câu 261. Khảo sát thu nhập theo tháng của người lao động ở một công ty thu được mẫu số ghép nhóm như bảng sau:

Thu nhập (triệu đồng)	$[5;8)$	$[8;11)$	$[11;14)$	$[14;17)$	$[17;20)$
Số người	30	55	45	30	20

Tính mức thu nhập trung bình của người lao động ở công ty trên (đơn vị: triệu đồng)

Ⓐ $10,5$. Ⓑ $11,75$. Ⓒ $12,5$. Ⓓ 11.

Hướng dẫn giải. Giá trị đại diện các nhóm lần lượt là: $6,5; 9,5; 12,5; 15,5; 18,5$.

Tổng số người: $n = 30 + 55 + 45 + 30 + 20 = 180$.

Trung bình: $\bar{x} = \frac{30 \cdot 6,5 + 55 \cdot 9,5 + 45 \cdot 12,5 + 30 \cdot 15,5 + 20 \cdot 18,5}{180} = \frac{2115}{180} = 11,75$.

B

Câu 262. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	-4	↗	$+\infty$

Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm

Ⓐ $y = 0$. Ⓑ $x = -4$. Ⓒ $y = -4$. Ⓓ $x = 3$.

Hướng dẫn giải. Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy đạo hàm đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua $x = 3$.

Vậy hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 3$.

D

Câu 263. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;0;1)$. Tìm tọa độ điểm C thỏa mãn $\overrightarrow{AC} = (3;3;0)$?

Ⓐ $C(2;3;1)$. Ⓑ $C(3;3;0)$.
Ⓒ $C(-3;-3;-1)$. Ⓓ $C(4;3;1)$.

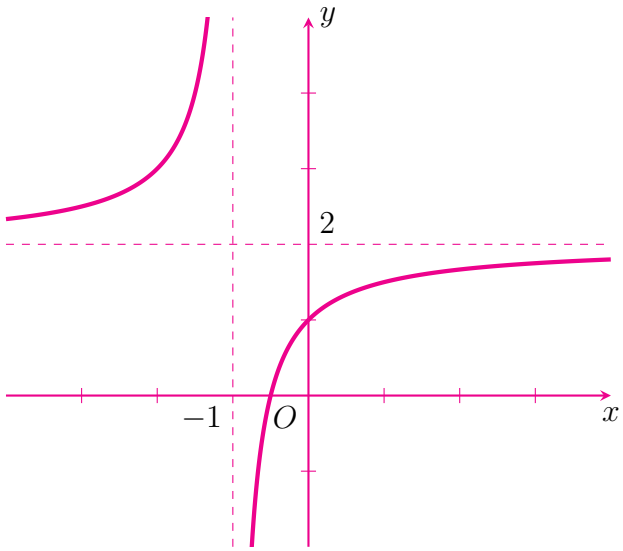
Hướng dẫn giải. Gọi $C(x;y;z)$. Ta có $\overrightarrow{AC} = (x-1; y-0; z-1)$.

Theo giả thiết $\overrightarrow{AC} = (3;3;0) \Rightarrow \begin{cases} x-1=3 \\ y=3 \\ z-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=3 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow C(4;3;1)$.

D

Câu 264. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C) như hình vẽ. Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

là đường thẳng có phương trình:



Ⓐ $x=-1$. Ⓑ $x=1$. Ⓒ $y=2$. Ⓓ $y=-2$.

Hướng dẫn giải. Dựa vào đồ thị hàm số, khi $x\to\pm\infty$ thì đồ thị hàm số tiến dần về đường thẳng nằm ngang $y=2$. Vậy tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là đường thẳng $y=2$.

C

Câu 265. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	1	↗	2	↘	$-\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

Ⓐ $(-1;1)$. Ⓑ $(1;+\infty)$. Ⓒ $(0;1)$. Ⓓ $(-1;0)$.

Hướng dẫn giải. Dựa vào bảng biến thiên, hàm số đồng biến trên các khoảng mà $f'(x)>0$, đó là $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$. Đối chiếu các đáp án, ta chọn khoảng $(0;1)$.

C

Câu 266. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1=3$, công sai $d=-4$. Số hạng thứ năm của cấp số cộng là

Ⓐ -3072. Ⓑ -13. Ⓒ -17. Ⓓ 768.

Hướng dẫn giải. Số hạng thứ năm của cấp số cộng là $u_5=u_1+4d=3+4\cdot(-4)=3-16=-13$.

B

Câu 267. Một chất điểm chuyển động có phương trình $s=2t^2+3t$ (t tính bằng giây, s tính bằng mét). Vận tốc của chất điểm tại thời điểm $t_0=2$ (giây) bằng

Ⓐ $19(m/s)$. Ⓑ $22(m/s)$. Ⓒ $11(m/s)$. Ⓓ $9(m/s)$.

Hướng dẫn giải. Vận tốc của chất điểm tại thời điểm t là $v(t) = s'(t) = 4t + 3$.
Tại thời điểm $t_0 = 2$, vận tốc của chất điểm là $v(2) = 4 \cdot 2 + 3 = 11$ (m/s).

C

Câu 268. Doanh thu bán hàng trong 20 ngày được lựa chọn ngẫu nhiên của một cửa hàng được ghi lại ở bảng sau (đơn vị: triệu đồng):

Doanh thu	$[5;7)$	$[7;9)$	$[9;11)$	$[11;13)$	$[13;15)$
Số ngày	2	7	7	3	1

Số trung bình của mẫu số liệu trên thuộc khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

Ⓐ $[11;13)$. Ⓑ $[13;15)$. Ⓒ $[9;11)$. Ⓓ $[7;9)$.

Hướng dẫn giải. Giá trị đại diện các nhóm lần lượt là: $x_1 = 6, x_2 = 8, x_3 = 10, x_4 = 12, x_5 = 14$.
Số trung bình là: $\bar{x} = \dfrac{6 \cdot 2 + 8 \cdot 7 + 10 \cdot 7 + 12 \cdot 3 + 14 \cdot 1}{20} = \dfrac{12 + 56 + 70 + 36 + 14}{20} = \dfrac{188}{20} = 9{,}4$.
Vì $9{,}4 \in [9;11)$ nên số trung bình của mẫu số liệu thuộc khoảng $[9;11)$.

C

Câu 269. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 4$ và công bội $q = 3$. Giá trị của u_2 bằng

Ⓐ 64. Ⓑ 81. Ⓒ 12. Ⓓ $\frac{4}{3}$.

Hướng dẫn giải. Số hạng thứ hai của cấp số nhân là $u_2 = u_1 \cdot q = 4 \cdot 3 = 12$.

C

Câu 270. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 + 2x + \cos x$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

Ⓐ $f'(x) = 3x^2 + 2 + \sin x$.
Ⓑ Hàm số đồng biến trên $(-\pi;\pi)$.
Ⓒ Hàm số nghịch biến trên $(\pi;2\pi)$.
Ⓓ $f(2025) > f(2026)$.

Hướng dẫn giải. Ta có $f'(x) = 3x^2 + 2 - \sin x$.
Vì $-1 \le \sin x \le 1 \Rightarrow f'(x) \ge 3x^2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
Do đó hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$, suy ra hàm số đồng biến trên $(-\pi;\pi)$.

B

Câu 271. Có bao nhiêu cách xếp 8 học sinh thành một hàng dọc?

Ⓐ 8. Ⓑ 1. Ⓒ 40 320. Ⓓ 64.

Hướng dẫn giải. Số cách xếp 8 học sinh thành một hàng dọc là số hoán vị của 8 phần tử: $P_8 = 8! = 40\,320$.

C

Câu 272. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B, $AB = a$, $BC = a\sqrt{2}$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$ (tham khảo hình bên). Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng

Ⓐ $90°$. Ⓑ $45°$. Ⓒ $60°$. Ⓓ $30°$.

Hướng dẫn giải. Ta có $SA \perp (ABC) \Rightarrow AC$ là hình chiếu của SC trên mặt phẳng (ABC).

Góc giữa SC và (ABC) là $\widehat{SCA} = \varphi$.
Xét tam giác vuông ABC: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + (a\sqrt{2})^2} = a\sqrt{3}$.
Xét tam giác vuông SAC: $\tan\varphi = \frac{SA}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \varphi = 30^\circ$.

D

Câu 273. Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn $9^{\log_3(a^2b)} = 4a^3$. Giá trị của ab^2 bằng

Ⓐ 4. Ⓑ 2. Ⓒ 3. Ⓓ 6.

Hướng dẫn giải. Ta có $9^{\log_3(a^2b)} = (3^2)^{\log_3(a^2b)} = 3^{2\log_3(a^2b)} = (a^2b)^2 = a^4b^2$.
Theo đề bài: $a^4b^2 = 4a^3 \Leftrightarrow ab^2 = 4$ (vì $a > 0$).

A

Câu 274. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có bảng xét dấu đạo hàm $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

Ⓐ Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;0)$..
Ⓑ Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$..
Ⓒ Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$..
Ⓓ Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$..

Hướng dẫn giải. Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy trên khoảng $(0;2)$ thì $f'(x) < 0$ nên hàm số nghịch biến.

C

Câu 275. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(x-5) \le 4$ chứa bao nhiêu số nguyên?

Ⓐ 15. Ⓑ 16. Ⓒ 17. Ⓓ 18.

Hướng dẫn giải. Điều kiện: $x - 5 > 0 \Leftrightarrow x > 5$.
Bất phương trình tương đương: $x - 5 \le 2^4 = 16 \Leftrightarrow x \le 21$.
Kết hợp điều kiện, ta có tập nghiệm $S = (5;21]$.
Các số nguyên $x \in \{6;7;\ldots;21\}$. Số lượng số nguyên là $21 - 6 + 1 = 16$.

B

Câu 276. Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = x\ln x$ tại điểm có hoành độ $x = e$ bằng

Ⓐ 1. Ⓑ 0. Ⓒ 2. Ⓓ e.

Hướng dẫn giải. Ta có $y' = (x\ln x)' = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$.
Hệ số góc của tiếp tuyến tại $x = e$ là $k = y'(e) = \ln e + 1 = 1 + 1 = 2$.

C

Câu 277. Hàm số nào sau đây nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

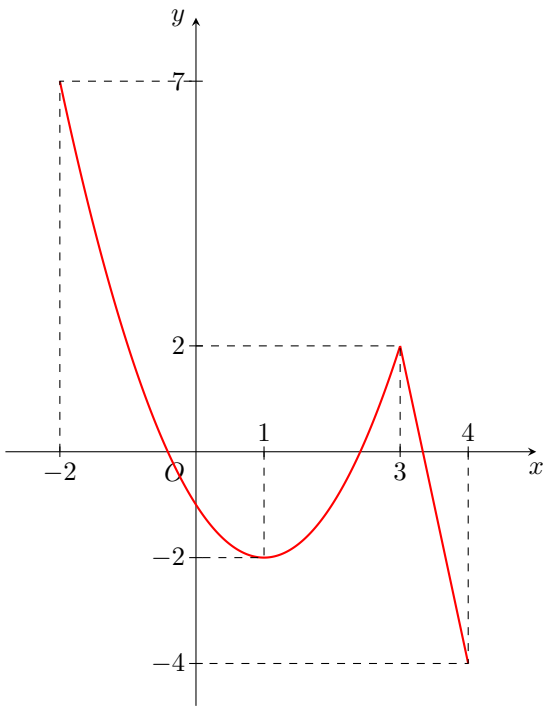
Ⓐ $y = x^3 + x$. Ⓑ $y = -x^3 - 3x$.
Ⓒ $y = -x^4 - x^2$. Ⓓ $y = \frac{x+1}{x-3}$.

Hướng dẫn giải. - Xét hàm số $y = -x^3 - 3x$, ta có $y' = -3x^2 - 3 = -3(x^2+1) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy hàm số $y=-x^3-3x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

B

Câu 278. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2;4]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-2;4]$ bằng



Ⓐ 5. Ⓑ -2. Ⓒ 3. Ⓓ 0.

Hướng dẫn giải. Dựa vào đồ thị hàm số trên đoạn $[-2;4]$, ta thấy:

- Giá trị lớn nhất là $M=\max\limits_{[-2;4]} f(x)=7$ tại $x=-2$.
- Giá trị nhỏ nhất là $m=\min\limits_{[-2;4]} f(x)=-4$ tại $x=4$.

Vậy tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất là $M+m=7+(-4)=3$.

C

Câu 279. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định sai?

Ⓐ $(\overrightarrow{A'C'},\overrightarrow{AD})=45°$. Ⓑ $(\overrightarrow{A'C'},\overrightarrow{B'B})=90°$.
Ⓒ $(\overrightarrow{A'A},\overrightarrow{CB'})=45°$. Ⓓ $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})=180°$.

Hướng dẫn giải. Giả sử hình lập phương có cạnh bằng 1 và gắn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $A(0;0;0), B(1;0;0), D(0;1;0), A'(0;0;1)$.
Khi đó $C(1;1;0), B'(1;0;1)$. Ta có $\overrightarrow{A'A}=(0;0;-1)$ và $\overrightarrow{CB'}=(1-1;0-1;1-0)=(0;-1;1)$.
$\cos(\overrightarrow{A'A},\overrightarrow{CB'})=\frac{0\cdot0+0\cdot(-1)+(-1)\cdot1}{1\cdot\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow(\overrightarrow{A'A},\overrightarrow{CB'})=135°$.
Vậy khẳng định C sai.

C

Câu 280. Cho hình hộp $ABCD.EFGH$. Vectơ nào sau đây bằng vectơ $\overrightarrow{FH}$

Ⓐ $\overrightarrow{BD}$. Ⓑ $\overrightarrow{DB}$. Ⓒ $\overrightarrow{BA}$. Ⓓ $\overrightarrow{AB}$.

Hướng dẫn giải. Trong hình hộp $ABCD.EFGH$, tứ giác $BDHF$ là hình bình hành.

Do đó, $\overrightarrow{FH} = \overrightarrow{BD}$.

A

Câu 281. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, với $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ là các vectơ đơn vị trên trục Ox, Oy, Oz tương ứng và vectơ $\vec{a} = (1;0;1)$. Kết quả nào sau đây đúng?

Ⓐ $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$. Ⓑ $\vec{a} = \vec{j} + \vec{k}$.
Ⓒ $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$. Ⓓ $\vec{a} = \vec{i} + \vec{k}$.

Hướng dẫn giải. Theo định nghĩa tọa độ vectơ: $\vec{a} = (x;y;z) \Leftrightarrow \vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.
Với $\vec{a} = (1;0;1)$, ta có $\vec{a} = 1\vec{i} + 0\vec{j} + 1\vec{k} = \vec{i} + \vec{k}$.

D

Câu 282. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Tổng $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD}$ bằng

Ⓐ $4\overrightarrow{SO}$. Ⓑ $8\overrightarrow{SO}$. Ⓒ $3\overrightarrow{SO}$. Ⓓ $2\overrightarrow{SO}$.

Hướng dẫn giải. Vì O là tâm hình bình hành $ABCD$ nên O là trung điểm của AC và BD.
Ta có: $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = 2\overrightarrow{SO}$ và $\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = 2\overrightarrow{SO}$.
Cộng vế theo vế: $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = 4\overrightarrow{SO}$.

A

Câu 283. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 2$ trên đoạn $[-3;3]$ bằng

Ⓐ 0. Ⓑ -16. Ⓒ 4. Ⓓ 20.

Hướng dẫn giải. Ta có $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$ (đều thuộc $[-3;3]$).
Tính các giá trị: $f(-3) = -16, f(3) = 20, f(1) = 0, f(-1) = 4$.
Vậy $\min_{[-3;3]} f(x) = -16$.

B

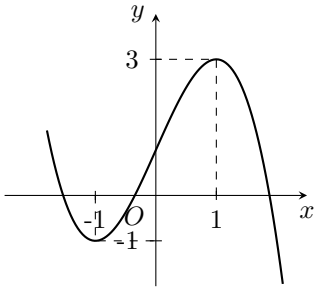
Câu 284. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho vectơ $\vec{u} = \vec{j} - 4\vec{k}$. Tọa độ của vectơ $\vec{u}$ là

Ⓐ $(1;-4)$. Ⓑ $(0;1;-4)$. Ⓒ $(1;0;-4)$. Ⓓ $(0;-1;4)$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\vec{u} = 0\vec{i} + 1\vec{j} - 4\vec{k} \Rightarrow \vec{u} = (0;1;-4)$.

B

Câu 285. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$ có đồ thị trên $\mathbb{R}$ là đường cong trong hình bên. Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng



Ⓐ 1. Ⓑ 3. Ⓒ 0. Ⓓ -1.

Hướng dẫn giải. Dựa vào đồ thị, hàm số đạt cực đại tại điểm $(1;3)$.

Giá trị cực đại là tung độ của điểm cực đại, vậy $y_{C\text{Đ}} = 3$.

B

Câu 286. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
y'		$+$		$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	4	↘	$-\infty$

Ⓐ Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$ và $(3;+\infty)$..

Ⓑ Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$..

Ⓒ Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(3;+\infty)$..

Ⓓ Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;3)$..

Hướng dẫn giải. Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy trên khoảng $(3;+\infty)$ đạo hàm $y' < 0$ nên hàm số nghịch biến. Các khoảng còn lại có chứa điểm không xác định hoặc đạo hàm đổi dấu.

C

Câu 287. Hình chiếu vuông góc của điểm $A(2;3;-1)$ trên mặt phẳng (Oyz) là điểm

Ⓐ $M(2;0;0)$. Ⓑ $N(0;-3;1)$.

Ⓒ $P(0;3;-1)$. Ⓓ $Q(-2;3;-1)$.

Hướng dẫn giải. Hình chiếu vuông góc của điểm $A(x_0;y_0;z_0)$ lên mặt phẳng (Oyz) là điểm có tọa độ $(0;y_0;z_0)$.

Vậy hình chiếu của $A(2;3;-1)$ lên (Oyz) là điểm $P(0;3;-1)$.

C

Câu 288. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai véc-tơ $\vec{x} = (2;1;-3)$ và $\vec{y} = (1;0;-1)$. Tìm tọa độ của véc-tơ $\vec{a} = \vec{x} + 2\vec{y}$.

Ⓐ $\vec{a} = (4;1;-1)$. Ⓑ $\vec{a} = (3;1;-4)$.

Ⓒ $\vec{a} = (0;1;-1)$. Ⓓ $\vec{a} = (4;1;-5)$.

Hướng dẫn giải. Ta có $2\vec{y} = (2;0;-2)$.

Khi đó $\vec{a} = \vec{x} + 2\vec{y} = (2+2;1+0;-3-2) = (4;1;-5)$.

D

Câu 289. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

x	$-\infty$		-5		-1		3		4		5		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	

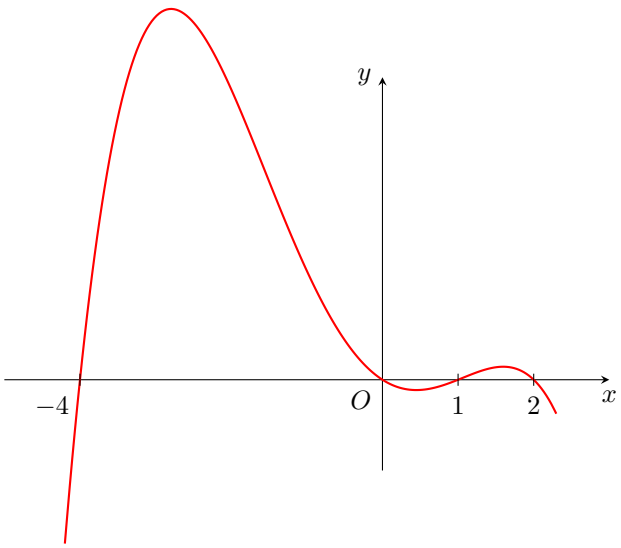
Ⓐ 3. Ⓑ 4. Ⓒ 5. Ⓓ 2.

Hướng dẫn giải. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$, điểm cực trị là điểm mà tại đó đạo hàm đổi dấu.
- Tại $x=-5$, y' đổi dấu từ $-$ sang $+$.
- Tại $x=-1$, y' đổi dấu từ $+$ sang $-$.
- Tại $x=4$, y' đổi dấu từ $-$ sang $+$.

Tại $x=3$ và $x=5$ đạo hàm không đổi dấu. Vậy hàm số có 3 điểm cực trị.

A

Câu 290. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên. Hỏi hàm số $y=f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?



Ⓐ 3. Ⓑ 2. Ⓒ 1. Ⓓ 4.

Hướng dẫn giải. Số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$ chính là số lần đạo hàm $y=f'(x)$ đổi dấu khi đi qua trục hoành.
Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'(x)$, ta thấy đồ thị cắt và đổi dấu qua trục hoành tại các điểm:

- $x=-4$ (đổi dấu từ âm sang dương).
- $x=0$ (đổi dấu từ dương sang âm).
- $x=1$ (đổi dấu từ âm sang dương).
- $x=2$ (đổi dấu từ dương sang âm).

Như vậy, hàm số $f'(x)$ đổi dấu tổng cộng 4 lần. Do đó, hàm số $y=f(x)$ có 4 điểm cực trị.

D

Câu 291. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{3x^3-2x^2+5}{x}$ là

Ⓐ $x^3-x^2+5\ln x+C$. Ⓑ $x^3-x^2+5\ln x+C$.
Ⓒ $x^3-x^2+5\ln|x|$. Ⓓ $x^3-x^2+5\ln|x|+C$.

Hướng dẫn giải. Ta có $f(x)=\frac{3x^3-2x^2+5}{x}=3x^2-2x+\frac{5}{x}$.
Khi đó, họ nguyên hàm của hàm số là:

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int\left(3x^2-2x+\frac{5}{x}\right)\mathrm{d}x=x^3-x^2+5\ln|x|+C.$$

D

Câu 292. Có 8 học sinh và 3 thầy giáo A, B, C. Hỏi có bao nhiêu cách xếp chỗ 11 người đó ngồi trên một hàng ngang có 11 chỗ sao cho mỗi thầy giáo ngồi giữa hai học sinh?

Ⓐ 3 991 6800. Ⓑ 241 920. Ⓒ 3 386 880. Ⓓ 8 467 200.

Hướng dẫn giải. Đầu tiên, xếp 8 học sinh thành một hàng ngang, có 8! cách.
Giữa 8 học sinh có 7 khoảng trống (không tính 2 đầu vì thầy giáo phải ngồi giữa 2 học sinh).
Chọn 3 khoảng trống trong 7 khoảng trống đó và xếp 3 thầy giáo A, B, C vào, có A_7^3 cách.
Vậy số cách xếp thỏa mãn là: $8! \cdot A_7^3 = 40\,320 \cdot (7 \cdot 6 \cdot 5) = 8\,467\,200$ (cách).

D

Câu 293. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = (2;3;1)$, $\vec{b} = (-1;5;2)$, $\vec{c} = (4;-1;3)$ và $\vec{x} = (-3;22;5)$. Đẳng thức nào đúng trong các đẳng thức sau?

Ⓐ $\vec{x} = 2\vec{a} - 3\vec{b} - \vec{c}$. Ⓑ $\vec{x} = -2\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{c}$.
Ⓒ $\vec{x} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}$. Ⓓ $\vec{x} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$.

Hướng dẫn giải. Kiểm tra phương án C: $2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c} = 2(2;3;1) + 3(-1;5;2) - (4;-1;3) = (4-3-4; 6+15+1; 2+6-3) = (-3;22;5)$.
Đẳng thức này trùng với tọa độ của vectơ $\vec{x}$.

C

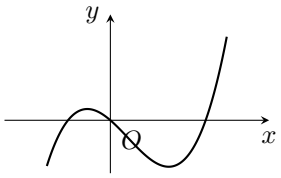
Câu 294. Cho $\int_1^4 g(x)\mathrm{d}x = \int_1^0 g(x)\mathrm{d}x = 3$. Khi đó $\int_0^4 (g(x)+1)\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ 4. Ⓑ 9. Ⓒ 14. Ⓓ 6.

Hướng dẫn giải. Ta có $\int_1^0 g(x)\mathrm{d}x = 3 \Rightarrow \int_0^1 g(x)\mathrm{d}x = -3$.
Suy ra $\int_0^4 g(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 g(x)\mathrm{d}x + \int_1^4 g(x)\mathrm{d}x = -3 + 3 = 0$.
Khi đó: $\int_0^4 (g(x)+1)\mathrm{d}x = \int_0^4 g(x)\mathrm{d}x + \int_0^4 1\mathrm{d}x = 0 + [x]_0^4 = 4$.

A

Câu 295. Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2$, $(a, b, c \in \mathbb{R})$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $4f(x) + 5 = 0$ là



Ⓐ 4. Ⓑ 2. Ⓒ 3. Ⓓ 1.

Hướng dẫn giải. Từ đồ thị $y = f'(x)$, ta thấy $f'(x) = 0$ tại $x_1 < 0, x_2 = 0, x_3 > 0$. Dựa vào dấu đạo hàm, $f(x)$ đạt cực tiểu tại x_1, x_3 và đạt cực đại tại $x_2 = 0$.
Vì $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 \Rightarrow f(0) = 0$. Đồ thị $y = f(x)$ có dạng chữ W với đỉnh giữa nằm tại gốc tọa độ $O(0,0)$.
Phương trình $4f(x) + 5 = 0 \Leftrightarrow f(x) = -\frac{5}{4} = -1,25$.
Đường thẳng $y = -1,25$ nằm dưới trục hoành $(y = 0)$, cắt đồ thị hàm số $f(x)$ tại 2 điểm phân

biệt (tương ứng với các nhánh đi từ các điểm cực tiểu lên hoặc xuống).

B

Câu 296. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-10;10]$ để đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+4m}}$ có đúng 4 đường tiệm cận?

Ⓐ 11. Ⓑ 10. Ⓒ 8. Ⓓ 9.

Hướng dẫn giải. - Tiệm cận ngang: $\lim_{x\to+\infty} y = 1$ và $\lim_{x\to-\infty} y = -1$. Đồ thị luôn có 2 tiệm cận ngang $y = 1, y = -1$.
- Để đồ thị có 4 đường tiệm cận thì cần có thêm 2 đường tiệm cận đứng. Điều này xảy ra khi phương trình $x^2 + 4m = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 và các nghiệm này không làm triệt tiêu tử số $x - 2$ (hoặc bậc của nghiệm ở mẫu lớn hơn ở tử).
$x^2 = -4m > 0 \Rightarrow m < 0$.
Nếu $x = 2$ là nghiệm mẫu số: $2^2 + 4m = 0 \Rightarrow m = -1$. Khi $m = -1$, $y = \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4}} = \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}}$, chỉ có 1 tiệm cận đứng $x = -2$.
Vậy điều kiện là $m < 0$ và $m \neq -1$.
Vì $m \in [-10;10]$ nên $m \in \{-10;-9;-8;-7;-6;-5;-4;-3;-2\}$. Có 9 giá trị.

D

Câu 297. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1;2;-1)$, $B(2;-1;3)$, $C(-4;7;5)$. Gọi $D(a;b;c)$ là chân đường phân giác trong góc B của tam giác ABC. Giá trị của $a + b + 2c$ bằng

Ⓐ 5. Ⓑ 4. Ⓒ 14. Ⓓ 15.

Hướng dẫn giải. Ta có $BA = \sqrt{(1-2)^2 + (2+1)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{26}$.
$BC = \sqrt{(-4-2)^2 + (7+1)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{36+64+4} = \sqrt{104} = 2\sqrt{26}$.
Theo tính chất đường phân giác trong: $\frac{DA}{DC} = \frac{BA}{BC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \overrightarrow{DA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{DC} \Rightarrow \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{DA}$.
Tọa độ điểm D: $a = \frac{2\cdot1+(-4)}{1+2} = -\frac{2}{3}$; $b = \frac{2\cdot2+7}{3} = \frac{11}{3}$; $c = \frac{2\cdot(-1)+5}{3} = 1$.
Vậy $a + b + 2c = -\frac{2}{3} + \frac{11}{3} + 2(1) = 3 + 2 = 5$.

A

Câu 298. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(3;-1;1)$, $B(0;-3;3)$, $C(1;7;1)$. Biết rằng tọa độ điểm M thỏa mãn $|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất có dạng $M(a;b;c)$. Giá trị $T = abc$ bằng

Ⓐ 10. Ⓑ 4. Ⓒ 0. Ⓓ 3.

Hướng dẫn giải. Gọi I là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC} = \vec{0}$. Tọa độ điểm I: $x_I = \frac{3+2(0)+1}{4} = 1$; $y_I = \frac{-1+2(-3)+7}{4} = 0$; $z_I = \frac{1+2(3)+1}{4} = 2$.
Ta có $|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = |4\overrightarrow{MI} + (\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC})| = 4MI$.
Biểu thức nhỏ nhất khi M trùng với I, hay $M(1;0;2)$.
Khi đó $T = abc = 1 \cdot 0 \cdot 2 = 0$.

C

Câu 299. Đầu mùa thu hoạch sầu riêng, ông A đã bán cho người thứ nhất nửa số sầu riêng thu hoạch được và tặng thêm 1 quả, bán cho người thứ hai nửa số sầu riêng còn lại và tặng thêm 1 quả. Ông cứ tiếp tục cách bán như trên thì đến người thứ bảy số sầu riêng của ông được bán hết. Số sầu riêng mà ông A thu hoạch được là

Ⓐ 216 quả. Ⓑ 128 quả. Ⓒ 256 quả. Ⓓ 254 quả.

Hướng dẫn giải. Gọi u_n là số quả sầu riêng còn lại sau khi bán cho người thứ n.

Theo đề bài, ta có công thức truy hồi: $u_n = u_{n-1} - \left(\frac{1}{2}u_{n-1} + 1\right) = \frac{1}{2}u_{n-1} - 1$ (với u_0 là số sầu riêng ban đầu).

Từ đó suy ra $u_{n-1} = 2(u_n + 1)$.

Biết rằng sau người thứ 7 thì hết sầu riêng, nên $u_7 = 0$. Ta tính ngược lại:

$u_6 = 2(0 + 1) = 2$.

$u_5 = 2(2 + 1) = 6$.

$u_4 = 2(6 + 1) = 14$.

$u_3 = 2(14 + 1) = 30$.

$u_2 = 2(30 + 1) = 62$.

$u_1 = 2(62 + 1) = 126$.

$u_0 = 2(126 + 1) = 254$.

Vậy số sầu riêng ông A thu hoạch được ban đầu là 254 quả.

D

Câu 300. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(2;1;1)$, $B(1;2;3)$, $C(-1;2;0)$. Điểm $M(x;y;z)$ thỏa mãn $\cos(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) + \cos(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MC}) = 0$ và tồn tại số thực k sao cho

$$\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB} + k(3k+1)\overrightarrow{AC}.$$

Tổng $x + 2y + 3z - k$ bằng

Ⓐ $\frac{19}{3}$. Ⓑ 5. Ⓒ 7. Ⓓ 6.

Hướng dẫn giải. Điều kiện $\cos(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) + \cos(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MC}) = 0 \Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{MA}}{MA} \cdot \left(\frac{\overrightarrow{MB}}{MB} + \frac{\overrightarrow{MC}}{MC}\right) = 0$.

Nếu M nằm trên đoạn thẳng BC thì $\frac{\overrightarrow{MB}}{MB} + \frac{\overrightarrow{MC}}{MC} = \vec{0}$, khi đó đẳng thức trên luôn đúng.

Để M thuộc đường thẳng BC thì tổng các hệ số của $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ trong biểu diễn $\overrightarrow{AM}$ phải bằng 1:

$$k + k(3k+1) = 1 \Leftrightarrow 3k^2 + 2k - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = \dfrac{1}{3} \\ k = -1 \end{array}\right.$$

- Với $k = \frac{1}{3}$, ta có $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$. Vì các hệ số $\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \in (0,1)$ nên M nằm giữa B và C (thỏa mãn).

- Với $k = -1$, ta có $\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$, M nằm ngoài đoạn BC. Thử lại điều kiện cosin không thỏa mãn.

Với $k = \frac{1}{3}$, ta có $\overrightarrow{AB} = (-1;1;2)$ và $\overrightarrow{AC} = (-3;1;-1)$.

$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}(-1;1;2) + \frac{2}{3}(-3;1;-1) = \left(-\frac{7}{3};1;0\right)$.

Tọa độ điểm $M = A + \overrightarrow{AM} = (2;1;1) + \left(-\frac{7}{3};1;0\right) = \left(-\frac{1}{3};2;1\right)$.

$\Rightarrow x = -\frac{1}{3}, y = 2, z = 1$.

Tổng $x + 2y + 3z - k = -\frac{1}{3} + 2(2) + 3(1) - \frac{1}{3} = 7 - \frac{2}{3} = \frac{19}{3}$.

A

Chương V

ĐÁP ÁN PHẦN TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

Bài 1. Cho hàm số $f(x) = 2\cos x + x$.

a) $f(0) = 2; f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$.

b) Đạo hàm của hàm số đã cho là $f'(x) = 2\sin x + 1$.

c) Nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$ trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ là $\frac{\pi}{6}$.

d) Giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ là $\sqrt{3} + \frac{\pi}{6}$.

Hướng dẫn giải. a) **Đúng.** Ta có $f(0) = 2\cos(0) + 0 = 2 \cdot 1 + 0 = 2$.
$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} = 2 \cdot 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$.
b) **Sai.** Đạo hàm của hàm số là $f'(x) = (2\cos x + x)' = -2\sin x + 1$.
c) **Đúng.** Phương trình $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2\sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.
Trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, nghiệm duy nhất của phương trình là $x = \frac{\pi}{6}$.
d) **Đúng.** Xét hàm số $f(x)$ trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Ta có các giá trị:
$f(0) = 2$.
$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$.
$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{6} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6} = \sqrt{3} + \frac{\pi}{6}$.
Vì $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + \frac{\pi}{6} \approx 2,25$ lớn hơn $f(0) = 2$ và $f\left(\frac{\pi}{2}\right) \approx 1,57$, nên giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn đã cho là $\sqrt{3} + \frac{\pi}{6}$.

Bài 2. Một người điều khiển ô tô đang ở đường dẫn muốn nhập làn vào đường cao tốc. Khi ô tô cách điểm nhập làn 200 m, tốc độ của ô tô là 36 km/h. Hai giây sau đó, ô tô bắt đầu tăng tốc với tốc độ $v(t) = at + b$ $(a, b \in \mathbb{R}, a > 0)$, trong đó t là thời gian tính bằng giây kể từ khi bắt đầu tăng tốc. Biết rằng ô tô nhập làn cao tốc sau 12 giây và duy trì sự tăng tốc trong 24 giây kể từ khi bắt đầu tăng tốc.

a) Quãng đường ô tô đi được từ khi bắt đầu tăng tốc đến khi nhập làn là 180 m.

b) Giá trị của b là 10.

c) Quãng đường $S(t)$ (đơn vị: mét) mà ô tô đi được trong thời gian t giây $(0 \le t \le 24)$ kể từ khi tăng tốc được tính theo công thức $S(t) = \int_0^{24} v(t)\mathrm{d}t$.

d) Sau 24 giây kể từ khi tăng tốc, tốc độ của ô tô không vượt quá tốc độ tối đa cho phép là 100 km/h.

Hướng dẫn giải. a) **Đúng.** Ta có 36 km/h = 10 m/s. Trong 2 giây đầu (trước khi tăng tốc),

quãng đường ô tô đi được là $s = 10 \cdot 2 = 20$ m. Vậy quãng đường ô tô đi được từ khi bắt đầu tăng tốc đến khi nhập làn là $200 - 20 = 180$ m.

b) **Đúng.** Trước khi tăng tốc vận tốc của xe là 10 m/s. Tại thời điểm bắt đầu tăng tốc ($t = 0$), ta có $v(0) = a \cdot 0 + b = 10 \Rightarrow b = 10$.

c) **Sai.** Vì $S(t) = \int_0^{24} v(t)\mathrm{d}t$ là hằng số biểu thị quãng đường đi được trong đúng 24 giây. Công thức tính quãng đường đi được trong thời gian t giây phải là $S(t) = \int_0^t v(x)\mathrm{d}x$.

d) **Sai.** Quãng đường đi được từ khi bắt đầu tăng tốc đến khi nhập làn ($t = 12$) là 180 m, ta có phương trình:

$$\int_0^{12} (at + 10)\mathrm{d}t = 180 \Leftrightarrow \left[\frac{at^2}{2} + 10t\right]_0^{12} = 180 \Leftrightarrow 72a + 120 = 180 \Leftrightarrow a = \frac{5}{6}.$$

Khi đó, vận tốc tại thời điểm $t = 24$ là:

$$v(24) = \frac{5}{6} \cdot 24 + 10 = 30 \text{ m/s} = 108 \text{ km/h}.$$

Vì 108 km/h > 100 km/h nên phát biểu này sai.

Bài 3. Trước khi đưa một loại sản phẩm ra thị trường, người ta đã phỏng vấn ngẫu nhiên 200 khách hàng về sản phẩm đó. Kết quả thống kê như sau: có 105 người trả lời "sẽ mua"; có 95 người trả lời "không mua". Kinh nghiệm cho thấy tỉ lệ khách hàng thực sự sẽ mua sản phẩm tương ứng với những cách trả lời "sẽ mua" và "không mua" lần lượt là 70% và 30%. Gọi A là biến cố "Người được phỏng vấn thực sự sẽ mua sản phẩm". Gọi B là biến cố "Người được phỏng vấn trả lời sẽ mua sản phẩm".

a) Xác suất $P(B) = \frac{21}{40}$ và $P(\overline{B}) = \frac{19}{40}$.

b) Xác suất có điều kiện $P(A \mid B) = 0,3$.

c) Xác suất $P(A) = 0,51$.

d) Trong số những người được phỏng vấn thực sự sẽ mua sản phẩm có 70% người đã trả lời "sẽ mua" khi được phỏng vấn (kết quả tính theo phần trăm được làm tròn đến hàng đơn vị).

Hướng dẫn giải. a) **Đúng.** Ta có số người trả lời "sẽ mua" là 105, tổng số khách hàng là 200.

Xác suất $P(B) = \frac{105}{200} = \frac{21}{40}$.

Xác suất $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{21}{40} = \frac{19}{40}$.

b) **Sai.** Theo giả thiết, tỉ lệ khách hàng thực sự mua trong số những người trả lời "sẽ mua" là 70%. Do đó $P(A \mid B) = 0,7$.

c) **Đúng.** Áp dụng công thức xác suất đầy đủ:

$P(A) = P(B) \cdot P(A \mid B) + P(\overline{B}) \cdot P(A \mid \overline{B})$

$P(A) = \frac{105}{200} \cdot 0,7 + \frac{95}{200} \cdot 0,3 = \frac{0,7 \cdot 105 + 0,3 \cdot 95}{200} = \frac{102}{200} = 0,51$.

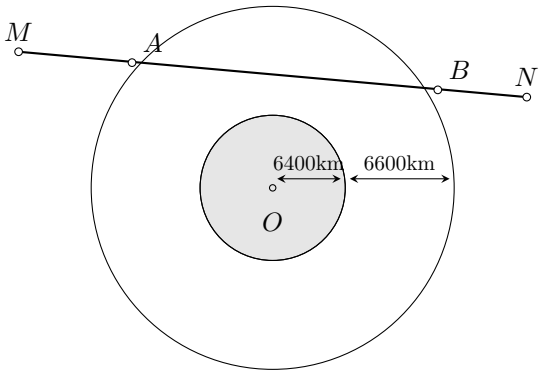
d) **Sai.** Số người thực sự mua là $0,7 \cdot 105 + 0,3 \cdot 95 = 102$ (người).

Trong số 102 người thực sự mua này, số người đã trả lời "sẽ mua" là $0,7 \cdot 105 = 73,5$ (người).

Tỉ lệ cần tìm là: $\frac{73,5}{102} \cdot 100\% \approx 72\%$.

Bài 4. Các thiên thạch có đường kính lớn hơn 140m và có thể lại gần Trái Đất ở khoảng cách nhỏ hơn 7 500 000 km được coi là những vật thể có khả năng va chạm gây nguy hiểm cho Trái Đất. Để theo dõi những thiên thạch này, người ta đã thiết lập các trạm quan sát các vật thể bay gần Trái Đất. Giả sử có một hệ thống quan sát có khả năng theo dõi các vật thể ở độ cao không vượt quá 6 600 km so với mực nước biển. Coi Trái Đất là khối cầu có bán kính 6 400 km. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ trong không gian có gốc O tại tâm Trái Đất và đơn vị độ dài trên mỗi trục tọa độ là 1 000 km. Một thiên thạch (coi như một hạt) chuyển động với tốc độ không đổi theo một đường

thẳng từ điểm $M(6;20;0)$ đến điểm $N(-6;-12;16)$.



a) Đường thẳng MN có phương trình tham số là $\begin{cases} x = 6+3t \\ y = 20+8t \\ z = -4t \end{cases}, (t \in \mathbb{R})$.

b) Vị trí đầu tiên thiên thạch di chuyển vào phạm vi theo dõi của hệ thống quan sát là điểm $A(-3;-4;12)$.

c) Khoảng cách giữa vị trí đầu tiên và vị trí cuối cùng mà thiên thạch di chuyển trong phạm vi theo dõi của hệ thống quan sát là 18 900 km (kết quả làm tròn đến hàng trăm theo đơn vị ki-lô-mét).

d) Nếu thời gian di chuyển của thiên thạch trong phạm vi theo dõi của hệ thống quan sát là 3 phút thì thời gian nó di chuyển từ M đến N là 6 phút.

Hướng dẫn giải. a) **Đúng.** Ta có $\overrightarrow{MN} = (-12;-32;16)$. Chọn vectơ chỉ phương $\vec{u} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{MN} = (3;8;-4)$.

Phương trình tham số của đường thẳng MN đi qua $M(6;20;0)$ là: $\begin{cases} x = 6+3t \\ y = 20+8t \\ z = -4t \end{cases}$.

b) **Sai.** Phạm vi theo dõi là hình cầu tâm O bán kính $R = 6,4 + 6,6 = 13$ (đơn vị 1000 km).
Xét điểm $A(-3;-4;12)$, ta có $OA = \sqrt{(-3)^2+(-4)^2+12^2} = \sqrt{9+16+144} = 13$.
Tuy nhiên, theo lời giải chi tiết của đề, thiên thạch có bán kính đáng kể nên nó sẽ đi vào phạm vi sớm hơn một chút. Phương trình chuẩn xác cho biên là $x^2+y^2+z^2 \le 13,00007^2$. Do đó điểm đầu tiên không phải là A.

c) **Đúng.** Các điểm giao của MN với mặt cầu $R = 13$ ứng với các giá trị t thỏa mãn:
$(6+3t)^2 + (20+8t)^2 + (-4t)^2 = 13^2 = 169$
$\Leftrightarrow 89t^2 + 356t + 267 = 0 \Leftrightarrow t^2 + 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = -1 \\ t_2 = -3 \end{array}\right.$
Khoảng cách $AB = |t_1 - t_2| \cdot |\vec{u}| = 2 \cdot \sqrt{3^2+8^2+(-4)^2} = 2\sqrt{89} \approx 18,868$ (đơn vị 1000 km).
Vậy $AB \approx 18\,868$ km $\approx 18\,900$ km (làm tròn đến hàng trăm).

d) **Đúng.** Độ dài đoạn $MN = |\overrightarrow{MN}| = \sqrt{(-12)^2+(-32)^2+16^2} = 4\sqrt{89}$.
Vì $MN = 2AB$ nên nếu đi hết AB mất 3 phút thì đi hết MN mất $3 \times 2 = 6$ phút.

Bài 5. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 91$.

a) Hàm số đã cho có đạo hàm là $f'(x) = 3x^2 - 3$.

b) Phương trình $f'(x) = 0$ có tập nghiệm là $S = \{1\}$.

c) $f(1) = 89$.

d) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-2;2]$ bằng 89.

Hướng dẫn giải. a) **Đúng.**

Xét hàm số $f(x)=x^3-3x+91 \Rightarrow f'(x)=3x^2-3$.

b) **Sai.**

Xét $f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-3=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$.

Phương trình $f'(x)=0$ có tập nghiệm là $S=\{-1;1\}$.

c) **Đúng.**

Ta có $f(1)=1^3-3\cdot 1+91=89$.

d) **Đúng.**

Xét hàm số trên đoạn $[-2;2]$, ta tính giá trị tại các đầu mút và các điểm cực trị:

$f(-2)=(-2)^3-3(-2)+91=89$;

$f(-1)=(-1)^3-3(-1)+91=93$;

$f(1)=89$;

$f(2)=2^3-3\cdot 2+91=93$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-2;2]$ bằng 89 đạt được khi $x=1$ hoặc $x=-2$.

Bài 6. Một phần mềm nhận dạng tin nhắn quảng cáo trên điện thoại bằng cách dựa theo từ khóa để đánh dấu một số tin nhắn được gửi đến. Qua một thời gian dài sử dụng, người ta thấy rằng trong số tất cả tin nhắn gửi đến, có 20% số tin nhắn bị đánh dấu. Trong số các tin nhắn bị đánh dấu, có 10% số tin nhắn không phải quảng cáo. Trong các tin nhắn không bị đánh dấu, có 10% số tin nhắn là quảng cáo. Chọn ngẫu nhiên một tin nhắn được gửi đến điện thoại.

a) Xác suất để tin nhắn đó không bị đánh dấu là $0,8$.

b) Xác suất để tin nhắn đó không phải là quảng cáo, biết rằng nó không bị đánh dấu, bằng $0,95$.

c) Xác suất để tin nhắn đó không phải là quảng cáo bằng $0,76$.

d) Xác suất để tin nhắn đó không bị đánh dấu, biết rằng nó không phải là quảng cáo, nhỏ hơn $0,95$.

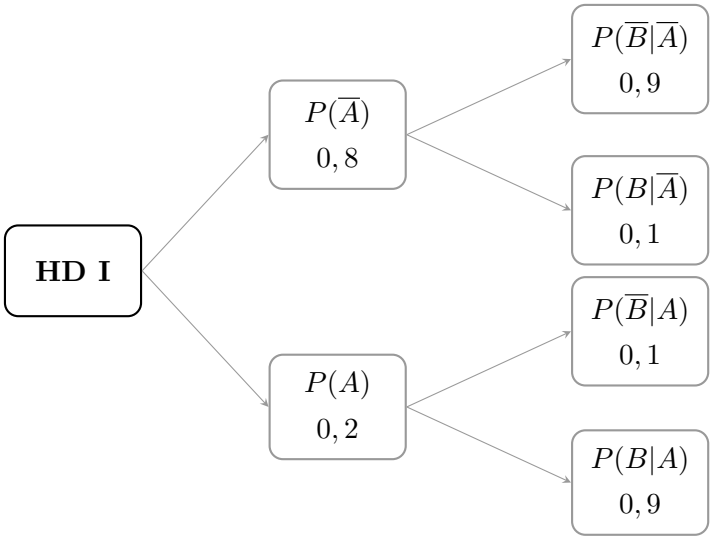
Hướng dẫn giải. Gọi A là biến cố "tin nhắn được chọn bị đánh dấu".

$\Rightarrow \overline{A}$ là biến cố "tin nhắn được chọn không bị đánh dấu".

B là biến cố "tin nhắn được chọn là tin nhắn quảng cáo".

$\Rightarrow \overline{B}$ là biến cố "tin nhắn được chọn không phải là tin nhắn quảng cáo".

Theo giả thiết ta có: $P(A)=0,2$; $P(\overline{B}|A)=0,1$; $P(B|\overline{A})=0,1$. Ta có sơ đồ cây sau:



a) **Đúng.** Ta có $P(A)=0,2 \Rightarrow P(\overline{A})=1-P(A)=0,8$.

b) **Sai.** Xác suất để tin nhắn không là quảng cáo khi biết không bị đánh dấu là $P(\overline{B}|\overline{A})=1-P(B|\overline{A})=1-0,1=0,9\neq 0,95$.

c) **Sai.** Xác suất để tin nhắn không phải là quảng cáo là:

$$P(\overline{B})=P(\overline{A})\cdot P(\overline{B}|\overline{A})+P(A)\cdot P(\overline{B}|A)=0,8\cdot 0,9+0,2\cdot 0,1=0,72+0,02=0,74\neq 0,76.$$

d) **Sai.** Xác suất để tin nhắn không bị đánh dấu, biết rằng nó không phải là quảng cáo là:

$$P(\overline{A}|\overline{B})=\frac{P(\overline{A}\cap\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{0,8\cdot 0,9}{0,74}=\frac{0,72}{0,74}\approx 0,973.$$

Vì $0,973>0,95$ nên phát biểu này sai.

Bài 7. Đối với ngành nuôi trồng thủy sản, việc kiểm soát lượng thuốc tồn dư trong nước là một nhiệm vụ quan trọng nhằm đáp ứng các tiêu chuẩn an toàn về môi trường. Khi nghiên cứu một loại thuốc trị bệnh trong nuôi trồng thủy sản, người ta sử dụng thuốc đó một lần và theo dõi nồng độ thuốc tồn dư trong nước kể từ lúc sử dụng thuốc. Kết quả cho thấy nồng độ thuốc $y(t)$ (đơn vị: mg/lít) tồn dư trong nước tại thời điểm t ngày ($t\geq 0$) kể từ lúc sử dụng thuốc, thỏa mãn $y(t)>0$ và $y'(t)=k\cdot y(t)$ $(t\geq 0)$, trong đó k là hằng số khác không. Đo nồng độ thuốc tồn dư trong nước tại các thời điểm $t=6$ (ngày); $t=12$ (ngày) nhận được kết quả lần lượt là 2 mg/lít; 1 mg/lít. Cho biết $y(t)=e^{g(t)}$ $(t\geq 0)$.

a) $g(t)=kt+C$ $(t\geq 0)$ với C là một hằng số xác định.

b) $k=-\dfrac{\ln 2}{6}$.

c) $C=4\ln 2$.

d) Nồng độ thuốc tồn dư trong nước tại thời điểm $t=21$ (ngày) kể từ lúc sử dụng thuốc lớn hơn 0,4 mg/lít.

Hướng dẫn giải. a) **Đúng.**

Ta có: $y'(t)=k\cdot y(t)\Rightarrow \dfrac{y'(t)}{y(t)}=k\Rightarrow \int\dfrac{y'(t)}{y(t)}\mathrm{d}t=\int k\mathrm{d}t\Rightarrow \ln(y(t))=k\cdot t+C\Rightarrow y(t)=e^{kt+C}$.

Mà đề bài cho $y(t)=e^{g(t)}$, do đó $g(t)=kt+C$.

b) **Đúng.**

Theo giả thiết ta có: $\begin{cases} y(6)=2 \\ y(12)=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^{6k+C}=2 \\ e^{12k+C}=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6k+C=\ln 2 \\ 12k+C=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=-\dfrac{\ln 2}{6} \\ C=2\ln 2. \end{cases}$

c) **Sai.** Vì $C=2\ln 2$.

d) **Sai.** Ta có $y(t)=e^{-\frac{\ln 2}{6}t+2\ln 2}$.

Với $t=21$ ta có $y(21)=e^{-\frac{\ln 2}{6}\cdot 21+2\ln 2}=e^{-\frac{7}{2}\ln 2+2\ln 2}=e^{-\frac{3}{2}\ln 2}=\left(e^{\ln 2}\right)^{-\frac{3}{2}}=2^{-\frac{3}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2^3}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}\approx 0,3535$ (mg/lít).

Vì $0,3535<0,4$ nên phát biểu này sai.

Bài 8. Mô hình toán học sau đây được sử dụng trong quan sát chuyển động của một vật. Trong không gian cho hệ tọa độ $Oxyz$ có $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ lần lượt là các vectơ đơn vị trên các trục Ox, Oy, Oz và độ dài của mỗi vectơ đơn vị đó bằng 1 mét. Cho hai điểm A và B, trong đó điểm A có tọa độ là $(7;7;0)$. Một vật (coi như là một hạt) chuyển động thẳng với tốc độ phụ thuộc thời gian t (giây) theo công thức $v(t)=\beta t+300$ (m/giây), trong đó β là hằng số dương và $0\le t\le 6$. Ở thời điểm ban đầu ($t=0$) vật đi qua điểm A với tốc độ 300 m/giây và hướng tới B. Sau 2 giây kể từ thời điểm ban đầu, vật đi được quãng đường 606 mét. Gọi $\vec{u}=(a;b;c)$ là vectơ cùng hướng với vectơ $\overrightarrow{AB}$. Biết rằng $|\vec{u}|=1$ và góc giữa vectơ $\vec{u}$ lần lượt với các vectơ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ có số đo tương ứng bằng $60°, 60°, 45°$.

a) $a=\cos 60°$.

b) Phương trình đường thẳng AB là $\dfrac{x-7}{1}=\dfrac{y-7}{1}=\dfrac{z}{2}$.

c) $\beta=3$.

d) Giả sử sau 5 giây kể từ thời điểm ban đầu, vật đến điểm $B(x_B;y_B;z_B)$. Khi đó $x_B>776$.

Hướng dẫn giải. a) **Đúng.**

Với $\vec{i}(1;0;0)$, $\vec{j}(0;1;0)$, $\vec{k}(0;0;1)$ và $\vec{u}=(a;b;c)$, ta có:

$\cos(\vec{u},\vec{i})=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{i}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{i}|}\Leftrightarrow\cos 60°=a\Leftrightarrow a=\dfrac{1}{2}$.

Tương tự: $\cos(\vec{u},\vec{j})=\cos 60°=b\Leftrightarrow b=\dfrac{1}{2}$ và $\cos(\vec{u},\vec{k})=\cos 45°=c\Leftrightarrow c=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

b) **Sai.**

Đường thẳng AB đi qua điểm $A(7;7;0)$ có vectơ chỉ phương $\vec{u}=\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2};\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Vectơ này cùng phương với $\vec{u}_1=(1;1;\sqrt{2})$.

Nên phương trình đường thẳng AB là $\dfrac{x-7}{1}=\dfrac{y-7}{1}=\dfrac{z}{\sqrt{2}}$.

c) **Đúng.**

Ta có $v(t)=\beta t+300$. Quãng đường vật đi được sau 2 giây là:

$\int_0^2(\beta t+300)\mathrm{d}t=606\Leftrightarrow\left[\dfrac{\beta t^2}{2}+300t\right]_0^2=606\Leftrightarrow 2\beta+600=606\Leftrightarrow\beta=3$.

d) **Sai.**

Quãng đường vật đi được sau 5 giây là: $AB=\int_0^5(3t+300)\mathrm{d}t=\dfrac{3075}{2}=1537,5$ (m).

Vì $\vec{u}$ cùng hướng với $\overrightarrow{AB}$ và $|\vec{u}|=1$ nên $\overrightarrow{AB}=AB\cdot\vec{u}=\dfrac{3075}{2}\cdot\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2};\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\left(\dfrac{3075}{4};\dfrac{3075}{4};\dfrac{3075}{2\sqrt{2}}\right)$.

Ta có $x_B-7=\dfrac{3075}{4}=768,75\Rightarrow x_B=775,75$.

Vì $775,75<776$ nên phát biểu này sai.

Bài 9. Một miếng thịt sống được lấy ra khỏi ngăn đá của tủ lạnh và để trên bàn để rã đông. Nhiệt độ của miếng thịt khi nó được lấy ra khỏi ngăn đá là $-4°\text{C}$ và sau t giờ thì nhiệt độ của miếng thịt tăng với tốc độ $T'(t) = 7e^{-0,35t}\,°\text{C}$/giờ. Miếng thịt này được rã đông khi nhiệt độ của nó đạt đến $10°\text{C}$. Khi đó:

a) Sau 2 giờ tốc độ thay đổi nhiệt độ của miếng thịt bằng $3,48°\text{C}$/giờ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

b) Nhiệt độ của miếng thịt bằng $0°\text{C}$ sau 43 phút (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của phút).

c) Cần mất $2,44$ giờ để miếng thịt được rã đông (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm của giờ).

d) Sau khi rã đông được 2 tiếng, miếng thịt được đem đi nướng trong lò nướng. Tốc độ thay đổi nhiệt độ của miếng thịt trong lò nướng sau t giờ được xác định bởi hàm số $L'(t) = 80e^{0,2t}\,°\text{C}$/giờ. Miếng thịt được coi là chín đều nếu nhiệt độ của nó là $77°\text{C}$. Thời gian để nướng chín đều miếng thịt là 48 phút (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của phút).

Hướng dẫn giải. a) **Đúng.** Tốc độ thay đổi nhiệt sau 2 giờ là $T'(2) = 7e^{-0,35\cdot 2} \approx 3,48°\text{C/h}$.

b) **Sai.** Nhiệt độ của miếng thịt sau t giờ là:

$$T(t) = \int T'(t)\mathrm{d}t = \int 7e^{-0,35t}\mathrm{d}t = \frac{7}{-0,35}e^{-0,35t} + C = -20e^{-0,35t} + C.$$

Nhiệt độ khi lấy miếng thịt ra khỏi ngăn đá là $T(0) = -4 \Leftrightarrow -20e^{-0,35\cdot 0} + C = -4 \Leftrightarrow C = 16$. Suy ra $T(t) = -20e^{-0,35t} + 16$.

Ta có $T(t) = 0 \Leftrightarrow -20e^{-0,35t} + 16 = 0 \Leftrightarrow e^{-0,35t} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5} \Leftrightarrow -0,35t = \ln\frac{4}{5}$.

$\Rightarrow t = -\frac{1}{0,35}\ln\frac{4}{5} \approx 0,64$ giờ ≈ 38 phút.

Vậy nhiệt độ miếng thịt bằng $0°\text{C}$ sau 38 phút.

c) **Sai.** Miếng thịt rã đông khi đạt $10°\text{C}$:

$$T(t) = 10 \Leftrightarrow -20e^{-0,35t} + 16 = 10 \Leftrightarrow e^{-0,35t} = \frac{6}{20} = 0,3 \Leftrightarrow t = \frac{\ln 0,3}{-0,35} \approx 3,44 \text{ (giờ)}.$$

d) **Sai.** Sau khi rã đông được 2 tiếng (tức là $t = 3,44 + 2 = 5,44$ giờ kể từ lúc bắt đầu), nhiệt độ miếng thịt là:

$$T(5,44) = -20e^{-0,35\cdot 5,44} + 16 \approx 13,02°\text{C}.$$

Nhiệt độ trong lò nướng sau x giờ nướng là:

$$T_L(x) = 13,02 + \int_0^x 80e^{0,2t}\mathrm{d}t = 13,02 + 400(e^{0,2x} - 1).$$

Để thịt chín ($77°\text{C}$): $13,02 + 400(e^{0,2x} - 1) = 77 \Leftrightarrow e^{0,2x} \approx 1,16 \Rightarrow x \approx 0,74$ giờ ≈ 44 phút.

Bài 10. Cho hàm số $f(x) = x - 4\ln x$.

a) Tập xác định của hàm số $f(x)$ là $D = (0; +\infty)$.

b) $f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$ $(\forall x > 0)$.

c) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1; 2)$.

d) Hàm số $f(x)$ có giá trị cực tiểu bằng $4 - 4\ln 4$.

Hướng dẫn giải. a) **Đúng.**

Vì $\ln x$ xác định khi $x > 0$ nên tập xác định của hàm số là $D = (0; +\infty)$.

b) **Sai.**

Ta có $f'(x) = (x - 4\ln x)' = 1 - 4\cdot\dfrac{1}{x} = 1 - \dfrac{4}{x}$ $(\forall x > 0)$.

c) **Sai.**

Ta có $f'(x)=0 \iff 1-\dfrac{4}{x}=0 \iff \dfrac{4}{x}=1 \iff x=4 \in (0;+\infty)$ (tm).
Bảng biến thiên của hàm số:

x	0		4		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	$4-4\ln 4$	↗	

Từ bảng biến thiên, ta thấy hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;4)$.
Vì $(1;2) \subset (0;4)$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;2)$.
d) **Đúng.**
Từ bảng biến thiên thu được ở phần c), ta thấy giá trị cực tiểu của hàm số là $f(4)=4-4\ln 4$.

Bài 11. Một công ty công nghệ thiết kế một hệ thống dự phòng cho máy chủ hoạt động. Hệ thống này bao gồm hai thành phần độc lập: Nguồn điện chính (A) và nguồn điện dự phòng (B). Xác suất nguồn điện chính (A) hoạt động ổn định là $P(A)=0,95$, xác suất nguồn điện dự phòng (B) hoạt động ổn định là $P(B)=0,8$. Biết việc hoạt động ổn định hay không ổn định của hai nguồn điện này là độc lập với nhau và hệ thống hoạt động ổn định khi ít nhất một nguồn hoạt động ổn định.

a) Xác suất nguồn điện chính gặp sự cố là $0,05$.

b) Xác suất chỉ có nguồn dự phòng hoạt động ổn định, còn nguồn chính gặp sự cố là $0,06$.

c) Xác suất cả hai nguồn đều không hoạt động ổn định là $0,24$.

d) Xác suất hệ thống hoạt động ổn định là $0,99$.

Hướng dẫn giải. A là biến cố "Nguồn điện chính hoạt động ổn định";
$\overline{A}$ là biến cố "Nguồn điện chính gặp sự cố";
B là biến cố "Nguồn điện dự phòng hoạt động ổn định";
$\overline{B}$ là biến cố "Nguồn điện dự phòng gặp sự cố";
Dữ kiện: "Biết việc hoạt động ổn định hay không ổn định của hai nguồn điện này là độc lập với nhau" nên các cặp biến cố A,B; $A,\overline{B}$; $\overline{A},B$; $\overline{A},\overline{B}$ là độc lập với nhau.

a) **Đúng.**
Xác suất nguồn điện chính gặp sự cố là $P\left(\overline{A}\right)$. Ta có
$P\left(\overline{A}\right)=1-P(A)=1-0,95=0,05$.

b) **Sai.**
Xác suất chỉ có nguồn dự phòng hoạt động ổn định, còn nguồn chính gặp sự cố là $P\left(\overline{A}B\right)$.
Vì $\overline{A}$ và B là hai biến cố độc lập nên
$P\left(\overline{A}B\right)=P\left(\overline{A}\right)\cdot P(B)=0,05\cdot 0,8=0,04$.

c) **Sai.**
Xác suất cả hai nguồn đều không hoạt động ổn định là $P\left(\overline{A}\,\overline{B}\right)$.
Ta có xác suất nguồn điện dự phòng gặp sự cố là
$P\left(\overline{B}\right)=1-P(B)=1-0,8=0,2$.
Vì $\overline{A}$ và $\overline{B}$ là hai biến cố độc lập nên
$P\left(\overline{A}\,\overline{B}\right)=P\left(\overline{A}\right)\cdot P\left(\overline{B}\right)=0,05\cdot 0,2=0,01$.

d) **Đúng.**
Vì hệ thống hoạt động ổn định khi ít nhất một nguồn hoạt động ổn định nên để hệ thống hoạt

động ổn định thì ít nhất một trong hai nguồn phải hoạt động ổn định.
Suy ra xác suất cần tính bằng:
$P(AB) + P(A\overline{B}) + P(\overline{A}B) = P(A) \cdot P(B) + P(A) \cdot P(\overline{B}) + 0,04$
$= 0,95 \cdot 0,8 + 0,95 \cdot 0,2 + 0,04 = 0,76 + 0,19 + 0,04 = 0,99.$

Bài 12. Sản lượng táo trên mỗi cây khi thu hoạch lệ thuộc vào mật độ cây được trồng. Với cùng một phương pháp chăm sóc như nhau, nếu trên mỗi sào đất được trồng n cây táo thì người ta ước tính trung bình sản lượng mỗi cây táo khi thu hoạch là $f(n) = -0,06n^2 - 0,4n + 320$ (kg/cây) (1 sào Trung bộ bằng 500m^2). Biết rằng bình quân chi phí giống và chăm sóc cho mỗi cây táo từ lúc trồng cho đến khi thu hoạch là 560 nghìn đồng mỗi cây. Giá bán ra mỗi kg táo là 50 nghìn đồng/kg, với giá bán này thì tất cả lượng táo thu hoạch đều được bán hết. Cần trồng trung bình bao nhiêu cây táo trên mỗi sào đất để mang về lợi nhuận cao nhất? (*Kết quả làm tròn đến hàng phần mười*)

a) Số lượng cây táo tối đa mà có thể trồng trên mỗi sào là 70 cây.

b) Tổng sản lượng táo trên mỗi sào đất được mô phỏng bởi hàm số $S(n) = nf(n)$ (kg).

c) Tổng doanh thu mà người này bán được trên mỗi sào là $D(n) = 50(320n - 0,4n^2 - 0,06n^3)$ nghìn đồng với $n \in \mathbb{N}$.

d) Nên trồng 40 cây táo trên mỗi sào để có lợi nhuận lớn nhất.

Hướng dẫn giải. **a) Sai.**
Số lượng cây táo tối đa mà ta có thể trồng trên mỗi sào bằng giá trị n ($n \in \mathbb{N}^*$) lớn nhất thỏa mãn $f(n) \geq 0$.
$f(n) \geq 0 \iff -0,06n^2 - 0,4n + 320 \geq 0 \Rightarrow 0 \leq n < 70.$
$\Rightarrow$ Số lượng cây táo tối đa mà có thể trồng trên mỗi sào là 69 cây.

b) Đúng.
Tổng sản lượng táo trên mỗi sào đất được mô phỏng bởi hàm số $S(n) = n \cdot f(n)$ (kg).

c) Đúng.
Tổng doanh thu mà người này bán được trên mỗi sào là
$D(n) = 50 \cdot n \cdot (320 - 0,4n - 0,06n^2) = 50(320n - 0,4n^2 - 0,06n^3).$

d) Sai.
Lợi nhuận = Tổng doanh thu − Tổng chi phí.
Suy ra lợi nhuận thu được là
$f(n) = D(n) - 560n = 50(320n - 0,4n^2 - 0,06n^3) - 560n = -3n^3 - 20n^2 + 15\,440n.$
Lợi nhuận lớn nhất $\iff$ $f(n)$ đạt giá trị cực đại. Để tìm giá trị lớn nhất của hàm $f(n)$, ta thực hiện khảo sát và vẽ bảng biến thiên của hàm số $f(n)$ trong khoảng $(0; 70)$.
$$f'(n) = -9n^2 - 40n + 15\,440 = 0 \iff \begin{bmatrix} n \approx 39,26 \in (0;70) \text{ (tm)} \\ n \approx -43 \notin (0;70) \text{ (L)} \end{bmatrix}$$

Bảng biến thiên:

n	0		39		39.25		40		70
$f'(n)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$f(n)$		↗	$f(39)$	↗		↘	$f(40)$	↘	

Vì $n \in \mathbb{N}^*$ nên để xác định giá trị lớn nhất ta sẽ so sánh hai giá trị $f(39)$ và $f(40)$.
Ta có $f(39) = 393\,783$; $f(40) = 393\,600$ nên $f(39) > f(40)$.
Vậy nên trồng 39 cây táo trên mỗi sào để có lợi nhuận lớn nhất.

Bài 13. Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t) = \dfrac{1}{120}t^2 + \dfrac{58}{45}t$ (m/s), trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O, chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 3 giây so với A và có gia tốc bằng a (m/s^2) (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 15 giây thì đuổi kịp A.

a) Thời điểm chất điểm B đuổi kịp chất điểm A thì chất điểm B đi được 15 giây, chất điểm A đi được 18 giây.

b) Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng 30 (m/s).

c) $a = 2$.

d) Sau khi B xuất phát được 10 giây thì quãng đường A đi được không quá 100 (m).

Hướng dẫn giải. Gọi t_A, t_B lần lượt là thời gian chuyển động của chất điểm A và chất điểm B kể từ khi mỗi chất điểm xuất phát.
Vì B xuất phát chậm hơn A là 3 giây nên ta có mối liên hệ: $t_A = t_B + 3$.

a) **Đúng.**
Khi chất điểm B đi được 15 giây ($t_B = 15$) thì đuổi kịp A. Lúc này thời gian chất điểm A đã đi là $t_A = 15 + 3 = 18$ (giây).

c) **Đúng.**
Quãng đường chất điểm A đi được trong 18 giây đầu tiên là:

$$S_A = \int_0^{18} v(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{18} \left(\frac{1}{120}t^2 + \frac{58}{45}t\right)\mathrm{d}t = \left[\frac{t^3}{360} + \frac{29t^2}{45}\right]_0^{18} = 225 \text{ (m)}.$$

Chất điểm B bắt đầu từ trạng thái nghỉ nên $v_{0B} = 0$. Quãng đường B đi được sau 15 giây với gia tốc a là:

$$S_B = \frac{1}{2}at_B^2 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot 15^2 = 112,5a \text{ (m)}.$$

Vì B đuổi kịp A nên $S_A = S_B \Leftrightarrow 225 = 112,5a \Rightarrow a = 2$.

b) **Đúng.**
Vận tốc của chất điểm B tại thời điểm đuổi kịp A ($t_B = 15$ giây) là:

$$v_B(15) = a \cdot t_B = 2 \cdot 15 = 30 \text{ (m/s)}.$$

d) **Sai.**
Khi chất điểm B đi được 10 giây ($t_B = 10$), thì thời gian A đã đi là $t_A = 10 + 3 = 13$ (giây).

Quãng đường chất điểm A đi được lúc này là:

$$S_A(13)=\int_0^{13}\left(\frac{1}{120}t^2+\frac{58}{45}t\right)\mathrm{d}t=\left[\frac{t^3}{360}+\frac{29t^2}{45}\right]_0^{13}=\frac{2197}{360}+\frac{4901}{45}\approx 115,01\ (\text{m}).$$

Vì $115,01>100$ nên khẳng định quãng đường A đi được không quá 100 m là sai.

Bài 14. Một cửa hàng điện thoại khảo sát thời gian sử dụng pin liên tục (đơn vị: giờ) của 40 điện thoại thuộc hai dòng: Dòng A và dòng B. Kết quả được thu thập và tổng hợp trong bảng tần số ghép nhóm sau:

Thời gian (Giờ)	$[8;10)$	$[10;12)$	$[12;14)$	$[14;16)$	$[16;18)$
Dòng A	2	4	8	4	2
Dòng B	5	3	4	3	5
Tổng số	7	7	12	7	7

a) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm cho cả 40 điện thoại là $R=10$ (giờ).

b) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm cho cả 40 điện thoại là $4,5$ giờ (làm tròn đến hàng phần chục).

c) Thời gian sử dụng pin của điện thoại dòng B đồng đều hơn điện thoại dòng A.

d) Chọn ngẫu nhiên 4 điện thoại từ 40 máy trên. Xác suất để trong 4 điện thoại được chọn có cả hai dòng A,B và có đúng 2 máy có thời gian sử dụng pin từ 16 giờ trở lên là $\dfrac{9885}{91390}$.

Hướng dẫn giải. a) **Đúng.**

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm là hiệu giữa đầu mút phải của nhóm cuối cùng và đầu mút trái của nhóm đầu tiên: $R=18-8=10$ (giờ).

b) **Sai.**

Tổng số máy $n=40$.

- Tứ phân vị thứ nhất Q_1 ở vị trí thứ $\dfrac{40}{4}=10$. Nhóm chứa Q_1 là $[10;12)$.

$Q_1=10+\dfrac{10-7}{7}\cdot(12-10)\approx 10,86.$

- Tứ phân vị thứ ba Q_3 ở vị trí thứ $\dfrac{3\cdot 40}{4}=30$. Nhóm chứa Q_3 là $[14;16)$.

$Q_3=14+\dfrac{30-26}{7}\cdot(16-14)\approx 15,14.$

- Khoảng tứ phân vị: $\Delta_Q=Q_3-Q_1\approx 15,14-10,86=4,28\approx 4,3$. (Không phải $4,5$).

c) **Sai.**

- Dòng A có dữ liệu tập trung nhiều ở nhóm giữa $[12;14)$ với tần số 8, các nhóm xa trung tâm có tần số thấp (2 và 4).
- Dòng B có dữ liệu phân tán nhiều ra hai cực (tần số nhóm đầu và cuối đều là 5).

Do đó, dòng A có độ lệch chuẩn nhỏ hơn và thời gian sử dụng pin đồng đều hơn dòng B.

d) **Đúng.**

Số cách chọn 4 máy từ 40 máy là: $n(\Omega)=\mathrm{C}_{40}^4=91390$.

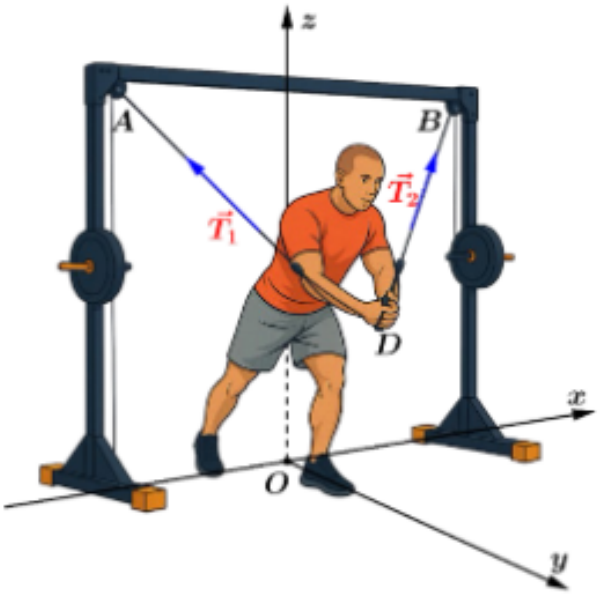
Xét nhóm thời gian ≥ 16 giờ có 7 máy $(2A,5B)$ và nhóm thời gian <16 giờ có 33 máy $(18A,15B)$.

Số cách chọn 4 máy có đúng 2 máy ≥ 16 giờ và có cả hai dòng A,B là:

- Tổng số cách chọn 2 máy từ nhóm ≥ 16 giờ và 2 máy từ nhóm <16 giờ: $\mathrm{C}_7^2\cdot\mathrm{C}_{33}^2=21\cdot 528=11088$.
- Trừ đi trường hợp cả 4 máy đều là dòng A: $\mathrm{C}_2^2\cdot\mathrm{C}_{18}^2=1\cdot 153=153$.
- Trừ đi trường hợp cả 4 máy đều là dòng B: $\mathrm{C}_5^2\cdot\mathrm{C}_{15}^2=10\cdot 105=1050$.

Số kết quả thuận lợi: $11088 - 153 - 1050 = 9885$.
Xác suất là: $P = \dfrac{9885}{91390}$.

Bài 15. Bạn Mạnh rất yêu thích tập Gym và bạn thường thực hiện bài tập ép ngực với máy tập cáp chéo có tên Tiếng Anh là "Cable Crossover". Thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ với đơn vị trên mỗi trục là mét có gốc tọa độ $O(0;0;0)$ nằm trên sàn ngay chính giữa hai trụ của máy tập, các trục Ox, Oy, Oz được chọn như hình vẽ minh họa. Các ròng rọc của hai dây cáp được gắn tại các điểm $A(-1,4;0;1,9)$ và $B(1,4;0;1,9)$. Khi tập thì Mạnh kéo và giữ hai tay cầm tại điểm $D(0;0,8;1,2)$ và tại đó hai tay sẽ chịu tác dụng của hai lực căng $\vec{T}_1$ và $\vec{T}_2$. Biết rằng mức tạ được cài đặt sao cho độ lớn lực căng trên mỗi sợi dây cáp đều là 330 (N) (kết quả tính được ở các ý đều làm tròn đến hàng phần trăm).



a) Chiều dài đoạn dây cáp tính từ ròng rọc A đến tay cầm D bằng $1,76$ (m).

b) Vecto hợp lực tác dụng lên tay Mạnh có phương song song với trục Oz.

c) Để giữ yên hai tay tại vị trí D thì Mạnh phải tác dụng một lực giữ có độ lớn bằng $369,52$ N.

d) Để tối ưu hóa nhóm cơ ngực, huấn luyện viên yêu cầu Mạnh điều chỉnh vị trí giữ tay (thay đổi tung độ y của điểm D) sao cho góc tạo bởi hai dây cáp tại D đúng bằng $90°$. Biết cao độ của tay vẫn giữ nguyên ở $z_D = 1,2$ (m) thì khi đó Mạnh cần giữ tay cầm ở vị trí sao cho $y_D = 1,21$ (m).

Hướng dẫn giải. Ta có tọa độ các điểm: $A(-1,4;0;1,9)$, $B(1,4;0;1,9)$ và $D(0;0,8;1,2)$.

a) **Đúng.**

Chiều dài đoạn dây cáp AD là khoảng cách giữa hai điểm A và D:

$$AD = \sqrt{(0-(-1,4))^2 + (0,8-0)^2 + (1,2-1,9)^2} = \sqrt{1,4^2 + 0,8^2 + (-0,7)^2} = \sqrt{3,09} \approx 1,76 \text{ (m)}.$$

b) **Sai.**

Ta có $\overrightarrow{DA} = (-1,4;-0,8;0,7)$ và $\overrightarrow{DB} = (1,4;-0,8;0,7)$.

Lực căng $\vec{T}_1$ cùng hướng với $\overrightarrow{DA}$, $\vec{T}_2$ cùng hướng với $\overrightarrow{DB}$. Vì độ lớn $T_1 = T_2$ và $DA = DB = \sqrt{3,09}$ nên:

$$\vec{F}_{hl} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = \frac{330}{\sqrt{3,09}}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB}) = \frac{330}{\sqrt{3,09}}(0;-1,6;1,4).$$

Véc-tơ hợp lực có thành phần tung độ $y = \dfrac{330}{\sqrt{3,09}} \cdot (-1,6) \neq 0$ nên hợp lực không song song với trục Oz.

c) **Sai.**

Độ lớn của hợp lực tác dụng lên tay Mạnh là:

$$F = \frac{330}{\sqrt{3,09}}\sqrt{0^2 + (-1,6)^2 + 1,4^2} = \frac{330}{\sqrt{3,09}}\sqrt{4,52} \approx 399,12 \text{ (N)}.$$

Để giữ yên hai tay tại D, Mạnh phải tác dụng một lực ngược hướng và có độ lớn bằng hợp lực này, tức là khoảng $399,12$ N.

d) **Đúng.**

Tại vị trí mới $D'(0; y_D; 1,2)$, ta có $\overrightarrow{D'A} = (-1,4; -y_D; 0,7)$ và $\overrightarrow{D'B} = (1,4; -y_D; 0,7)$.

Góc tạo bởi hai dây cáp tại D bằng 90° khi và chỉ khi $\overrightarrow{D'A} \cdot \overrightarrow{D'B} = 0$:

$$(-1,4) \cdot 1,4 + (-y_D) \cdot (-y_D) + 0,7 \cdot 0,7 = 0 \Leftrightarrow -1,96 + y_D^2 + 0,49 = 0 \Leftrightarrow y_D^2 = 1,47.$$

Suy ra $y_D = \sqrt{1,47} \approx 1,21$ (m) (do $y_D > 0$ theo hình vẽ).

Bài 16. Cho hàm số $y = \dfrac{-x^2 + 2x - 5}{x - 1}$, có đồ thị (C).

a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$.

b) Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị (C) bằng $2\sqrt{5}$.

c) Đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là đường thẳng $y = -x + 1$.

d) Giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[2; 2026]$ bằng -4.

Hướng dẫn giải. Hàm số đã cho xác định trên $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Ta có đạo hàm: $y' = \dfrac{(-2x+2)(x-1) - (-x^2+2x-5)}{(x-1)^2} = \dfrac{-x^2+2x+3}{(x-1)^2}$.

Cho $y' = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \Rightarrow y = 4 \\ x = 3 \Rightarrow y = -4 \end{array}\right.$.

a) **Sai.**

Ta thấy với $x \in (3; +\infty)$ thì $y' < 0$ (do hệ số của x^2 âm), nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(3; +\infty)$.

b) **Sai.**

Hai điểm cực trị của đồ thị là $M(-1; 4)$ và $N(3; -4)$.

Khoảng cách giữa hai điểm cực trị là:

$$MN = \sqrt{(3 - (-1))^2 + (-4 - 4)^2} = \sqrt{4^2 + (-8)^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}.$$

c) **Đúng.**

Thực hiện phép chia đa thức: $y = \dfrac{-x^2 + 2x - 5}{x - 1} = -x + 1 - \dfrac{4}{x - 1}$.

Vì $\lim\limits_{x \to \pm\infty} [y - (-x + 1)] = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(-\dfrac{4}{x-1}\right) = 0$ nên đường thẳng $y = -x + 1$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

d) **Đúng.**

Trên đoạn $[2; 2026]$, ta có $x = 3$ là điểm cực đại của hàm số.

Bảng biến thiên trên đoạn $[2; 2026]$ cho thấy hàm số đồng biến trên $(2; 3)$ và nghịch biến trên $(3; 2026)$.

Tại các đầu mút: $y(2) = -5$; $y(2026) = \dfrac{-(2026)^2 + 2(2026) - 5}{2025} \approx -2025$.

Tại điểm cực trị: $y(3) = -4$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[2; 2026]$ là $\max\limits_{[2;2026]} y = y(3) = -4$.

Bài 17. Một hãng công nghệ dự định tung ra thị trường một loại tai nghe không dây mới. Chi phí sản xuất mỗi chiếc tai nghe là 500 nghìn đồng với giá bán ra niêm yết là $1,2$ triệu đồng. Bộ phận bán hàng ước tính rằng, số lượng tai nghe bán được $n(x)$ phụ thuộc vào chi phí quảng cáo x (đơn vị: triệu đồng) theo công thức $n(x) = A + 40 \cdot \ln(1 + x)$. Biết rằng nếu chi $(e^2 - 1)$ triệu đồng cho quảng cáo thì bán được 190 sản phẩm.

a) $A = 110$.

b) Hàm lợi nhuận của hãng (tính theo triệu đồng) là $L(x) = 77 + 28 \cdot \ln(1 + x) - x$.

c) Khi chi phí quảng cáo đang ở mức 10 triệu đồng thì lợi nhuận đạt 150 triệu đồng (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

d) Để đạt lợi nhuận lớn nhất thì số tiền chi cho quảng cáo là $26,799$ triệu đồng (kết quả làm tròn đến hàng phần nghìn).

Hướng dẫn giải. Đổi các đơn vị về triệu đồng: Chi phí sản xuất mỗi chiếc là $0,5$ triệu đồng; Giá bán mỗi chiếc là $1,2$ triệu đồng. Lợi nhuận thu được trên mỗi sản phẩm bán ra là: $1,2 - 0,5 = 0,7$ (triệu đồng).

a) **Đúng.**

Theo giả thiết, khi $x = e^2 - 1$ thì $n(x) = 190$:

$$A + 40 \cdot \ln(1 + e^2 - 1) = 190 \Leftrightarrow A + 40 \cdot \ln(e^2) = 190 \Leftrightarrow A + 80 = 190 \Rightarrow A = 110.$$

b) **Đúng.**

Hàm lợi nhuận $L(x)$ bằng tổng lợi nhuận từ các sản phẩm bán được trừ đi chi phí quảng cáo:

$$L(x) = 0,7 \cdot n(x) - x = 0,7 \cdot [110 + 40 \cdot \ln(1 + x)] - x = 77 + 28 \cdot \ln(1 + x) - x.$$

c) **Sai.**

Khi $x = 10$, lợi nhuận của hãng là:

$L(10) = 77 + 28 \cdot \ln(1 + 10) - 10 = 67 + 28 \cdot \ln(11) \approx 67 + 67,14 = 134,14 \approx 134$ (triệu đồng).

Vậy lợi nhuận đạt khoảng 134 triệu đồng, không phải 150 triệu đồng.

d) **Sai.**

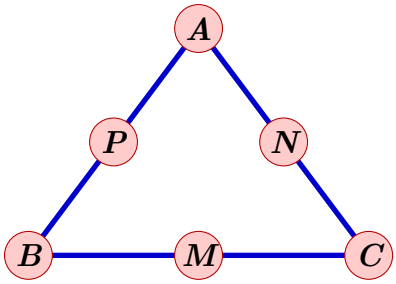
Xét hàm số $L(x) = 77 + 28 \cdot \ln(1 + x) - x$ với $x \geq 0$. Ta có $L'(x) = \dfrac{28}{1 + x} - 1$. Cho $L'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{28}{1 + x} = 1 \Leftrightarrow 1 + x = 28 \Leftrightarrow x = 27$ (triệu đồng).

Vẽ bảng biến thiên ta có hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x = 27$.

Do đó, số tiền chi cho quảng cáo để đạt lợi nhuận lớn nhất là 27 triệu đồng.

Bài 18. Chọn 6 số phân biệt từ tập hợp $X = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ để xếp vào 6 ô hình tròn tại các đỉnh $(A; B; C)$ và các trung điểm $(M; N; P)$ của một tam giác như hình vẽ. Gọi Ω là tập hợp tất cả các cách xếp sao cho 3 số trên mỗi cạnh của tam giác luôn lập thành một cấp số cộng.

Chọn ngẫu nhiên một cách sắp xếp từ tập Ω.



a) $n(\Omega) = 48$

b) Xác suất để ba số ở các đỉnh $(A; B; C)$ đều là số chẵn bằng $0,25$

c) Xác suất để chữ số 5 nằm ở vị trí trung điểm bằng $0,65$

d) Biết rằng ba số ở các đỉnh đều là số lẻ thì xác suất để chữ số 7 có mặt trong cách sắp xếp đó bằng $0,83$ (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

Hướng dẫn giải. Để ba số trên mỗi cạnh AB, BC, AC lập thành một cấp số cộng thì các số ở đỉnh và trung điểm phải thỏa mãn: $A + B = 2P$; $B + C = 2M$; $A + C = 2N$.
Điều này kéo theo A, B, C phải có cùng tính chẵn lẻ.

- Trường hợp 1: A, B, C là các số chẵn phân biệt từ tập $\{2; 4; 6; 8\}$. Xét các tập con 3 phần tử $\{A, B, C\}$ sao cho các trung điểm P, M, N là các số nguyên phân biệt trong X và khác với các đỉnh: $+\ \{2, 4, 8\} \Rightarrow \{P, M, N\} = \{3, 6, 5\}$. (Thỏa mãn). Có $3! = 6$ cách xếp. $+\ \{2, 6, 8\} \Rightarrow \{P, M, N\} = \{4, 7, 5\}$. (Thỏa mãn). Có $3! = 6$ cách xếp. Số cách xếp ở TH1 là $6 + 6 = 12$.

- Trường hợp 2: A, B, C là các số lẻ phân biệt từ tập $\{1; 3; 5; 7; 9\}$. Các tập con $\{A, B, C\}$ thỏa mãn điều kiện bài toán là: $+\ \{1, 3, 7\} \to \{P, M, N\} = \{2, 5, 4\}$ (6 cách); $+\ \{1, 3, 9\} \to \{P, M, N\} = \{2, 6, 5\}$ (6 cách); $+\ \{1, 5, 7\} \to \{P, M, N\} = \{3, 6, 4\}$ (6 cách); $+\ \{1, 7, 9\} \to \{P, M, N\} = \{4, 8, 5\}$ (6 cách); $+\ \{3, 5, 9\} \to \{P, M, N\} = \{4, 7, 6\}$ (6 cách); $+\ \{3, 7, 9\} \to \{P, M, N\} = \{5, 8, 6\}$ (6 cách). Số cách xếp ở TH2 là $6 \times 6 = 36$.

a) **Đúng.**
Tổng số cách xếp là $n(\Omega) = 12 + 36 = 48$.

b) **Đúng.**
Số cách xếp mà các đỉnh là số chẵn là 12. Xác suất là $P = \dfrac{12}{48} = 0,25$.

c) **Sai.**
Số các cách xếp có chữ số 5 nằm ở vị trí trung điểm:

- Ở TH1: Cả 2 tập đều có số 5 ở trung điểm, số cách là 12.

- Ở TH2: Các tập có số 5 ở trung điểm là $\{1, 3, 7\}, \{1, 3, 9\}, \{1, 7, 9\}, \{3, 7, 9\}$. Số cách là $4 \times 6 = 24$. Xác suất là $P = \dfrac{12 + 24}{48} = \dfrac{36}{48} = 0,75 \neq 0,65$.

d) **Đúng.**
Khi A, B, C là số lẻ, không gian mẫu có 36 phần tử.

Trong các tập ở TH2, chỉ có tập $\{1, 3, 9\}$ (với các trung điểm $\{2, 6, 5\}$) là không chứa số 7.

Số cách xếp chứa số 7 là $36 - 6 = 30$. Xác suất là $P = \dfrac{30}{36} = \dfrac{5}{6} \approx 0,83$.

Bài 19. Cho hàm số $f(x) = x + \cos x - \sqrt{3}\sin x$.

a) Đạo hàm của hàm số là $f'(x) = 1 - \sin x + \sqrt{3}\cos x$.

b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

c) Trên khoảng $(0; 2\pi)$ thì hàm số có đúng hai điểm cực trị.

d) Giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[0; \pi]$ bằng 1.

Hướng dẫn giải. Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$.

a) **Sai.**

Ta có: $f'(x) = (x)' + (\cos x)' - \sqrt{3}(\sin x)' = 1 - \sin x - \sqrt{3}\cos x$.

b) **Đúng.**

Ta có $f'(x) = 1 - (\sin x + \sqrt{3}\cos x) = 1 - 2\left(\dfrac{1}{2}\sin x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right) = 1 - 2\sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$.

Với $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right) \Rightarrow x + \dfrac{\pi}{3} \in \left(\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{5\pi}{6}\right)$.

Trong khoảng này, $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) > \dfrac{1}{2} \Rightarrow 2\sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) > 1 \Rightarrow f'(x) < 0$.

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

c) **Đúng.**

Xét $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$.

Trên khoảng $(0; 2\pi)$, ta có $x + \dfrac{\pi}{3} \in \left(\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{7\pi}{3}\right)$.

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{5\pi}{6} \\ x + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{13\pi}{6} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} \\ x = \dfrac{11\pi}{6} \end{array}\right.$$

Cả hai nghiệm này đều thuộc $(0; 2\pi)$ và $f'(x)$ đổi dấu khi đi qua chúng, nên hàm số có đúng 2 điểm cực trị.

d) **Sai.**

Trên đoạn $[0; \pi]$, ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2}$.

Bảng biến thiên trên $[0; \pi]$ cho thấy hàm số nghịch biến trên $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ và đồng biến trên $\left[\dfrac{\pi}{2}; \pi\right]$.

Giá trị tại các đầu mút:

$f(0) = 0 + \cos 0 - \sqrt{3}\sin 0 = 1$.

$f(\pi) = \pi + \cos\pi - \sqrt{3}\sin\pi = \pi - 1 \approx 2,14$.

So sánh $f(0)$ và $f(\pi)$, ta thấy $\max\limits_{[0;\pi]} f(x) = f(\pi) = \pi - 1 \neq 1$.

Bài 20. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ với đơn vị trên mỗi trục là dm, mặt ngoài của một quả bóng được mô hình hóa bởi phương trình mặt cầu $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 6$. Quả bóng nằm yên trên sàn nhà. Người ta nhìn thấy một tấm ván ngã xuống đè lên quả bóng, phần giao của tấm ván và sàn nhà là đường thẳng $d: \begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = -1 - 3t \\ z = t \end{cases}$. Gọi A, B lần lượt là hai tiếp điểm của tấm ván, sàn nhà với quả bóng và I là tâm quả bóng.

a) Quả bóng có tâm $I(2; -1; -1)$ và bán kính $R = \sqrt{6}$.

b) Khoảng cách từ tâm quả bóng đến đường thẳng d bằng $2\sqrt{6}$.

c) Nếu $\cos\angle AIB = \dfrac{a}{b}$ (với $\dfrac{a}{b}$ phân số tối giản và $a, b \in \mathbb{Z}$) thì giá trị biểu thức $a^2 + b^2 = 82$.

d) Một con kiến bò từ vị trí A đến vị trí B trên quả bóng với tốc độ 2 (cm/s) thì thời gian ngắn nhất cho chuyến đi này là 21 giây (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

Hướng dẫn giải. a) **Đúng.**

Từ phương trình mặt cầu $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 6$, ta xác định được tâm $I(2;-1;-1)$ và bán kính $R = \sqrt{6}$.

b) **Sai.**

Đường thẳng d đi qua điểm $M(-2;-1;0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2;-3;1)$.

Ta có $\overrightarrow{MI} = (4;0;-1) \Rightarrow [\vec{u}, \overrightarrow{MI}] = (3;6;12)$.

Khoảng cách từ tâm I đến đường thẳng d là:

$$d(I,d) = \frac{\left|[\vec{u}, \overrightarrow{MI}]\right|}{|\vec{u}|} = \frac{\sqrt{3^2+6^2+12^2}}{\sqrt{2^2+(-3)^2+1^2}} = \frac{\sqrt{189}}{\sqrt{14}} = \frac{3\sqrt{21}}{\sqrt{14}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{6}}{2}.$$

Vì $\dfrac{3\sqrt{6}}{2} \neq 2\sqrt{6}$ nên khẳng định này sai.

c) **Đúng.**

Vì tấm ván và sàn nhà là hai mặt phẳng tiếp diện của quả bóng và cắt nhau theo đường thẳng d, nên các bán kính IA và IB cùng vuông góc với d. Gọi H là hình chiếu của I lên d, khi đó I, A, B, H cùng nằm trong một mặt phẳng vuông góc với d.

Trong mặt phẳng này, $\triangle IAH$ và $\triangle IBH$ là hai tam giác vuông tại A và B (do tính chất tiếp tuyến).

Ta có $IA = R = \sqrt{6}$ và $IH = d(I,d) = \dfrac{3\sqrt{6}}{2}$.

$$\cos\angle AIH = \frac{IA}{IH} = \frac{\sqrt{6}}{\frac{3\sqrt{6}}{2}} = \frac{2}{3}.$$

$$\cos\angle AIB = \cos(2\angle AIH) = 2\cos^2\angle AIH - 1 = 2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 1 = \frac{8}{9} - 1 = -\frac{1}{9}.$$

Với $\dfrac{a}{b} = -\dfrac{1}{9}$, ta có $a = -1, b = 9 \Rightarrow a^2 + b^2 = (-1)^2 + 9^2 = 82$.

d) **Đúng.**

Thời gian ngắn nhất là con kiến bò dọc theo cung tròn lớn nối A và B.

Góc $\alpha = \angle AIB = \arccos\left(-\dfrac{1}{9}\right) \approx 1,6821$ rad.

Độ dài cung AB là: $s = R\cdot\alpha = \sqrt{6}\cdot\arccos\left(-\dfrac{1}{9}\right) \approx 4,1204$ (dm) $= 41,204$ (cm).

Thời gian con kiến bò: $t = \dfrac{s}{v} = \dfrac{41,204}{2} = 20,602 \approx 21$ (giây).

Bài 21. Người ta nhận thấy rằng xác suất để kinh tế thế giới phát triển là 60%. Trong trường hợp này, xác suất sinh lời khi đầu tư vào bất động sản là 80% và đầu tư vào vàng là 30%. Xác suất để kinh tế thế giới suy thoái là 40%. Khi đó, xác suất sinh lời khi đầu tư vào bất động sản là 10% và đầu tư vào việc mua vàng là 70%.

a) Nếu biết một người đầu tư bất động sản không sinh lời thì xác suất kinh tế suy thoái vượt quá $0,4$.

b) Một nhà đầu tư chọn ngẫu nhiên một trong hai hình thức là bất động sản hoặc vàng thì xác suất để sinh lời trong trường hợp này lớn hơn $0,5$.

c) Nếu biết nhà đầu tư sinh lời thì xác suất kinh tế đang phát triển là lớn hơn $0,5$.

d) Giả định độc lập trong cùng điều kiện kinh tế, một nhà đầu tư có lợi nhuận ở cả hai kênh bất động sản và vàng trong cùng một năm. Anh ta tin rằng điều này chắc chắn chứng tỏ kinh tế đang phát triển.

Hướng dẫn giải. Gọi E là biến cố "Kinh tế thế giới phát triển", $\overline{E}$ là biến cố "Kinh tế thế giới suy thoái".

Ta có: $P(E) = 0,6$; $P(\overline{E}) = 0,4$.

Gọi B là biến cố "Đầu tư bất động sản sinh lời", V là biến cố "Đầu tư vào vàng sinh lời".

Theo đề bài: $P(B|E) = 0,8$; $P(V|E) = 0,3$; $P(B|\overline{E}) = 0,1$; $P(V|\overline{E}) = 0,7$.

a) **Đúng.**

Xác suất đầu tư bất động sản không sinh lời là:

$P(\overline{B}) = P(\overline{B}|E) \cdot P(E) + P(\overline{B}|\overline{E}) \cdot P(\overline{E}) = (1 - 0,8) \cdot 0,6 + (1 - 0,1) \cdot 0,4 = 0,12 + 0,36 = 0,48.$

Xác suất kinh tế suy thoái khi biết bất động sản không sinh lời là:

$$P(\overline{E}|\overline{B}) = \frac{P(\overline{B}|\overline{E}) \cdot P(\overline{E})}{P(\overline{B})} = \frac{0,9 \cdot 0,4}{0,48} = 0,75.$$

Vì $0,75 > 0,4$ nên khẳng định này đúng.

b) **Sai.**

Xác suất sinh lời khi chọn ngẫu nhiên bất động sản hoặc vàng ($P(H_1) = P(H_2) = 0,5$) là:

$P(L) = 0,5 \cdot P(B) + 0,5 \cdot P(V)$.

Trong đó: $P(B) = 0,8 \cdot 0,6 + 0,1 \cdot 0,4 = 0,52$ và $P(V) = 0,3 \cdot 0,6 + 0,7 \cdot 0,4 = 0,46$.

$\Rightarrow P(L) = 0,5 \cdot 0,52 + 0,5 \cdot 0,46 = 0,49$.

Vì $0,49 < 0,5$ nên khẳng định này sai.

c) **Đúng.**

Dựa trên kết quả câu b, xác suất kinh tế phát triển khi nhà đầu tư sinh lời là:

$$P(E|L) = \frac{P(L|E) \cdot P(E)}{P(L)} = \frac{(0,5 \cdot 0,8 + 0,5 \cdot 0,3) \cdot 0,6}{0,49} = \frac{0,33}{0,49} \approx 0,673.$$

Vì $0,673 > 0,5$ nên khẳng định này đúng.

d) **Sai.**

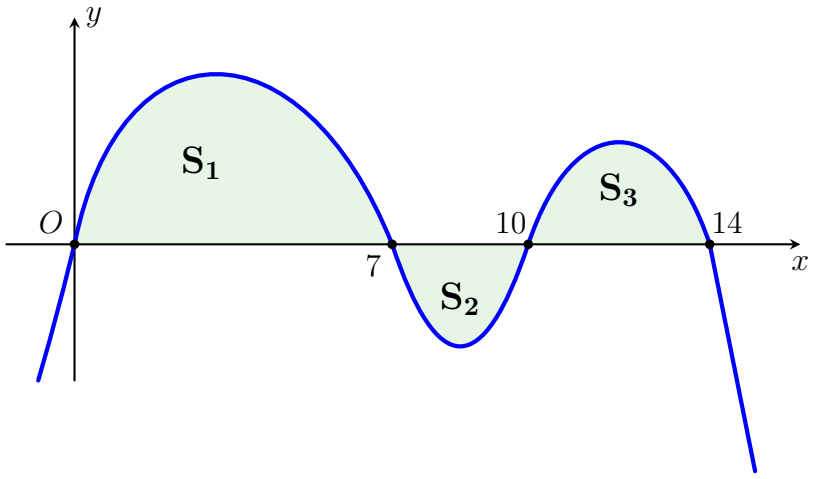
Xác suất kinh tế phát triển khi sinh lời ở cả hai kênh là:

$$P(E|B \cap V) = \frac{P(B \cap V|E) \cdot P(E)}{P(B \cap V)} = \frac{0,8 \cdot 0,3 \cdot 0,6}{0,8 \cdot 0,3 \cdot 0,6 + 0,1 \cdot 0,7 \cdot 0,4} = \frac{0,144}{0,172} \approx 0,837.$$

Vì xác suất này không bằng 1 nên không thể nói là "chắc chắn".

Bài 22. Cho hàm số $y = g(x)$ có đồ thị như hình vẽ và đặt $f(x) = \int\limits_0^x g(t)\mathrm{d}t$. Gọi S_1, S_2 và S_3

lần lượt là diện tích của các phần hình phẳng được tô màu.



a) Hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 7$

b) Giá trị của hàm số tại $x = 10$ là $f(10) = S_1 - S_2$

c) Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(7; 10)$

d) Phương trình $f(x) = 0$ có đúng hai nghiệm phân biệt trên $[0; 14]$

✍ *Hướng dẫn giải.* Từ định nghĩa $f(x) = \int\limits_0^x g(t)\mathrm{d}t$, theo định lý cơ bản của phép tính vi tích phân, ta có $f'(x) = g(x)$.

a) **Sai.**

Tại $x = 7$, ta có $f'(7) = g(7) = 0$.

Khi x đi qua điểm 7, $f'(x) = g(x)$ đổi dấu từ dương sang âm (đồ thị $g(x)$ cắt trục hoành từ trên xuống). Do đó, hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại $x = 7$.

b) **Đúng.**

Theo tính chất tích phân và diện tích hình phẳng:

$$f(10) = \int\limits_0^{10} g(t)\mathrm{d}t = \int\limits_0^{7} g(t)\mathrm{d}t + \int\limits_7^{10} g(t)\mathrm{d}t$$

Vì trên $(0; 7)$, $g(t) \geq 0$ nên $\int\limits_0^7 g(t)\mathrm{d}t = S_1$.

Vì trên $(7; 10)$, $g(t) \leq 0$ nên $\int\limits_7^{10} g(t)\mathrm{d}t = -S_2$.

Vậy $f(10) = S_1 - S_2$.

c) **Đúng.**

Trên khoảng $(7; 10)$, đồ thị hàm số $y = g(x)$ nằm phía dưới trục hoành, nên $g(x) < 0$.

Vì $f'(x) = g(x) < 0$ trên $(7; 10)$ nên hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng này.

d) **Sai.**

Ta có $f(0) = \int\limits_0^0 g(t)\mathrm{d}t = 0$, vậy $x = 0$ là một nghiệm.

Dựa vào hình vẽ, diện tích S_1 lớn hơn hẳn S_2 $(S_1 > S_2)$.

- Trên $[0; 7]$, $f(x)$ tăng từ $f(0) = 0$ đến $f(7) = S_1 > 0$.
- Trên $[7; 10]$, $f(x)$ giảm từ S_1 xuống $f(10) = S_1 - S_2$. Do $S_1 > S_2$ nên $f(10) > 0$.
- Trên $[10; 14]$, $f(x)$ tiếp tục tăng vì $g(x) > 0$.

Như vậy, trên nửa khoảng $(0;14]$, giá trị của $f(x)$ luôn dương. Phương trình $f(x)=0$ chỉ có duy nhất một nghiệm là $x=0$ trên đoạn $[0;14]$.

Bài 23. Một công ty dược phẩm đang thử nghiệm một loại thuốc mới. Nồng độ thuốc trong máu có thể được mô tả bằng hàm số $f(t)=A\cdot te^{kt}$ (mg/ml), trong đó t là thời gian tính bằng giờ kể từ khi tiêm và A,k là các hằng số thực. Biết rằng sau 1 giờ tiêm nồng độ thuốc trong máu là $0,3$ mg/ml và tại thời điểm ban đầu $(t=0)$, nồng độ thuốc tăng với tốc độ $0,5$ mg/ml mỗi giờ. Khi đó:

a) Đạo hàm của hàm số $f(t)$ là $f'(t)=Ae^{kt}(1+kt)$.

b) $A=2$.

c) $k=\ln\dfrac{3}{5}$.

d) Nồng độ thuốc trong máu lớn nhất là $0,38$ mg/ml (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Hướng dẫn giải. a) **Đúng.**

Áp dụng công thức đạo hàm của một tích $(u\cdot v)'=u'v+uv'$, ta có:
$f'(t)=(A\cdot t)'e^{kt}+A\cdot t(e^{kt})'=Ae^{kt}+A\cdot te^{kt}\cdot(kt)'=Ae^{kt}+A\cdot te^{kt}\cdot k=Ae^{kt}(1+kt)$.
Vậy $f'(t)=Ae^{kt}(1+kt)$.

b) **Sai.**

Từ giả thiết: "tại thời điểm ban đầu $(t=0)$, nồng độ thuốc tăng với tốc độ $0,5$ mg/ml mỗi giờ", ta có $f'(0)=0,5$
$\Leftrightarrow Ae^{k\cdot0}(1+k\cdot0)=0,5\Leftrightarrow Ae^0(1+0)=0,5\Leftrightarrow A=0,5$.
Suy ra $f(t)=0,5\cdot te^{kt}$ (mg/ml).

c) **Đúng.**

Từ giả thiết: "sau 1 giờ tiêm nồng độ thuốc trong máu là $0,3$ mg/ml" ta có $f(1)=0,3$
$\Leftrightarrow 0,5\cdot1\cdot e^{k\cdot1}=0,3\Leftrightarrow e^k=\dfrac{0,3}{0,5}\Leftrightarrow k=\ln\dfrac{0,3}{0,5}=\ln\dfrac{3}{5}$.
Suy ra $f(t)=0,5\cdot te^{\left(\ln\frac{3}{5}\right)t}$ (mg/ml).

d) **Sai.**

Khảo sát hàm số $f(t)=0,5\cdot te^{\left(\ln\frac{3}{5}\right)t}$ trên khoảng $(0;+\infty)$.
Ta có $f'(t)=0,5\cdot e^{\left(\ln\frac{3}{5}\right)t}\left[1+\left(\ln\dfrac{3}{5}\right)t\right]$ (thay các giá trị của A,k tìm được vào $f'(t)$ thu được ở ý a).
$f'(t)=0\Leftrightarrow1+\left(\ln\dfrac{3}{5}\right)t=0$ (vì $e^{\left(\ln\frac{3}{5}\right)t}>0,\forall t\in(0;+\infty)$) $\Leftrightarrow t=\dfrac{-1}{\ln\frac{3}{5}}$.

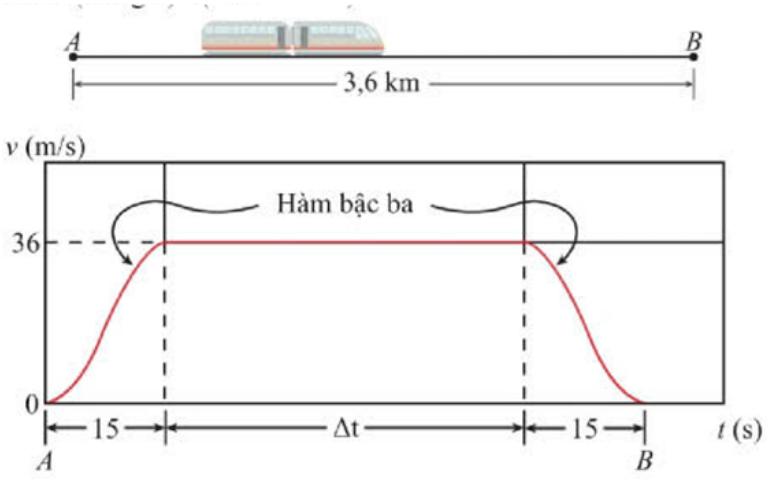
Bảng biến thiên:

t	0		$\dfrac{-1}{\ln\frac{3}{5}}$		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$	$f\left(\dfrac{-1}{\ln\frac{3}{5}}\right)$	$\searrow$	

Từ bảng biến thiên, suy ra nồng độ thuốc trong máu lớn nhất là:
$f\left(\dfrac{-1}{\ln\frac{3}{5}}\right)\approx0,36$ (mg/ml).

Bài 24. Trên một đường sắt, có hai nhà ga A và ga B cách nhau $3,6$ kilomet. Để đảm bảo an toàn thì các kĩ sư đường sắt thiết kế tốc độ của tàu như sau:

- Khi đi qua nhà ga A tàu phải tăng tốc trong 15 giây với phương trình tốc độ (m/s) là $v(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$ $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$ trong đó $M(15; 36)$ và $O(0; 0)$ là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = v(t)$.
- Khi đạt tốc độ lớn nhất thì tàu tiếp tục di chuyển với vận tốc đó trong Δt giây.
- Sau đó tàu giảm tốc trong 15 giây với tốc độ là một hàm bậc ba có đồ thị đối xứng với đồ thị hàm số $y = v(t)$ (như hình vẽ).



a) $v'(t) = 0$ có 2 nghiệm là $t = 0$ và $t = 15$.

b) $\dfrac{4b}{a} = 90$.

c) Tổng quãng đường tàu đi được trong 15 giây đầu và 15 giây cuối bằng 540 mét.

d) Tổng thời gian tàu di chuyển từ ga A đến ga B lớn hơn 120 giây.

Hướng dẫn giải. a) **Đúng.**

Ta có $v'(t) = 3at^2 + 2bt + c$.

Từ giả thiết $M(15; 36)$ và $O(0; 0)$ là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = v(t)$, suy ra: $\begin{cases} v(15) = 36 \\ v(0) = 0 \end{cases}$ (1) và $\begin{cases} v'(15) = 0 \\ v'(0) = 0 \end{cases}$ (2).

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình: $\begin{cases} a \cdot 15^3 + b \cdot 15^2 + 15c + d = 36 \\ d = 0 \\ 3a \cdot 15^2 + 2b \cdot 15 + c = 0 \\ c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3375a + 225b = 36 \\ 675a + 30b = 0 \\ d = 0 \\ c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} a = -\dfrac{8}{375} \\ b = \dfrac{12}{25} \\ d = 0 \\ c = 0 \end{cases}.$$

Suy ra $v(t) = -\dfrac{8}{375}t^3 + \dfrac{12}{25}t^2$. Đạo hàm $v'(t) = -\dfrac{8}{125}t^2 + \dfrac{24}{25}t$.

Xét $v'(t) = 0 \Leftrightarrow -\dfrac{8}{25}t\left(\dfrac{1}{5}t - 3\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = 15 \end{array}\right.$. Vậy khẳng định a đúng.

b) **Sai.**

Từ kết quả câu a, ta có: $\dfrac{4b}{a}=\dfrac{4\cdot\frac{12}{25}}{-\frac{8}{375}}=\dfrac{\frac{48}{25}}{-\frac{8}{375}}=-90\neq 90$.

c) **Đúng.**

Quãng đường vật đi được từ thời điểm a đến b là $S=\int\limits_a^b v(t)\mathrm{d}t$.

Quãng đường đi được trong 15 giây đầu là: $S_1=\int\limits_0^{15}\left(-\dfrac{8}{375}t^3+\dfrac{12}{25}t^2\right)\mathrm{d}t=\left[-\dfrac{2}{375}t^4+\dfrac{4}{25}t^3\right]_0^{15}=270$ (m).

Vì đồ thị vận tốc ở 15 giây cuối đối xứng với 15 giây đầu nên quãng đường đi được trong 15 giây cuối cũng bằng $S_1=270$ (m).

Tổng quãng đường trong 15 giây đầu và 15 giây cuối là $270+270=540$ (m).

d) **Sai.**

Tổng quãng đường $AB=3,6$ km $=3600$ m. Vận tốc lớn nhất tàu đạt được là $v_{max}=36$ m/s.

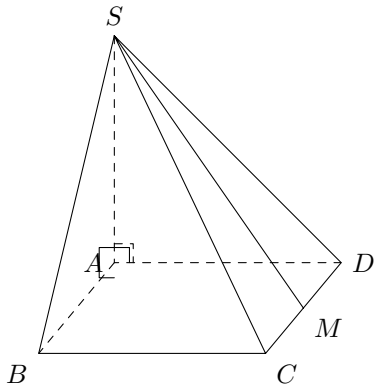
Quãng đường tàu đi với vận tốc không đổi là: $S_2=3600-540=3060$ (m).

Thời gian tàu đi với vận tốc không đổi là: $\Delta t=\dfrac{S_2}{v_{max}}=\dfrac{3060}{36}=85$ (s).

Tổng thời gian tàu di chuyển từ A đến B là: $T=15+85+15=115$ (s).

Vì $115<120$ nên khẳng định d sai.

Bài 25. Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với đáy, $SA=a$, $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB=2a$, $AD=3a$ và M là trung điểm của CD (tham khảo hình vẽ).



a) $\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}=\overrightarrow{SM}$.

b) $|\overrightarrow{SM}|=a\sqrt{11}$.

c) $\overrightarrow{SM}\cdot\overrightarrow{AB}=3a^2$.

d) Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{SM}$ và $\overrightarrow{AB}$ bằng $72,45^\circ$ (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm của độ).

Hướng dẫn giải. Vì $SA\perp(ABCD)$ và $ABCD$ là hình chữ nhật nên $\begin{cases}SA\perp AD\\SA\perp AB\\AB\perp AD\end{cases}$.

Gắn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với $A\equiv(0;0;0)$, tia Ax trùng với AB, tia Ay trùng với AD, tia Az trùng với AS.

Khi đó ta có tọa độ các điểm như sau: $A(0;0;0)$, $B(2a;0;0)$, $C(2a;3a;0)$, $D(0;3a;0)$, $S(0;0;a)$.

Vì M là trung điểm của CD nên $M\left(\dfrac{2a+0}{2};\dfrac{3a+3a}{2};\dfrac{0+0}{2}\right)=(a;3a;0)$.

a) **Sai.**

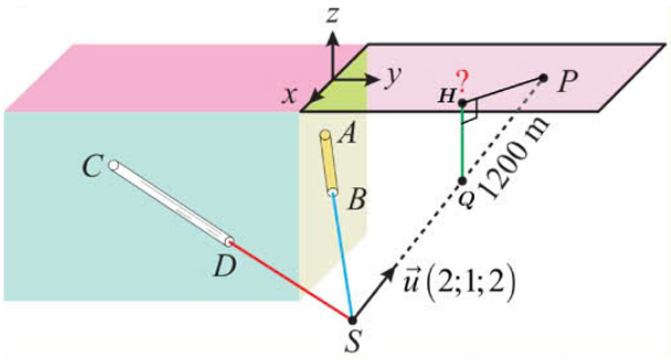
Vì M là trung điểm của CD nên theo quy tắc trung tuyến, ta có $\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}=2\overrightarrow{SM}$.
Hoặc kiểm chứng bằng tọa độ: $\overrightarrow{SC}=(2a;3a;-a)$, $\overrightarrow{SD}=(0;3a;-a)\Rightarrow\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}=(2a;6a;-2a)=2(a;3a;-a)=2\overrightarrow{SM}$.

b) **Đúng.**
Ta có $\overrightarrow{SM}=(a-0;3a-0;0-a)=(a;3a;-a)$.
$\Rightarrow|\overrightarrow{SM}|=\sqrt{a^2+(3a)^2+(-a)^2}=\sqrt{a^2+9a^2+a^2}=a\sqrt{11}$.

c) **Sai.**
Ta có $\overrightarrow{AB}=(2a;0;0)$ và $\overrightarrow{SM}=(a;3a;-a)$.
$\overrightarrow{SM}\cdot\overrightarrow{AB}=a\cdot2a+3a\cdot0+(-a)\cdot0=2a^2\neq3a^2$.

d) **Đúng.**
$$\cos\left(\overrightarrow{SM},\overrightarrow{AB}\right)=\frac{\overrightarrow{SM}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{SM}|\cdot|\overrightarrow{AB}|}=\frac{2a^2}{a\sqrt{11}\cdot2a}=\frac{1}{\sqrt{11}}.$$
$$\Rightarrow\left(\overrightarrow{SM},\overrightarrow{AB}\right)=\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{11}}\right)\approx72,45^\circ.$$

Bài 26. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, đơn vị trên mỗi trục tính bằng 100 mét, mặt đất nằm trên mặt phẳng (Oxy), trục Oz hướng lên. Từ điểm $A(-7;-3;-8)$, một đường hầm X được dự kiến đào xuyên thẳng qua điểm $B(-2;0;-9)$ vào trong lòng núi. Cùng lúc đó, một đường hầm Y được xây thẳng từ điểm $C(4;-6;-6)$ xuyên qua điểm $D(7;-1;-8)$. Hai đường hầm cùng được đào đến S vào cùng một thời điểm. Sau đó từ điểm S này, các kỹ sư tiếp tục khoan một đường hầm khác theo hướng $\vec{u}(2;1;2)$ đâm ra mặt đất tại điểm P (tham khảo hình vẽ). Biết rằng việc khoan đường hầm X được tiến hành với tốc độ 5 mét mỗi ngày.



a) Phương trình đường thẳng AB là $\dfrac{x+2}{5}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z-9}{-1}$.

b) Hoành độ điểm S là 13.

c) Đường hầm Y được khoan với tốc độ lớn hơn 4 mét mỗi ngày.

d) Trên đường hầm SP, một lối thoát hiểm được khoan từ điểm Q cách P 1200 mét, khoan thẳng đứng lên trên mặt đất. Vậy chiều dài của lối thoát hiểm đó lớn hơn 2000 mét.

Hướng dẫn giải. a) **Sai.**
Ta có $\overrightarrow{AB}=(5;3;-1)$. Đường thẳng AB đi qua điểm $B(-2;0;-9)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}_{AB}=(5;3;-1)$ có phương trình chính tắc là $AB:\dfrac{x+2}{5}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z+9}{-1}$. (Mệnh đề ghi $z-9$ là sai).

b) **Đúng.**

Phương trình tham số của đường thẳng AB là $\begin{cases} x=-2+5t \\ y=3t \\ z=-9-t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$.

Vì $S\in AB$ nên $S(-2+5t;3t;-9-t)$.

Ta có $\overrightarrow{CS}=(-6+5t;3t+6;-3-t)$ và $\overrightarrow{CD}=(3;5;-2)$.

Ba điểm C,D,S thẳng hàng nên $\overrightarrow{CS},\overrightarrow{CD}$ cùng phương:

$\dfrac{5t-6}{3}=\dfrac{3t+6}{5}=\dfrac{-3-t}{-2}$ $(*)$

$\Leftrightarrow \dfrac{5t-6}{3}=\dfrac{3t+6}{5}\Leftrightarrow 25t-30=9t+18\Leftrightarrow 16t=48\Leftrightarrow t=3.$

Thay $t=3$ vào $(*)$ thấy thỏa mãn $\left(\dfrac{9}{3}=\dfrac{15}{5}=\dfrac{-6}{-2}=3\right)$.

$\Rightarrow S(13;9;-12)$. Vậy hoành độ điểm S bằng 13.

c) **Sai.**

Tốc độ đào đường hầm Y là $v_Y=\dfrac{s_Y}{t_Y}$ với s_Y (m) là độ dài đường hầm Y ($s_Y=100\cdot CS$), t_Y là thời gian đào.

Ta có $C(4;-6;-6),S(13;9;-12)\Rightarrow CS=\sqrt{(13-4)^2+(9+6)^2+(-12+6)^2}=3\sqrt{38}$ (đơn vị trục).

Vì hai đường hầm bắt đầu đào cùng lúc và cùng đến S nên $t_X=t_Y$.

Ta có $A(-7;-3;-8),S(13;9;-12)$ và $v_X=5$ m/ngày. Quãng đường thực $s_X=100\cdot AS$.

$t_X=\dfrac{s_X}{v_X}=\dfrac{100\cdot\sqrt{(13+7)^2+(9+3)^2+(-12+8)^2}}{5}=\dfrac{100\cdot 4\sqrt{35}}{5}=80\sqrt{35}$ (ngày).

Tốc độ đào đường hầm Y là: $v_Y=\dfrac{100\cdot 3\sqrt{38}}{80\sqrt{35}}\approx 3,91<4$ (m/ngày).

d) **Sai.**

Gọi H là điểm giao giữa mặt đất và lối thoát hiểm. Khi đó QH là chiều dài lối thoát hiểm, $QH\perp HP$ (tam giác HPQ vuông tại H).

Lối thoát hiểm khoan thẳng đứng nên QH có vectơ chỉ phương $\vec{u}_1=(0;0;1)$.

Đường hầm SP có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(2;1;2)$.

Cosin góc giữa hai đường thẳng QH và SP là:

$\cos(QH,SP)=\cos\angle HQP=\dfrac{|\vec{u}_1\cdot\vec{u}|}{|\vec{u}_1|\cdot|\vec{u}|}=\dfrac{|0+0+2|}{\sqrt{1^2}\cdot\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=\dfrac{2}{3}.$

Trong tam giác vuông HPQ, ta có:

$HQ=PQ\cdot\cos\angle HQP=1200\cdot\dfrac{2}{3}=800$ (m).

Vì $800<2000$ nên khẳng định d sai.

Bài 27. Một tấm thép được nung đến nhiệt độ 800 °C, ngay sau đó được chuyển sang buồng ủ có nhiệt độ 600 °C. Biết tốc độ giảm nhiệt của tấm thép được tính theo công thức $T'(t)=200\cdot k\cdot e^{kt}$ (°C/giờ) (trong đó k là hằng số thực). Biết rằng sau 1 giờ, nhiệt độ của tấm thép bằng 750 °C. Gọi $T(t)$ là nhiệt độ của tấm thép sau t (giờ) từ lúc bắt đầu đặt vào buồng ủ.

a) $T(0)=800$ (°C) và $T(1)=750$ (°C).

b) $T(t)=650+200e^{kt}$.

c) Giá trị của k là $k=0,286$ (kết quả làm tròn đến hàng phần nghìn).

d) Nhiệt độ của tấm thép còn 700 °C sau 2,4 giờ (làm tròn đến hàng phần chục của giờ).

Hướng dẫn giải. a) **Đúng.**

Theo đề bài, nhiệt độ lúc bắt đầu đặt vào buồng ủ ($t = 0$) là 800 °C nên $T(0) = 800$. Sau 1 giờ nhiệt độ là 750 °C nên $T(1) = 750$.

b) **Sai.**

$T(t) = \int T'(t)\mathrm{d}t = \int (200 \cdot k \cdot e^{kt})\mathrm{d}t = 200 \cdot e^{kt} + C$.

Biết $T(0) = 800\,(^\circ\mathrm{C}) \Leftrightarrow 200 \cdot e^{k\cdot 0} + C = 800 \Leftrightarrow 200 + C = 800 \Leftrightarrow C = 600$.

Suy ra $T(t) = 600 + 200e^{kt}$.

c) **Sai.**

Vì $T(1) = 750 \Rightarrow 600 + 200e^{k} = 750 \Leftrightarrow 200e^{k} = 150 \Leftrightarrow e^{k} = 0,75 \Leftrightarrow k = \ln 0,75 \approx -0,288$.

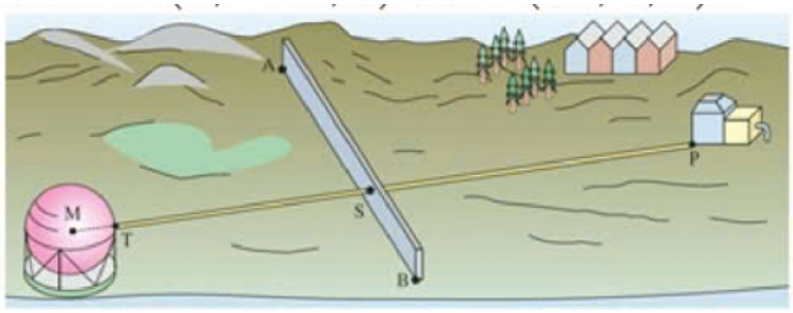
d) **Đúng.**

Ta có $T(t) = 700 \Leftrightarrow 600 + 200e^{\ln 0,75\cdot t} = 700 \Leftrightarrow 200e^{\ln 0,75\cdot t} = 100 \Leftrightarrow e^{\ln 0,75\cdot t} = 0,5 \Leftrightarrow \ln 0,75 \cdot t = \ln 0,5$

$\Leftrightarrow t = \dfrac{\ln 0,5}{\ln 0,75} \approx 2,4$ (giờ).

Vậy sau 2,4 giờ thì nhiệt độ của tấm thép còn 700 °C.

Bài 28. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, đơn vị mỗi trục là mét, mặt đất là mặt phẳng (Oxy), trục Oz hướng lên, một bể chứa nước hình cầu có tâm đặt tại điểm M và bán kính $r = 7$ (mét). Một đường ống từ trạm bơm từ điểm $P(-2;4;0)$ nối đến điểm $T(28;-11;10)$ nằm trên bể chứa nước sao cho P, T, M thẳng hàng (T nằm giữa P và M như hình vẽ). Một bức tường cao 6 mét vuông góc với mặt đất trên đoạn thẳng AB với các điểm $A(6;-10;0)$ và $B(14;6;0)$.



a) Phương trình mặt phẳng chứa bức tường là $2x - y - 22 = 0$.

b) Phương trình đường thẳng PT là $\dfrac{x-22}{-8} = \dfrac{y+8}{3} = \dfrac{z-8}{-2}$.

c) Đường ống đâm xuyên qua bức tường tại điểm $S(a;b;c)$ thì $a + b + c = 12$.

d) Điểm M có hoành độ lớn hơn 32.

Hướng dẫn giải. a) **Đúng.**

Gọi (α) là mặt phẳng chứa bức tường. Theo giả thiết, mặt phẳng (α) chứa các điểm $A(6;-10;0)$, $B(14;6;0)$ và vuông góc với mặt đất (tức mặt phẳng (Oxy)). Suy ra mặt phẳng (α) có hai cặp vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{AB} = (8;16;0)$ và $\vec{k} = (0;0;1)$ (vectơ pháp tuyến của (Oxy)). Một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) là: $\vec{n}_\alpha = [\overrightarrow{AB}, \vec{k}] = (16;-8;0) = 8(2;-1;0)$. Chọn $\vec{n}_1 = (2;-1;0)$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α). Phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $B(14;6;0)$ là: $2(x-14) - 1(y-6) + 0(z-0) = 0 \Leftrightarrow 2x - 28 - y + 6 = 0 \Leftrightarrow 2x - y - 22 = 0$.

b) **Sai.**

Ta có $\overrightarrow{PT} = (30;-15;10) = -5(-6;3;-2)$. Suy ra $\vec{u} = (-6;3;-2)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng PT. Mà ở đáp án phương trình lại có vectơ chỉ phương là $(-8;3;-2)$, do đó ta kết luận luôn mệnh đề b sai.

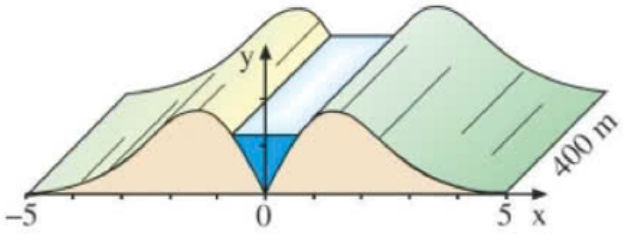
c) **Đúng.**

Điểm $S = PT \cap (\alpha)$. Đường thẳng PT đi qua điểm $P(-2;4;0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (-6;3;-2)$ có phương trình tham số là: $PT: \begin{cases} x = -2-6t \\ y = 4+3t \\ z = -2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$. Vì $S \in PT$ nên $S(-2-6t;4+3t;-2t)$. Mà $S \in (\alpha)$ nên: $2(-2-6t)-(4+3t)-22=0 \Leftrightarrow -4-12t-4-3t-22=0 \Leftrightarrow -15t=30 \Leftrightarrow t=-2$. Suy ra $S(10;-2;4) \Rightarrow a=10, b=-2, c=4 \Rightarrow a+b+c=12$.

d) **Đúng.**

Vì $M \in PT$ nên $M(-2-6t;4+3t;-2t)$. Ta có $\overrightarrow{TM} = (-2-6t-28;4+3t+11;-2t-10) = (-30-6t;15+3t;-10-2t)$. Ta có $|\overrightarrow{PT}| = \sqrt{30^2+(-15)^2+10^2} = 35$. Theo bài ra T nằm giữa P và M, đồng thời T nằm trên mặt cầu tâm M bán kính $r=7$ nên $MT=7$. Suy ra $PT = 35 = 5 \cdot 7 = 5MT$. Vì P, T, M thẳng hàng theo thứ tự đó nên $\overrightarrow{PT} = 5\overrightarrow{TM}$. $\Leftrightarrow (30;-15;10) = 5(-30-6t;15+3t;-10-2t) \Leftrightarrow 30 = 5(-30-6t) \Leftrightarrow 6 = -30-6t \Leftrightarrow 6t = -36 \Leftrightarrow t = -6$. Vậy hoành độ điểm M bằng: $-2-6\cdot(-6) = 34 > 32$.

Bài 29. Một kênh đào nằm giữa hai lớp đất, lớp đất này có độ rộng là 10 mét và chiều dài là 400 mét. Mặt cắt ngang của kênh đào được cho như hình vẽ. Trên hệ tọa độ Oxy, trục Ox là phương ngang, trục Oy hướng lên trời, lớp đất phía bên phải được mô hình hoá thông qua hàm số $f(x) = 2x.e^{-0,25x^2}$ (x và $f(x)$ được tính bằng mét), lớp đất phía bên trái đối xứng với lớp đất bên phải qua trục Oy. Cho biết độ dốc của một đồ thị được xác định dựa vào góc giữa tiếp tuyến của đồ thị đó với trục Ox.



a. Biết hàm số $F(x) = A.e^{-0,25x^2}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Vậy $A = -4$.

b. Độ cao lớn nhất của lớp đất nhỏ hơn $1,7$ mét.

c. Khi nước trong kênh đào đạt độ cao lớn nhất, thể tích nước lúc đó lớn hơn 340 mét khối.

d. Xe cắt cỏ nằm trên sườn dốc của lớp đất có khả năng leo dốc tối đa là $40°$, vậy xe cắt cỏ này có thể leo hết sườn dốc của lớp đất trên.

Hướng dẫn giải. **a) Đúng.**

Vì $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ nên theo định nghĩa nguyên hàm, ta có $F'(x) = f(x)$

$\Leftrightarrow \left(A.e^{-0,25x^2}\right)' = 2x.e^{-0,25x^2}$

$\Leftrightarrow A.e^{-0,25x^2}(-0,25x^2)' = 2x.e^{-0,25x^2}$

$\Leftrightarrow A.e^{-0,25x^2}(-0,25.2x) = 2x.e^{-0,25x^2}$

$\Leftrightarrow -0,5xA.e^{-0,25x^2} = 2x.e^{-0,25x^2}$

$\Leftrightarrow A = \dfrac{2x.e^{-0,25x^2}}{-0,5x.e^{-0,25x^2}} = \dfrac{2}{-0,5} = -4.$

b) Sai.

Quan sát hình vẽ, ta thấy độ cao lớn nhất của lớp đất bằng với giá trị cực đại của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[0;5]$ (vì hai lớp đất là đối xứng nhau qua trục Oy nên giá trị cực đại ở cả hai lớp đất

là như nhau nên ta chỉ cần xét 1 lớp đất là đủ).
Ta có
$f'(x) = (2x)'.e^{-0,25x^2} + 2x.\left(e^{-0,25x^2}\right)'$
$= 2.e^{-0,25x^2} + 2x.(-0,25x^2)'e^{-0,25x^2}$
$= 2.e^{-0,25x^2} + 2x.(-0,25.2x)e^{-0,25x^2}$
$= 2.e^{-0,25x^2} - x^2.e^{-0,25x^2}$
$= e^{-0,25x^2}(2 - x^2)$; $f'(x) = 0$
$f(x) = e^{-0,25x^2}(2 - x^2)$
$\Leftrightarrow 2 - x^2 = 0$
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \sqrt{2} \in [0;5] \text{ (tm)} \\ x = -\sqrt{2} \notin [0;5] \text{ (L)} \end{array}\right.$
Vậy độ cao lớn nhất của lớp đất bằng $f(\sqrt{2}) \approx 1,7155 > 1,7$.

c) Đúng.

Chú ý: Nếu $S(x) = S$ không đổi với mỗi $x \in [a;b]$ thì thể tích vật thể lúc này là $V = (b-a)S$.
Nhận xét mặt cắt của nước trong kênh (mặt màu xanh dương đậm trong hình) không đổi với mỗi $x \in [0;400]$ (vì kênh dài 400 m tính từ gốc tọa độ); và độ cao lớn nhất của nước trong kênh đúng bằng đỉnh của gò đất hai bên và bằng tung độ của điểm cực đại của hàm số $f(x)$ tức bằng $f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}.e^{-0,5}$ (m).
Suy ra thể tích nước trong kênh là $V = (400-0)S = 400.S$ với S là mặt cắt màu xanh dương trong hình.
Vì diện tích mặt cắt S đối xứng qua trục tung nên diện tích S sẽ bằng 2 lần diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = 2\sqrt{2}.e^{-0,5}$, $y = f(x)$ và các đường $x = 0, x = \sqrt{2}$ và bằng
$S = 2\int\limits_0^{\sqrt{2}} \left[2\sqrt{2}.e^{-0,5} - f(x)\right] \mathrm{d}x$
$= 2\int\limits_0^{\sqrt{2}} \left(2\sqrt{2}.e^{-0,5} - 2x.e^{-0,25x^2}\right) \mathrm{d}x$
Vậy thể tích nước trong kênh đào khi đạt độ cao lớn nhất là
$V = 400.2\int\limits_0^{\sqrt{2}} \left(2\sqrt{2}.e^{-0,5} - 2x.e^{-0,25x^2}\right) \mathrm{d}x \approx 681,8 \text{ (m}^3\text{)} > 340 \text{ (m}^3\text{)}$.

d) Sai.

Gọi α là góc nghiêng của sườn dốc $(0 < \alpha < 90)$. Ta có $\tan\alpha = |k|$ với k là hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số và $k = f'(x) = e^{-0,25x^2}(2 - x^2)$.
Vì xe cắt cỏ nằm trên sườn dốc của lớp đất có khả năng leo dốc tối đa là $40°$, nên xe cắt cỏ này có thể leo hết sườn dốc của lớp đất trên nếu độ dốc tối đa của lớp đất nhỏ hơn $40°$ khi và chỉ khi $|k|_{\max} < \tan 40° \approx 0,839$.
Do đó để xác định xem mệnh đề d) đúng hay sai, ta đi tìm giá trị $|k|$ lớn nhất với $k = g(x) = f'(x)$ trên đoạn $[\sqrt{2};5]$ rồi so sánh với $\tan 40°$.
Ta có $g'(x) = \left[e^{-0,25x^2}(2 - x^2)\right]'$
$= (e^{-0,25x^2})'(2 - x^2) + e^{-0,25x^2}(2 - x^2)'$
$= -0,5x.e^{-0,25x^2}.(2 - x^2) + e^{-0,25x^2}(-2x)$
$= x.e^{-0,25x^2}[-0,5(2 - x^2) - 2]$
$\Leftrightarrow x.e^{-0,25x^2}(-1 + 0,5x^2 - 2) = 0$
$\Leftrightarrow x.e^{-0,25x^2}(0,5x^2 - 3) = 0$
$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x.e^{-0,25x^2}(0,5x^2 - 3) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 0 \notin [\sqrt{2}; 5] \text{ (L)} \\ 0,5x^2 - 3 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} x = \sqrt{6} \text{ (tm)} \\ x = -\sqrt{6} \text{ (L)} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Ta có $g(\sqrt{2}) = 0; g(\sqrt{6}) \approx -0,89; g(5) \approx -0,0444$.
So sánh ta được $|g(\sqrt{6})| > |g(5)| > |g(2)|$.
Khi đó tan của góc nghiêng lớn nhất của sườn dốc là $\tan \alpha_{\max} = |g(\sqrt{6})| \approx 0,89$
Suy ra $\alpha_{\max} \approx 41,67° > 40°$.
Vậy xe cắt cỏ này không thể leo hết sườn dốc của lớp đất trên.

Bài 30. Một nhà máy sản xuất xe mô tô được bán với giá mỗi chiếc là 60 triệu đồng. Chi phí hàng ngày có thể được mô tả bằng hàm số $C(x) = 0,01x^3 - 1,5x^2 + 86x + 1200$ (triệu đồng), trong đó x ($x \in \mathbb{N}$) là số xe mô tô được sản xuất mỗi ngày. Biết rằng mỗi ngày nhà máy có thể sản xuất tối đa 150 chiếc xe mô tô. Hàm số $L(x)$ mô tả lợi nhuận hằng ngày. Giả định rằng các chiếc xe sản xuất ra đều bán hết. Khi đó

a) Lợi nhuận mỗi ngày của nhà máy là $L(x) = -0,01x^3 + 1,5x^2 + 26x - 1200$.

b) Lợi nhuận lớn nhất nhà máy thu được trong một ngày là 1320 triệu đồng.

c) Nhà máy cần sản xuất ít nhất 50 chiếc xe để không bị lỗ.

d) Nếu sản xuất hết công suất (tức là mỗi ngày nhà máy sản xuất và bán ra 150 chiếc xe mô tô). Để không bị lỗ thì giá của mỗi chiếc xe khi này tối thiểu là 94 triệu đồng.

Hướng dẫn giải. **a) Sai.**
Lợi nhuận = Tổng doanh thu - Tổng chi phí
Vì mỗi ngày nhà máy sản xuất và bán ra được x xe mô tô với giá mỗi chiếc là 60 triệu đồng nên tổng doanh thu nhà máy thu được mỗi ngày là $D(x) = 60x$ (triệu đồng).
Suy ra lợi nhuận mỗi ngày của nhà máy là:
$L(x) = D(x) - C(x) = 60x - (0,01x^3 - 1,5x^2 + 86x + 1200)$
$L(x) = 60x - 0,01x^3 + 1,5x^2 - 86x - 1200 = -0,01x^3 + 1,5x^2 - 26x - 1200$ (triệu đồng).

b) Đúng.
Lợi nhuận lớn nhất nhà máy thu được trong một ngày bằng $L(x)_{\max}$.
Vì $x \in \mathbb{N}$ và mỗi ngày nhà máy có thể sản xuất tối đa 150 chiếc xe mô tô nên $0 \le x \le 150$.
Khảo sát hàm số $L(x)$ trên đoạn $[0; 150]$:
Ta có $L'(x) = -0,03x^2 + 3x - 26$.

$$L'(x) = 0 \Leftrightarrow -0,03x^2 + 3x - 26 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \approx 90,41 \in [0; 150] \text{ (tm)} \\ x \approx 9,585 \in [0; 150] \text{ (tm)} \end{bmatrix}$$

Từ bảng biến thiên, ta thấy hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x \approx 90,41$ nhưng $x \in \mathbb{N}$ do đó giá trị lớn nhất của hàm số $L(x)$ là một trong 2 giá trị đạt tại 2 số tự nhiên ngay cạnh (2 phía) với số 90,41 là $x = 90$ hoặc $x = 91$.
Ta có $L(90) = 1320$; $L(91) \approx 1319,79$ suy ra $L(90) > L(91)$.
Vậy lợi nhuận lớn nhất nhà máy thu được trong một ngày là 1320 triệu đồng.

c) Đúng.
Để không bị lỗ thì lợi nhuận phải lớn hơn hoặc bằng không, tức $L(x) \ge 0$.
Ta có $L(x) = 0$ tại các điểm:

$$\begin{bmatrix} x = -20 \notin [0; 150] \text{ (L)} \\ x = 120 \in [0; 150] \text{ (tm)} \\ x = 50 \in [0; 150] \text{ (tm)} \end{bmatrix}$$

Từ bảng xét dấu, ta thấy $L(x) \geq 0 \Leftrightarrow 50 \leq x \leq 120$ (phần đồ thị nằm trên đường thẳng $y = 0$ thì có giá trị lớn hơn 0, với hai điểm giao đạt giá trị bằng 0).
Vậy nhà máy cần sản xuất ít nhất 50 chiếc xe để không bị lỗ.

d) Đúng.
Gọi giá bán của mỗi chiếc xe là x (triệu đồng).
Khi mỗi ngày bán được 150 chiếc xe thì doanh thu là $150x$ (triệu đồng) và chi phí là $C(150) = 14100$ (triệu đồng).
Suy ra lợi nhuận thu được khi bán 150 chiếc xe là $L(x) = 150x - 14100$ (triệu đồng).
Để không bị lỗ thì $L(x) \geq 0 \Leftrightarrow 150x - 14100 \geq 0 \Leftrightarrow 150x \geq 14100 \Leftrightarrow x \geq 94$.
Vậy để không bị lỗ thì giá của mỗi chiếc xe khi này tối thiểu là 94 triệu đồng.

Bài 31. Những ngày giáp Tết Nguyên Đán cũng là dịp bước vào vụ Đông Xuân, bà con nông dân tích cực xuống đồng cấy lúa. Cây lúa sau khi được cấy trải qua quá trình tăng trưởng đẻ nhánh và phát triển chiều cao trước khi làm đòng, trổ bông. Qua nghiên cứu một giống lúa mới, các nhà khoa học nhận thấy một cây lúa tính từ lúc được cấy bằng một cây mạ với chiều cao 20 cm có tốc độ tăng trưởng chiều cao cho bởi hàm số $v(t) = -0,1t^3 + 1,1t^2$, trong đó t tính theo tuần, $v(t)$ tính bằng cm/tuần. Gọi $h(t)$ là chiều cao của cây lúa ở tuần thứ t ($t \geq 0$).

a) $h(t) = -\frac{1}{40}t^4 + \frac{11}{30}t^3 + 20$.

b) Giai đoạn tăng trưởng chiều cao của cây lúa kéo dài 12 tuần.

c) Chiều cao tối đa của cây lúa là 150 cm.

d) Vào thời điểm cây lúa phát triển nhanh nhất, chiều cao của cây đã lớn hơn 80 cm.

Hướng dẫn giải. a) **Đúng.** Ta có $h(t) = \int v(t)\mathrm{d}t = \int(-0,1t^3 + 1,1t^2)\mathrm{d}t = -\frac{1}{40}t^4 + \frac{11}{30}t^3 + C$.
Theo giả thiết $h(0) = 20 \Rightarrow C = 20$. Suy ra $h(t) = -\frac{1}{40}t^4 + \frac{11}{30}t^3 + 20$.

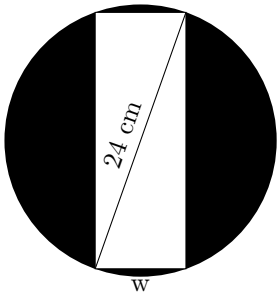
b) **Sai.** Cây tăng trưởng khi $v(t) > 0 \Leftrightarrow -0,1t^3 + 1,1t^2 > 0 \Leftrightarrow t^2(-0,1t + 1,1) > 0 \Leftrightarrow -0,1t + 1,1 > 0 \Leftrightarrow t < 11$.
Vậy thời gian tăng trưởng của cây lúa bé hơn 11 tuần (không phải 12 tuần).

c) **Sai.** Ta có $v(t) \geq 0 \Leftrightarrow t \in [0; 11]$.
Chiều cao tối đa của cây lúa là giá trị lớn nhất của hàm số $h(t)$ trên đoạn $[0; 11]$.
Ta có $h'(t) = 0 \Leftrightarrow v(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = 11 \end{array}\right.$.
Tính các giá trị: $h(0) = 20$, $h(11) = -\frac{1}{40} \cdot 11^4 + \frac{11}{30} \cdot 11^3 + 20 \approx 141,6$ cm.
Suy ra chiều cao tối đa của cây lúa bé hơn 143 cm. Khẳng định 150 cm là sai.

d) **Đúng.** Thời điểm cây lúa phát triển nhanh nhất ứng với giá trị lớn nhất của hàm số $v(t)$ trên đoạn $[0; 11]$.
Ta có $v'(t) = -0,3t^2 + 2,2t$; $v'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = \dfrac{22}{3} \end{array}\right.$.
So sánh các giá trị: $v(0) = v(11) = 0$, $v\left(\frac{22}{3}\right) \approx 19,7$. Suy ra $\max_{[0;11]} v(t) = v\left(\frac{22}{3}\right)$.
Tại thời điểm đó, chiều cao cây lúa là: $h\left(\frac{22}{3}\right) = -\frac{1}{40}\left(\frac{22}{3}\right)^4 + \frac{11}{30}\left(\frac{22}{3}\right)^3 + 20 \approx 92,3$ cm.
Vì $92,3 > 80$ nên vào thời điểm cây lúa phát triển nhanh nhất, chiều cao của cây đã lớn hơn 80 cm.

Bài 32. Độ cứng S của một thanh gỗ hình chữ nhật tỉ lệ thuận với tích của chiều rộng w và bình phương chiều dài d của nó (theo đơn vị mét). Biết rằng nếu thanh gỗ có chiều dài là 6 cm,

chiều rộng là 3 cm thì độ cứng của nó bằng 108. Một khúc gỗ hình tròn có đường kính là 24 cm, người ta cắt thành một thanh gỗ hình chữ nhật như hình vẽ bên.



a) Chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật liên hệ bởi công thức $d^2 + w^2 = 576$.

b) Độ cứng của thanh gỗ là $S = 2dw^2$.

c) Độ cứng của thanh gỗ được mô phỏng bằng hàm số $S(w) = 576w - w^3, \forall w \in (0; 24)$.

d) Độ cứng lớn nhất của miếng gỗ cắt ra được là $S_{\max} = 5321$ (làm tròn đến hàng đơn vị).

✍ *Hướng dẫn giải.* a) **Đúng.** Đường kính của khúc gỗ hình tròn là 24 cm, do đó bán kính là 12 cm. Khi cắt thành một hình chữ nhật, hai cạnh của hình chữ nhật là các cạnh của tam giác vuông có đường chéo bằng đường kính của hình tròn. Do đó, theo định lý Pythagore: $d^2 + w^2 = 24^2 = 576$.

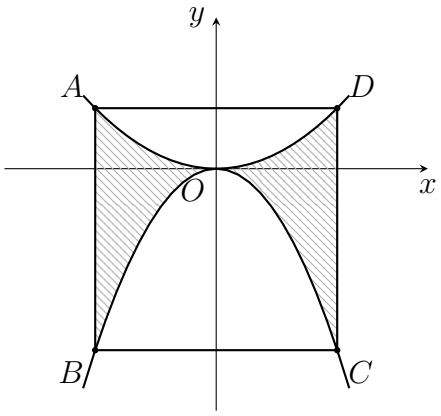
b) **Sai.** Ta có độ cứng S tỉ lệ thuận với tích $w \cdot d^2$. Từ đó, suy ra $S = k \cdot w \cdot d^2$.
Biết $S = 108$ khi $w = 3$ cm $= 0,03$ m và $d = 6$ cm $= 0,06$ m (hoặc tính theo cm tùy đơn vị k), ta tính được $k = 1$ (nếu tính cùng đơn vị). Vậy $S = w \cdot d^2$.

c) **Đúng.** Đây là công thức được suy ra từ các công thức liên quan. Theo công thức $S = wd^2$, và từ $d^2 + w^2 = 576 \Rightarrow d^2 = 576 - w^2$, ta có: $S = w \cdot (576 - w^2) = 576w - w^3$.

d) **Sai.** Xét hàm số $S(w) = -w^3 + 576w$ trên khoảng $(0; 24)$.
Ta có $S'(w) = -3w^2 + 576$. Cho $S'(w) = 0 \Leftrightarrow w^2 = 192 \Leftrightarrow w = 8\sqrt{3}$ (vì $w > 0$).
Lập bảng biến thiên, ta thấy S đạt cực đại tại $w = 8\sqrt{3}$.
Giá trị cực đại là $S_{\max} = S(8\sqrt{3}) = 576 \cdot 8\sqrt{3} - (8\sqrt{3})^3 = 3072\sqrt{3} \approx 5320,86$.
Làm tròn đến hàng đơn vị ta được $S_{\max} = 5321$.

Bài 33. Một công ty thiết kế mẫu huy hiệu như hình vẽ để tặng cho khách hàng thân thiết của mình. Trong đó $ABCD$ là hình vuông có cạnh bằng 4 cm, các đường cong AOD và BOC là một phần của các parabol đỉnh O. Với hệ trục tọa độ Oxy (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là centimet) thì điểm A có tung độ bằng 1. Biết phần tô đậm trong hình vẽ được phủ vàng với chi phí 1 triệu đồng/cm^2, phần còn lại được phủ bạc với chi phí 300 nghìn đồng/cm^2, các chi phí còn lại là 500

nghìn đồng.



a) Parabol chứa đường cong AOD có phương trình là $y = \frac{1}{16}x^2$.

b) Parabol chứa đường cong BOC có phương trình là $y = -\frac{3}{4}x^2$.

c) Diện tích phần tô đậm trong hình vẽ lớn hơn $5,5$ cm^2.

d) Chi phí sản xuất một chiếc huy hiệu như trên nhỏ hơn 9 triệu đồng.

Hướng dẫn giải. Ta có hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 4, điểm A có tung độ bằng 1 và đối xứng qua trục Oy nên $A(-2;1), D(2;1)$. Vì $ABCD$ là hình vuông cạnh 4 nên $B(-2;-3), C(2;-3)$.

a) **Sai.** Gọi phương trình parabol (P_1) chứa đường cong AOD có dạng $y = ax^2$ (do đỉnh là $O(0;0)$).
Vì $D(2;1) \in (P_1) \Rightarrow 1 = a \cdot 2^2 \Rightarrow a = \frac{1}{4}$.
Vậy phương trình đường cong AOD là $y = \frac{1}{4}x^2$.

b) **Đúng.** Gọi phương trình parabol (P_2) chứa đường cong BOC có dạng $y = cx^2$.
Vì $C(2;-3) \in (P_2) \Rightarrow -3 = c \cdot 2^2 \Rightarrow c = \frac{-3}{4}$.
Vậy phương trình đường cong BOC là $y = -\frac{3}{4}x^2$.

c) **Sai.** Diện tích phần tô đậm là diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai parabol từ $x = -2$ đến $x = 2$:

$$S = \int_{-2}^{2} \left(\frac{1}{4}x^2 - \left(-\frac{3}{4}x^2\right)\right) \mathrm{d}x = \int_{-2}^{2} x^2 \mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{2} = \frac{16}{3} \approx 5,33 \text{ cm}^2.$$

Vì $5,33 < 5,5$ nên khẳng định này sai.

d) **Sai.** Diện tích hình vuông $ABCD$ là $S_{hv} = 4^2 = 16$ cm^2.
Diện tích phần không tô đậm (phủ bạc) là: $S_{bc} = 16 - \frac{16}{3} = \frac{32}{3}$ cm^2.
Chi phí sản xuất một chiếc huy hiệu là:

$$T = 1 \cdot \frac{16}{3} + 0,3 \cdot \frac{32}{3} + 0,5 = \frac{16}{3} + \frac{9,6}{3} + 0,5 = \frac{25,6}{3} + 0,5 \approx 9,033 \text{ triệu đồng.}$$

Vì $9,033 > 9$ nên chi phí sản xuất không nhỏ hơn 9 triệu đồng.

Bài 34. Quan sát quá trình sinh trưởng và phát triển của một giống cà chua mới trong 18 tuần kể từ khi trồng, các kĩ sư thuộc một trung tâm giống cây trồng nhận thấy: Chiều cao thân cây sau t tuần kể từ khi trồng được tính xấp xỉ bởi hàm số $h(t) = 50\log_3(2t+1) + 10$ (đơn vị: centimet, $0 \le t \le 18$). Sau 8 tuần kể từ khi trồng, hoa bắt đầu kết trái. Kể từ đó, đường kính trái cà chua ở tuần thứ t xấp xỉ bởi hàm số $d(t) = 3^{\frac{2t-15}{t-7}} - 3$ (đơn vị: centimet, $8 \le t \le 18$).

a) Tốc độ tăng trưởng chiều cao của thân cây cà chua ở tuần thứ 7 (làm tròn đến hàng phần trăm) là $6,07$ (cm/tuần).

b) Khi được 4 tuần tuổi, chiều cao của thân cây cà chua là 110 cm.

c) Sau 4 tuần kể từ khi kết trái, đường kính trái cà chua lớn hơn 9,98 cm.

d) Chiều cao của thân cây cà chua liên tục tăng trong suốt 18 tuần.

Hướng dẫn giải. a) **Đúng.** Ta có $h'(t) = \frac{50\cdot(2t+1)'}{(2t+1)\ln 3} = \frac{100}{(2t+1)\ln 3}$.
Tốc độ tăng trưởng chiều cao của thân cây cà chua ở tuần thứ 7 là: $h'(7) = \frac{100}{(2\cdot 7+1)\ln 3} = \frac{100}{15\ln 3} \approx 6,07$ (cm/tuần).

b) **Đúng.** Khi được 4 tuần tuổi ($t = 4$), chiều cao của thân cây cà chua là: $h(4) = 50\log_3(2\cdot 4+1)+10 = 50\log_3 9+10 = 50\cdot 2+10 = 110$ (cm).

c) **Sai.** Sau 8 tuần kể từ khi trồng, hoa bắt đầu kết trái. Do đó, thời điểm sau 4 tuần kể từ khi kết trái ứng với $t = 8+4 = 12$.
Đường kính trái cà chua tại thời điểm đó là: $d(12) = 3^{\frac{2\cdot 12-15}{12-7}} - 3 = 3^{\frac{9}{5}} - 3 \approx 7,22-3 = 4,22 < 9,98$ (cm).

d) **Đúng.** Ta có $h'(t) = \frac{100}{(2t+1)\ln 3} > 0$ với mọi $t \in (0;18)$.
Vì đạo hàm luôn dương nên hàm số $h(t)$ luôn đồng biến trên khoảng $(0;18)$, hay chiều cao của thân cây cà chua liên tục tăng trong suốt 18 tuần.

Bài 35. Cho hàm số $y = \frac{x^2+3x+6}{x+1}$.

a) Đạo hàm của hàm số là $y' = \frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}, \forall x \neq -1$.

b) Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là $(1;5)$.

c) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3;1)$.

d) Tổng khoảng cách từ các điểm cực trị của đồ thị hàm số đến trục hoành bằng 2.

Hướng dẫn giải. a) **Đúng.** Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$.
Đạo hàm của hàm số là $y' = \frac{(2x+3)(x+1)-(x^2+3x+6)}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}, \forall x \neq -1$.

b) **Đúng.** $y' = 0 \Leftrightarrow x^2+2x-3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -3 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	-3	↘	$+\infty$	↘	5	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là $(1;5)$.

c) **Sai.** Theo bảng biến thiên, hàm số nghịch biến trên từng khoảng $(-3;-1)$ và $(-1;1)$. Khẳng định hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3;1)$ là sai vì hàm số không liên tục và không xác định tại $x = -1$.

d) **Sai.** Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là $A(1;5)$ và $B(-3;-3)$.
Khoảng cách từ các điểm cực trị đến trục hoành Ox lần lượt là:

$$d(A,Ox) = |y_A| = |5| = 5,$$

$$d(B,Ox) = |y_B| = |-3| = 3.$$

Tổng khoảng cách là: $5+3=8$.
Vậy khẳng định tổng khoảng cách bằng 2 là sai.

Bài 36. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ với a,b,c đều dương.

a) Mặt phẳng (ABC) đi qua điểm $M(2;-2;3)$ sao cho độ dài OA,OB,OC theo thứ tự lập thành cấp số cộng có công sai bằng 2. Khoảng cách từ điểm $D(1;1;1)$ tới mặt phẳng (ABC) bằng $\frac{m}{n}$ với $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Khi đó $T=m+n=8$.

b) Mặt phẳng (ABC) có phương trình $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

c) Mặt phẳng (ABC) đi qua điểm $H(1;1;1)$ sao cho H là trực tâm tam giác ABC là $x+y+z-3=0$.

d) Mặt phẳng (ABC) đi qua điểm $G(1;2;3)$ sao cho G là trọng tâm tam giác ABC là $6x+3y+2z+18=0$.

Hướng dẫn giải. Vì $a,b,c>0$ nên $OA=a,OB=b,OC=c$. Mặt phẳng (ABC) đi qua ba điểm nằm trên ba trục tọa độ nên có phương trình theo đoạn chắn là: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

a) **Đúng.** Do OA,OB,OC lập thành cấp số cộng công sai $d=2$ nên $b=a+2$ và $c=a+4$.
Mặt phẳng (ABC) đi qua $M(2;-2;3)$ nên: $\frac{2}{a}-\frac{2}{a+2}+\frac{3}{a+4}=1\Leftrightarrow\frac{2(a+2)-2a}{a(a+2)}+\frac{3}{a+4}=1\Leftrightarrow\frac{4}{a(a+2)}+\frac{3}{a+4}=1$
$\Leftrightarrow 4(a+4)+3a(a+2)=a(a+2)(a+4)\Leftrightarrow a^3+3a^2-2a-16=0\Leftrightarrow(a-2)(a^2+5a+8)=0$.
Vì $a>0$ nên $a=2$. Suy ra $b=4,c=6$.
Phương trình $(ABC):\frac{x}{2}+\frac{y}{4}+\frac{z}{6}=1\Leftrightarrow 6x+3y+2z-12=0$.
Khoảng cách $d(D,(ABC))=\frac{|6\cdot1+3\cdot1+2\cdot1-12|}{\sqrt{6^2+3^2+2^2}}=\frac{1}{\sqrt{49}}=\frac{1}{7}$.
Do đó $m=1,n=7\Rightarrow T=m+n=8$.

b) **Đúng.** Theo lý thuyết phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn.

c) **Đúng.** Trong tứ diện $OABC$ có các cạnh OA,OB,OC đôi một vuông góc, trực tâm H của tam giác đáy ABC chính là hình chiếu vuông góc của đỉnh O lên mặt phẳng (ABC).
Do đó $\overrightarrow{OH}=(1;1;1)$ là một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC).
Phương trình mặt phẳng (ABC) đi qua $H(1;1;1)$ là: $1(x-1)+1(y-1)+1(z-1)=0\Leftrightarrow x+y+z-3=0$.

d) **Sai.** $G(1;2;3)$ là trọng tâm tam giác $ABC\Rightarrow\begin{cases}a/3=1\\b/3=2\\c/3=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=3\\b=6\\c=9\end{cases}$.
Phương trình mặt phẳng $(ABC):\frac{x}{3}+\frac{y}{6}+\frac{z}{9}=1\Leftrightarrow 6x+3y+2z-18=0$.
Đối chiếu với đề bài $6x+3y+2z+18=0$, ta thấy sai dấu của hệ số tự do.

Bài 37. Một công ty bất động sản thực hiện cuộc khảo sát khách hàng xem họ có nhu cầu mua ở mức giá nào cho một căn nhà, để tiến hành dự án xây dựng khu đô thị mới sắp tới. Kết quả khảo sát 500 khách hàng được ghi lại ở bảng sau:

Mức giá (triệu đồng) $/m^2$	$[10;14)$	$[14;18)$	$[18;22)$	$[22;26)$	$[26;30)$
Số khách hàng	75	105	197	80	43

a) Phương sai xấp xỉ $20,52$.

b) Biết rằng công ty sẽ xây dựng phân khúc nhà giá rẻ cho 25% số khách hàng có nhu cầu mua

ở mức giá thấp nhất theo khảo sát, xây dựng phân khúc nhà giá cao cấp cho 25% số khách hàng có nhu cầu mua ở mức giá cao nhất theo khảo sát. Tuy nhiên trước hết sẽ ưu tiên xây dựng phân khúc nhà tầm trung hướng tới 50% số khách hàng còn lại. Khi đó theo khảo sát, độ chênh lệch giá cao nhất và giá thấp nhất (đúng đến hàng phần mười, đơn vị triệu đồng) dành cho phân khúc nhà tầm trung là $6,1$ triệu.

c) Tứ phân vị thứ ba là 25.

d) Độ dài mỗi nhóm là 4.

Hướng dẫn giải. Tổng số khách hàng khảo sát là $n = 75 + 105 + 197 + 80 + 43 = 500$. Giá trị trung tâm của các nhóm lần lượt là: $x_1 = 12, x_2 = 16, x_3 = 20, x_4 = 24, x_5 = 28$.

a) **Đúng.** Số trung bình: $\bar{x} = \frac{75\cdot 12+105\cdot 16+197\cdot 20+80\cdot 24+43\cdot 28}{500} = \frac{9644}{500} = 19,288$. Phương sai: $s^2 = \frac{1}{500}[75\cdot 12^2 + 105\cdot 16^2 + 197\cdot 20^2 + 80\cdot 24^2 + 43\cdot 28^2] - (19,288)^2$ $s^2 = 392,544 - 372,026944 = 20,517056 \approx 20,52$.

b) **Đúng.** Phân khúc nhà tầm trung dành cho 50% khách hàng ở giữa, tương ứng với khoảng từ tứ phân vị thứ nhất Q_1 đến tứ phân vị thứ ba Q_3. - Tìm Q_1: Ta có $\frac{n}{4} = 125$. Nhóm chứa Q_1 là $[14;18)$. $Q_1 = 14 + \frac{125-75}{105}\cdot 4 \approx 15,9$. - Tìm Q_3: Ta có $\frac{3n}{4} = 375$. Nhóm chứa Q_3 là $[18;22)$. $Q_3 = 18 + \frac{375-180}{197}\cdot 4 \approx 21,96$. Độ chênh lệch: $Q_3 - Q_1 = 21,96 - 15,9 = 6,06 \approx 6,1$ (triệu đồng).

c) **Sai.** Theo tính toán ở câu b, $Q_3 \approx 21,96 \neq 25$.

d) **Đúng.** Độ dài mỗi nhóm (hệ số h) là khoảng cách giữa hai đầu mút của nhóm: $14 - 10 = 18 - 14 = \cdots = 4$.

Bài 38. Một quần thể vi khuẩn (A) có số lượng cá thể là $P(t)$ sau t phút quan sát được phát hiện thay đổi với tốc độ là $P'(t) = ae^{0,1t} + 150e^{-0,03t}$ (vi khuẩn/phút) $(a \in \mathbb{R})$. Biết rằng lúc bắt đầu quan sát, quần thể có 200 000 vi khuẩn và đạt tốc độ tăng trưởng là 350 vi khuẩn/phút. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) Giá trị của $a = 200$.

b) $P(t) = 2000e^{0,1t} - 5000e^{-0,03t} + 200\,000$.

c) Sau 12 phút số lượng vi khuẩn trong quần thể là 206 152 con (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

d) Sau 12 phút, một quần thể vi khuẩn (B) có tốc độ tăng trưởng là $G'(t) = 500e^{0,2t}$ (vi khuẩn/phút) bắt đầu cạnh tranh nguồn thức ăn trực tiếp với quần thể (A), một cá thể tại quần thể (B) triệt tiêu một cá thể tại quần thể (A). Sau 5 phút cạnh tranh quần thể (A) bị triệt tiêu hoàn toàn. Số lượng vi khuẩn của quần thể (B) ở thời điểm bắt đầu cạnh tranh là 191 967 con (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Hướng dẫn giải. a) **Đúng.**

Tại $t = 0$, ta có $P'(0) = 350 \Leftrightarrow a\cdot e^0 + 150\cdot e^0 = 350 \Leftrightarrow a + 150 = 350 \Leftrightarrow a = 200$.

b) **Sai.**

Ta có:

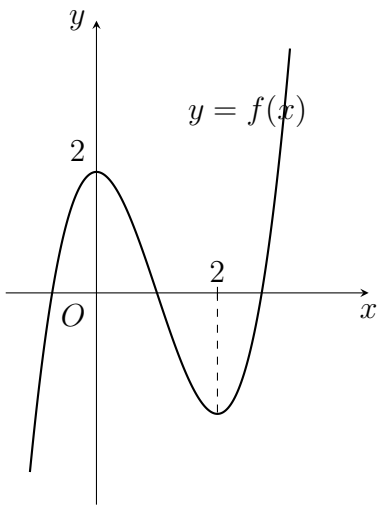
$$P(t) = \int P'(t)\mathrm{d}t = \int \left(200e^{0,1t} + 150e^{-0,03t}\right)\mathrm{d}t$$
$$= \frac{200}{0,1}e^{0,1t} - \frac{150}{0,03}e^{-0,03t} + C$$
$$= 2000e^{0,1t} - 5000e^{-0,03t} + C.$$

Tại $t=0$, ta có $P(0)=200\,000 \Leftrightarrow 2000-5000+C=200\,000 \Leftrightarrow C=203\,000$.
Vậy $P(t)=2000e^{0,1t}-5000e^{-0,03t}+203\,000$.

c) **Đúng.**
Số lượng vi khuẩn sau 12 phút là:
$P(12)=2000e^{0,1\cdot 12}-5000e^{-0,03\cdot 12}+203\,000=2000e^{1,2}-5000e^{-0,36}+203\,000\approx 206\,152$.

d) **Sai.**
Sau 5 phút từ khi quần thể (B) xuất hiện (tức là tại thời điểm $t=12+5=17$ phút), số lượng vi khuẩn của quần thể (A) là:
$P(17)=2000e^{1,7}-5000e^{-0,51}+203\,000\approx 210\,945$ con.
Gọi $G(t)$ là số lượng vi khuẩn quần thể (B) tính từ lúc bắt đầu cạnh tranh (t là số phút kể từ phút thứ 12).
Ta có số lượng vi khuẩn của quần thể (B) là:
$G(t)=\displaystyle\int G'(t)\mathrm{d}t=\int 500e^{0,2t}\mathrm{d}t=2500e^{0,2t}+C$.
Vì sau 5 phút cạnh tranh, quần thể (A) bị triệt tiêu hoàn toàn nên số lượng vi khuẩn (B) lúc này phải bằng số lượng vi khuẩn (A) tại thời điểm đó, tức là:
$G(5)=P(17) \Rightarrow 2500e^{0,2\cdot 5}+C=210\,945 \Leftrightarrow 2500e+C=210\,945 \Rightarrow C\approx 204\,149$.
Vậy số lượng vi khuẩn của quần thể (B) ban đầu (tại thời điểm bắt đầu cạnh tranh) là:
$G(0)=2500e^{0}+204\,149=2500+204\,149=206\,649$ vi khuẩn.

Bài 39. Cho hàm số $y=f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ có đồ thị như hình vẽ.



a) Hàm số $y=f(x)$ có hai điểm cực trị là 0 và 2.

b) Giá trị b bằng 0.

c) Giá trị $c=-2$.

d) $f(x)=x^3-6x^2+2$.

Hướng dẫn giải.

Dựa vào đồ thị, ta thấy hàm số đạt cực đại tại $x=0$, giá trị cực đại $f(0)=2$. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=2$.

a) **Đúng.** Hàm số có hai điểm cực trị là $x=0$ và $x=2$.

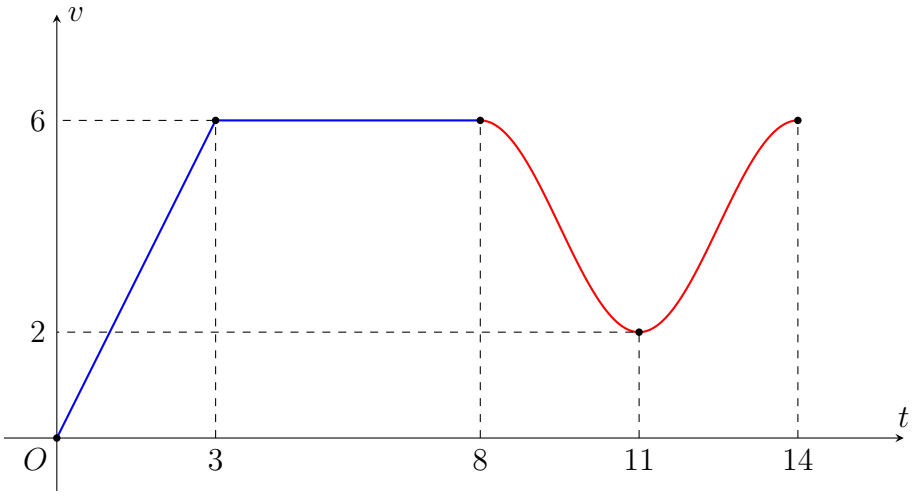
b) **Đúng.** Ta có $f'(x)=3x^2+2ax+b$. Vì $x=0$ và $x=2$ là hai nghiệm của phương trình

$f'(x)=0$ nên: $\begin{cases} f'(0)=0 \\ f'(2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=0 \\ 12+4a+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=0 \\ a=-3 \end{cases}$.

c) **Sai.** Đồ thị đi qua điểm $(0;2)$ nên $f(0)=c=2$. Khẳng định $c=-2$ là sai.

d) **Sai.** Với $a=-3, b=0, c=2$, ta có hàm số chuẩn là $f(x)=x^3-3x^2+2$.

Bài 40. Một vật bắt đầu chuyển động trên trục Ox với đồ thị vận tốc theo thời gian $v(t)$ được mô tả như hình vẽ. Biết rằng từ giây thứ 11 đến giây thứ 14 thì đồ thị có dạng hình sin và vận tốc của vật được biểu diễn bởi phương trình $v(t)=a+b\cos\left[\frac{\pi}{3}(t-8)\right]$.



Các khẳng định sau đây Đúng hay Sai?

a) Quãng đường vật đi được trong 3 giây đầu tiên là 9 m.

b) Biểu thức vận tốc của vật trong khoảng thời gian $t\in[8;14]$ là $v(t)=4+2\cos\left[\frac{\pi}{3}(t-8)\right]$.

c) Tổng quãng đường vật đi được trong 14 giây là 63 m.

d) Quãng đường vật đi được trong 10 giây đầu tiên là $48,7$ m (Kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

Hướng dẫn giải. Dựa vào đồ thị vận tốc $v(t)$, ta chia bài toán thành các giai đoạn:

a) Đúng.

Trong 3 giây đầu ($t\in[0;3]$), đồ thị là đoạn thẳng đi qua $(0;0)$ và $(3;6)$, có phương trình $v(t)=2t$. Quãng đường đi được là diện tích tam giác hoặc tính bằng tích phân:

$$S_1=\int_0^3 2t\,dt=t^2\big|_0^3=9 \text{ (m)}.$$

b) Đúng.

Trong khoảng $t\in[8;14]$, hàm số có dạng $v(t)=a+b\cos\left[\frac{\pi}{3}(t-8)\right]$.

Dựa vào đồ thị ta thấy:

- Tại $t=8$, $v(8)=6\Rightarrow a+b\cos(0)=6\Leftrightarrow a+b=6$.
- Tại $t=11$, $v(11)=2\Rightarrow a+b\cos\left[\frac{\pi}{3}(11-8)\right]=2\Leftrightarrow a+b\cos(\pi)=2\Leftrightarrow a-b=2$.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} a+b=6 \\ a-b=2 \end{cases} \Rightarrow a=4, b=2$.

Vậy $v(t) = 4 + 2\cos\left[\frac{\pi}{3}(t-8)\right]$ với $t \in [8;14]$.

c) Đúng.

Quãng đường trong 14 giây là $S = S_1 + S_2 + S_3$:

- $S_1 = 9$ m (từ giây 0 đến 3).
- $S_2 = 6 \cdot (8-3) = 30$ m (giai đoạn chuyển động thẳng đều $v = 6$ từ giây 3 đến 8).
- $S_3 = \int_8^{14} \left(4 + 2\cos\left[\frac{\pi}{3}(t-8)\right]\right) dt = \left(4t + \frac{6}{\pi}\sin\left[\frac{\pi}{3}(t-8)\right]\right)\Big|_8^{14} = 56 - 32 = 24$ m.

Tổng quãng đường: $S = 9 + 30 + 24 = 63$ m.

d) Đúng.

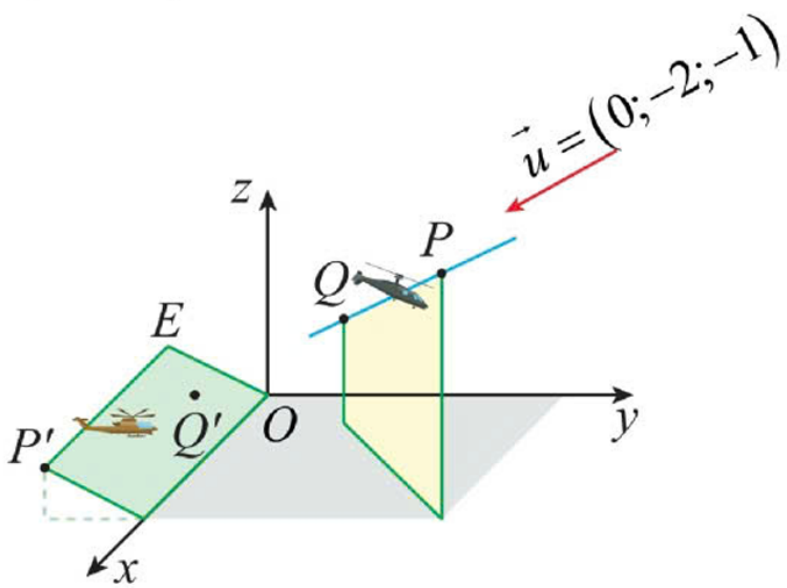
Quãng đường trong 10 giây đầu tiên là:

$$S_{10} = S_1 + S_2 + \int_8^{10} \left(4 + 2\cos\left[\frac{\pi}{3}(t-8)\right]\right) dt$$

$$S_{10} = 39 + \left(4t + \frac{6}{\pi}\sin\left[\frac{\pi}{3}(t-8)\right]\right)\Big|_8^{10} = 39 + \left(40 + \frac{6}{\pi}\sin\frac{2\pi}{3}\right) - (32+0)$$

$$S_{10} = 47 + \frac{3\sqrt{3}}{\pi} \approx 48,6539 \approx 48,7 \text{ (m)}.$$

Bài 41. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, mặt đất trùng với mặt phẳng (Oxy), trục Oz hướng lên. Một máy bay trực thăng đang tiếp cận và hạ cánh trên một sườn đồi, sườn đồi được coi là một mặt phẳng nghiêng có phương trình $(E) : y + 2z = 0$. Máy bay đi thẳng đều từ vị trí $P(16;16;16)$ và hạ cánh trên sườn đồi tại điểm $H(4;-2;1)$ (đơn vị mỗi trục là 100m). Ánh sáng mặt trời song song theo hướng vectơ $\vec{u} = (0;-2;-1)$ tạo ra bóng của máy bay trên sườn đồi. Biết bóng của máy bay này di động với tốc độ 30 m/s.



a) Phương trình đường thẳng PH là

$$\frac{x+16}{4} = \frac{y+16}{6} = \frac{z+16}{5}.$$

b) Khi máy bay ở điểm P bóng của nó trên sườn đồi là $P'(16;-8;4)$.

c) Khi bóng của máy bay trên sườn đồi có tọa độ $(12;-6;3)$ thì máy bay cách mặt đất 1100 mét.

d) Tốc độ di chuyển của máy bay lớn hơn 50 m/s.

Hướng dẫn giải. **a) Mệnh đề Sai.**

Vectơ chỉ phương của đường thẳng PH là $\overrightarrow{PH} = (4-16;-2-16;1-16) = (-12;-18;-15) = -3(4;6;5)$.

Phương trình chính tắc đúng của PH đi qua $P(16;16;16)$ là: $\dfrac{x-16}{4} = \dfrac{y-16}{6} = \dfrac{z-16}{5}$.

Đề bài ghi $x+16, y+16, z+16$ là sai dấu của tọa độ điểm P.

b) Mệnh đề Đúng.

Đường thẳng đi qua $P(16;16;16)$ và song song với $\vec{u}(0;-2;-1)$ có phương trình: $\begin{cases} x = 16 \\ y = 16-2t \\ z = 16-t \end{cases}$.

Thay vào phương trình mặt phẳng $(E): y+2z=0$, ta có: $(16-2t)+2(16-t)=0 \Leftrightarrow 48-4t=0 \Leftrightarrow t=12$.

Tọa độ điểm P' là: $x=16; y=16-2(12)=-8; z=16-12=4$. Vậy $P'(16;-8;4)$.

c) Mệnh đề Đúng.

Gọi $Q(x;y;z)$ là vị trí máy bay. Bóng $Q'(12;-6;3)$ thuộc (E).

Vì $\overrightarrow{QQ'} // \vec{u} \Rightarrow \begin{cases} x = 12 \\ y = -6+2t \\ z = 3+t \end{cases}$.

Q thuộc đường thẳng $PH \Rightarrow \dfrac{12-16}{4} = \dfrac{-6+2t-16}{6} \Rightarrow -1 = \dfrac{2t-22}{6} \Rightarrow t = 8$.

Khi $t=8$, cao độ máy bay là $z = 3+8 = 11$. Khoảng cách tới mặt đất $(z=0)$ là $11 \times 100 = 1100$ m.

d) Mệnh đề Đúng.

Vận tốc máy bay v_m và vận tốc bóng v_b liên hệ qua tỉ lệ quãng đường: $v_m = v_b \cdot \dfrac{PH}{P'H}$.

Ta có: $PH = \sqrt{12^2+18^2+15^2} = 3\sqrt{77} \approx 26,3$.

$P'H = \sqrt{(4-16)^2+(-2+8)^2+(1-4)^2} = \sqrt{12^2+6^2+3^2} = 3\sqrt{21} \approx 13,7$.

$v_m = 30 \cdot \dfrac{3\sqrt{77}}{3\sqrt{21}} = 30\sqrt{\dfrac{11}{3}} \approx 57,4$ m/s.

Kết quả $57,4 > 50$, nên mệnh đề đúng.

Bài 42. 3. Hưng có một đồng xu không cân đối, mà khả năng xuất hiện mặt sấp là 60% và một con xúc xắc không cân đối, mà khả năng xuất hiện mặt 1 chấm nhiều gấp đôi so với các mặt còn lại. An gieo đồng xu và quan sát mặt xuất hiện. Nếu mặt xuất hiện là mặt sấp thì An gieo con xúc xắc 2 lần liên tiếp. Nếu mặt xuất hiện là mặt ngửa thì An gieo con xúc xắc 1 lần.

Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

a) Xác suất của biến cố: "Con xúc xắc xuất hiện mặt 1 chấm" là $\dfrac{2}{7}$.

b) Biết rằng Hưng gieo đồng xu ra mặt sấp, xác suất để Hưng gieo con xúc xắc xuất hiện mặt 1 chấm bằng $\dfrac{24}{49}$.

c) Xác suất để Hưng tung con xúc xắc có mặt 1 chấm bằng 42% (*làm tròn đến hàng đơn vị*).

d) Biết rằng Hưng gieo xúc xắc xuất hiện mặt 1 chấm. Khi đó, xác suất của biến cố: "Đồng xu xuất hiện mặt sấp" là 28%.

Hướng dẫn giải. a) Gọi xác suất đổ trúng mặt 1 chấm là $2p$, suy ra xác suất đổ được các mặt còn lại là p.

Ta có: $2p + 5p = 1 \Rightarrow p = \dfrac{1}{7} \Rightarrow 2p = \dfrac{2}{7}$.

Suy ra xác suất ra mặt 1 chấm là $\dfrac{2}{7}$.

Khẳng định a) ĐÚNG.

b) Gọi A là biến cố "Đồng xu ra sấp" và B là biến cố "Gieo xúc xắc xuất hiện mặt 1 chấm"

$P(A) = 0,6$ và $P(B) = \dfrac{2}{7}$

Biết rằng Hưng gieo đồng xu ra mặt sấp, thì xác suất để Hưng gieo con xúc xắc xuất hiện mặt 1 chấm là xác suất để ít nhất 1 trong 2 lần gieo ra mặt 1 chấm:

$P(B|A) = 1 - P(\bar{B})^2 = 1 - \left(\dfrac{5}{7}\right)^2 = \dfrac{24}{49}$.

Khẳng định b) ĐÚNG.

c) Gọi biến cố "Hưng tung xúc xắc có mặt 1 chấm" là $P(X)$

Xác suất Hưng tung xúc xắc có mặt 1 chấm khi tung được mặt sấp đồng xu là:

$P(AB) = P(A) \cdot P(B|A) = 0,6 \cdot \dfrac{24}{49} = \dfrac{72}{245}$

Khi tung được mặt ngửa là:

$P(\bar{A}B) = P(\bar{A}) \cdot P(B|\bar{A}) = 0,4 \cdot \dfrac{2}{7} = \dfrac{4}{35}$

Vậy xác suất Hưng tung được mặt 1 chấm là:

$P(C) = P(\bar{A}B) + P(AB) = \dfrac{72}{245} + \dfrac{4}{35} = \dfrac{20}{49} \approx 41\%$

Khẳng định c) SAI.

d) Ta có:

$P(A|C) = \dfrac{P(C|A) \cdot P(A)}{P(C)} = \dfrac{\frac{24}{49} \cdot 0,6}{\frac{20}{49}} = 0,72.$

Khẳng định d) SAI.

Bài 43. Sau khi bệnh nhân uống một liều thuốc, lượng thuốc còn lại trong cơ thể giảm dần theo công thức $D(t) = D_0 \cdot a^t$ (mg), trong đó D_0 là lượng thuốc ban đầu bệnh nhân uống và a là hằng số dương, t là thời gian tính bằng giờ kể từ thời điểm uống thuốc. Biết ban đầu, bệnh nhân đã uống 100 mg thuốc và sau 1 giờ thì lượng thuốc trong cơ thể còn 80 mg.

Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

a) $D_0 = 80$.

b) $a = 0,8$.

c) Sau 5 giờ, lượng thuốc còn lại trong cơ thể là $40,96$ (mg).

d) Nếu sau 5 giờ, lượng thuốc giảm đi $m\%$ so với lượng thuốc ban đầu thì giá trị của m là $76,2\%$ (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

Hướng dẫn giải. **a) Sai.**

Vì bệnh nhân đã uống 100 mg thuốc nên lượng thuốc ban đầu bệnh nhân uống là $D_0 = 100$.

Suy ra $D(t) = 100 \cdot a^t$.

b) Đúng.

Từ giả thiết: "sau 1 giờ thì lượng thuốc trong cơ thể còn 80 mg" ta có:

$D(1) = 80 \Leftrightarrow 100 \cdot a^1 = 80 \Leftrightarrow a = \dfrac{80}{100} = 0,8.$

Suy ra $D(t) = 100 \cdot 0,8^t$ (mg).

c) Sai.

Sau 5 giờ, lượng thuốc còn lại trong cơ thể là:

$D(5) = 100 \cdot 0,8^5 = 32,768$ (mg).

d) Sai.

Từ phần c) ta thu được lượng thuốc còn lại trong cơ thể sau 5 giờ là $D(5) = 32,768$ (mg).

Suy ra $m\% = \dfrac{100 - 32,768}{100} \cdot 100\% = 67,232\%.$

Vậy $m \approx 67,2$.

Bài 44. Một người có 5 con gà mái, 2 con gà trống nhốt chung trong một cái lồng. Một người đến mua, người bán gà bắt ngẫu nhiên 1 con. Người mua chấp nhận mua con gà đó, người bán gà quên mất rằng con gà bán cho người thứ nhất là gà trống hay gà mái.

Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

a) Xác suất để người thứ nhất mua được con gà mái là $\dfrac{5}{7}$.

b) Người thứ hai lại đến mua gà, người bán gà lại bắt ngẫu nhiên ra 1 con, xác suất để người thứ hai mua được con gà trống khi người thứ nhất mua được một con gà mái là $\dfrac{1}{3}$.

c) Xác suất để người thứ hai mua được gà trống bằng $\dfrac{3}{7}$.

d) Biết người thứ hai mua được gà trống, xác suất con gà mà người thứ nhất mua cũng là gà trống là $\dfrac{1}{6}$.

Hướng dẫn giải. **a) Đúng.**

Số gà trong lồng ban đầu là $5 + 2 = 7$ con.

Xác suất để người thứ nhất mua được con gà mái là $P(B) = \dfrac{5}{7}$.

b) Đúng.

Nếu người thứ nhất mua được một con gà mái, trong lồng còn lại 4 gà mái và 2 gà trống (tổng 6 con).

Xác suất để người thứ hai mua được con gà trống khi đó là $P(A|B) = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$.

c) Sai.

Gọi A là biến cố: "Người thứ hai mua được gà trống".

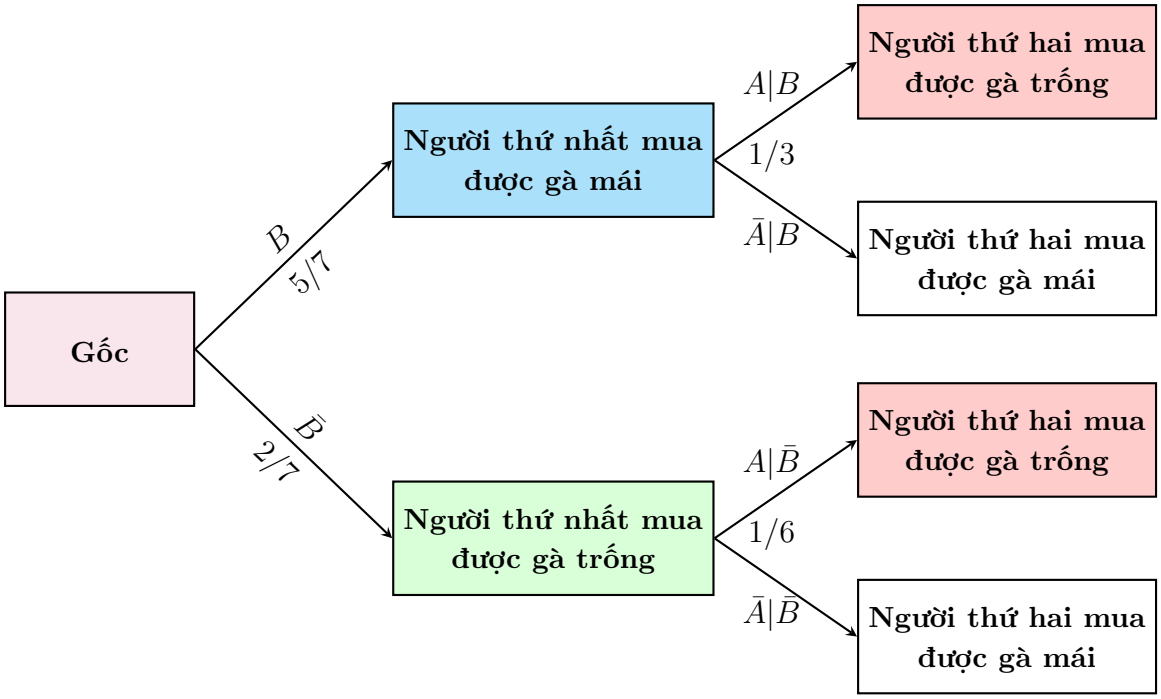
Gọi B là biến cố: "Người thứ nhất mua được gà mái".

Khi đó $\bar{B}$ là biến cố: "Người thứ nhất mua được gà trống".

Ta có: $P(B) = \dfrac{5}{7}$; $P(\bar{B}) = \dfrac{2}{7}$.

Nếu người thứ nhất mua gà trống ($\bar{B}$), trong lồng còn 5 gà mái và 1 gà trống. Khi đó $P(A|\bar{B}) = \dfrac{1}{6}$.

Ta có sơ đồ cây sau:



Áp dụng công thức xác suất toàn phần, ta có:

$$P(A) = P(B)P(A|B) + P(\bar{B})P(A|\bar{B}) = \frac{5}{7} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{21} + \frac{1}{21} = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}.$$

Vậy khẳng định c) là sai.

d) Đúng.

Yêu cầu bài toán là tính $P(\bar{B}|A)$. Theo công thức Bayes, ta có:

$$P(\bar{B}|A) = \frac{P(\bar{B}) \cdot P(A|\bar{B})}{P(A)} = \frac{\frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6}}{\frac{2}{7}} = \frac{1}{6}.$$

Bài 45. Lưu lượng nước chảy của một con sông trong 15 phút đầu tiên sau khi bắt đầu một cơn mưa lớn được mô hình hóa bằng hàm đa thức bậc ba $L(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$ (đơn vị m^3/phút, t tính bằng phút và $0 \le t \le 15$, a, b, c, d là các hằng số thực). Tại thời điểm bắt đầu mưa ($t = 0$), lưu lượng nước chảy là 200 m^3/phút và sau 10 phút thì đạt mức lớn nhất bằng 400 m^3/phút. Cảnh báo sẽ phát ra nếu lưu lượng nước chảy đạt từ 300 m^3/phút trở lên. Biết rằng thời điểm bắt đầu phát ra cảnh báo là sau 4 phút tính từ lúc bắt đầu mưa.

Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

a) $d = 200$.

b) $L'(10) = 300a + 20b + c = 0$.

c) Giá trị của b lớn hơn 2.

d) Khoảng thời gian phát ra cảnh báo là 10,8 phút (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

Hướng dẫn giải. **a) Đúng.**

Từ dữ kiện: "Tại thời điểm bắt đầu mưa ($t = 0$), lưu lượng nước chảy là 200 m^3/phút" ta có:
$L(0) = 200 \Rightarrow d = 200$.
Suy ra $L(t) = at^3 + bt^2 + ct + 200$.

b) Đúng.

$L'(t) = 3at^2 + 2bt + c$.

Từ dữ kiện: "sau 10 phút thì đạt mức lớn nhất bằng 400 m^3/phút" vì $t = 10$ không phải điểm đầu mút, do đó khi lưu lượng đạt mức lớn nhất tại $t = 10$ thì đây sẽ phải là điểm cực đại của đồ thị hàm số $L(t)$.

Nên ta có: $L'(10) = 0 \Leftrightarrow 3a \cdot 10^2 + 2b \cdot 10 + c = 0 \Leftrightarrow 300a + 20b + c = 0 \quad (1)$.

c) Sai.

Từ giả thiết: "sau 10 phút thì đạt mức lớn nhất bằng 400 m^3/phút" ta có $L(10) = 400$:

$\Leftrightarrow a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + 200 = 400 \Leftrightarrow 1000a + 100b + 10c = 200 \Leftrightarrow 100a + 10b + c = 20 \quad (2)$.

Lại có: "Cảnh báo sẽ phát ra nếu lưu lượng nước chảy đạt từ 300 m^3/phút trở lên. Biết rằng thời điểm bắt đầu phát ra cảnh báo là sau 4 phút" tức tại thời điểm $t = 4$ thì lưu lượng nước chảy bằng 300 m^3/phút $\Rightarrow L(4) = 300$:

$\Leftrightarrow a \cdot 4^3 + b \cdot 4^2 + c \cdot 4 + 200 = 300 \Leftrightarrow 64a + 16b + 4c = 100 \Leftrightarrow 16a + 4b + c = 25 \quad (3)$.

Từ $(1), (2), (3)$ ta có hệ phương trình: $\begin{cases} 300a + 20b + c = 0 \\ 100a + 10b + c = 20 \\ 16a + 4b + c = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{7}{36} \\ b = \dfrac{17}{9} \\ c = \dfrac{185}{9} \end{cases}$.

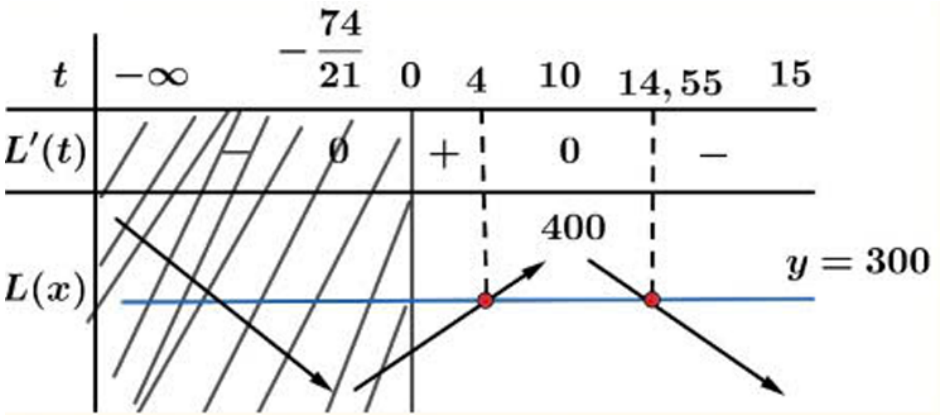
Vậy $b = \dfrac{17}{9} \approx 1,89 < 2$.

d) Sai.

Phương trình $L(t) = 300 \Leftrightarrow -\dfrac{7}{36}t^3 + \dfrac{17}{9}t^2 + \dfrac{185}{9}t + 200 = 300$.

$\Leftrightarrow -\dfrac{7}{36}t^3 + \dfrac{17}{9}t^2 + \dfrac{185}{9}t - 100 = 0$.

Giải phương trình trên đoạn $[0; 15]$ ta thu được các nghiệm: $t = 4$ và $t \approx 14,55$.

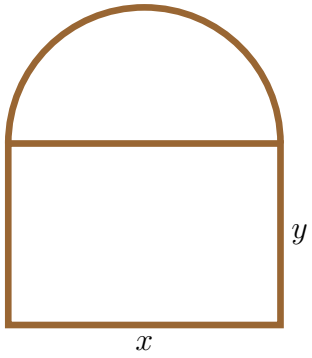


Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $L(t)$ trên $[0; 15]$ (với cực đại tại $t = 10$), ta thấy $L(t) \geq 300 \Leftrightarrow t \in [4; 14,55]$.

Suy ra khoảng thời gian phát ra cảnh báo là $14,55 - 4 = 10,55 \approx 10,6$ phút.

Bài 46. Để làm một cửa sổ có dạng một hình bán nguyệt và một hình chữ nhật ghép lại như hình vẽ bên dưới, người ta dùng 8 m dây thép để làm các đường viền. Gọi x, y là độ dài cạnh của

khung hình chữ nhật.



a) Chiều dài dây để uốn ra bán nguyệt là $\dfrac{\pi x}{2}$.

b) Giá trị của y tính theo x là $4-\dfrac{x(4+\pi)}{4}$.

c) Diện tích của cửa sổ là $S=4x-x^2$.

d) Khi diện tích của cửa sổ lớn nhất thì $y=\dfrac{16}{8+\pi}$.

Hướng dẫn giải. **a) Đúng**

Bán kính của hình bán nguyệt là $R=\dfrac{x}{2}$.

Chu vi nửa hình tròn (bán nguyệt) là: $L_{bn}=\pi R=\dfrac{\pi x}{2}$. Vậy khẳng định a đúng.

b) Đúng

Tổng chiều dài dây thép làm các đường viền bao gồm: 2 cạnh đáy (mỗi cạnh x), 2 cạnh bên (mỗi cạnh y) và nửa chu vi hình tròn.

Ta có: $2x+2y+\dfrac{\pi x}{2}=8\Leftrightarrow 2y=8-2x-\dfrac{\pi x}{2}\Leftrightarrow y=4-x-\dfrac{\pi x}{4}=4-\dfrac{x(4+\pi)}{4}$.

Vậy khẳng định b đúng.

c) Sai

Diện tích cửa sổ gồm diện tích hình chữ nhật và diện tích nửa hình tròn:

$$S=S_{hcn}+S_{nt}=x\cdot y+\frac{1}{2}\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2=x\left(4-x-\frac{\pi x}{4}\right)+\frac{\pi x^2}{8}$$

$$S=4x-x^2-\frac{\pi x^2}{4}+\frac{\pi x^2}{8}=4x-x^2-\frac{\pi x^2}{8}=-\left(1+\frac{\pi}{8}\right)x^2+4x.$$

Vậy khẳng định c sai.

d) Đúng

Xét hàm diện tích $S(x)=-\left(1+\dfrac{\pi}{8}\right)x^2+4x$. Đạo hàm: $S'(x)=-2\left(1+\dfrac{\pi}{8}\right)x+4$.

Cho $S'(x)=0\Leftrightarrow\left(\dfrac{8+\pi}{4}\right)x=4\Leftrightarrow x=\dfrac{16}{8+\pi}$.

Bảng biến thiên:

x	0		$\frac{16}{8+\pi}$		$\frac{32}{8+\pi}$
S'		$+$	0	$-$	
S	0	↗	$\frac{32}{8+\pi}$	↘	0

Từ bảng biến thiên, S đạt giá trị lớn nhất tại $x = \dfrac{16}{8+\pi}$.

Thay vào công thức tính y: $y = 4 - \dfrac{16}{8+\pi} - \dfrac{\pi}{4} \cdot \dfrac{16}{8+\pi} = 4 - \dfrac{16}{8+\pi} - \dfrac{4\pi}{8+\pi} = \dfrac{32+4\pi-16-4\pi}{8+\pi} = \dfrac{16}{8+\pi}$.

Vậy khẳng định d đúng.

Bài 47. Một viên muối hình cầu có đường kính 8 cm đang tan trong nước với tốc độ giảm thể tích tại bất kỳ thời điểm nào tỷ lệ thuận với diện tích bề mặt quả cầu tại thời điểm đó. Sau 30 giây thì viên muối tan được một nửa. Gọi $V(t)$ và $r(t)$ lần lượt là thể tích và bán kính của viên muối sau t phút.

a) Thể tích của viên muối sau t phút là $V(t) = \dfrac{4}{3}\pi r^3(t)$.

b) Tốc độ giảm thể tích của viên muối là $V'(t) = k\pi r^2(t)$ với k là hằng số.

c) Giá trị của $k = -4$.

d) Sau 45 giây thì thể tích của viên muối còn lại là $4,2$ cm^3 (làm tròn đến hàng phần mười).

Hướng dẫn giải. **a) Đúng.**

Theo công thức tính thể tích khối cầu, thể tích tại thời điểm t là: $V(t) = \dfrac{4}{3}\pi r^3(t)$.

b) Đúng.

Diện tích bề mặt quả cầu là $S(t) = 4\pi r^2(t)$.

Theo giả thiết, tốc độ thay đổi thể tích tỷ lệ thuận với diện tích bề mặt: $V'(t) = K \cdot S(t) = K \cdot 4\pi r^2(t)$.

Đặt $k = 4K$, ta có: $V'(t) = k\pi r^2(t)$.

c) Sai.

Ta có $V(t) = \dfrac{4}{3}\pi r^3(t) \Rightarrow V'(t) = 4\pi r^2(t) \cdot r'(t)$.

Từ câu b, $4\pi r^2(t) \cdot r'(t) = k\pi r^2(t) \Rightarrow r'(t) = \dfrac{k}{4}$.

Lấy nguyên hàm hai vế: $r(t) = \dfrac{k}{4}t + C$.

Tại $t = 0$, đường kính bằng 8 cm $\Rightarrow r(0) = 4 \Rightarrow C = 4$. Vậy $r(t) = \dfrac{k}{4}t + 4$.

Tại $t = 30$ giây $= \dfrac{1}{2}$ phút, thể tích còn lại một nửa:

$V\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}V(0) \Rightarrow \dfrac{4}{3}\pi r^3\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{4}{3}\pi \cdot 4^3 \Rightarrow r^3\left(\dfrac{1}{2}\right) = 32 \Rightarrow r\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt[3]{32}$.

Thay vào biểu thức của $r(t)$: $\dfrac{k}{4} \cdot \dfrac{1}{2} + 4 = \sqrt[3]{32} \Rightarrow \dfrac{k}{8} = \sqrt[3]{32} - 4 \Rightarrow k = 8\sqrt[3]{32} - 32 \approx -6,6$.

Do đó $k = -4$ là sai.

d) Sai.

Tại thời điểm $t = 45$ giây $= \dfrac{3}{4}$ phút, bán kính viên muối là:

$$r\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{k}{4}\cdot\frac{3}{4} + 4 = \frac{3(8\sqrt[3]{32} - 32)}{16} + 4 = \frac{24\sqrt[3]{32} - 96 + 64}{16} = \frac{24\sqrt[3]{32} - 32}{16} = \frac{3\sqrt[3]{32} - 4}{2}.$$

Giá trị $r\left(\dfrac{3}{4}\right) \approx 2,76$ cm.

Thể tích còn lại là: $V\left(\dfrac{3}{4}\right) = \dfrac{4}{3}\pi \cdot \left[r\left(\dfrac{3}{4}\right)\right]^3 \approx 88,28$ cm^3.

Do đó giá trị $4,2$ cm^3 là sai.

Bài 48. Trong lễ hội thường niên của một địa phương, tốc độ khách vào và tốc độ khách ra lễ hội tại thời điểm t lần lượt được xác định bằng hàm số $a(t) = -24t^2 + 190t + 500$ và $b(t) = -7,8t^3 + kt^2$ (k là số thực). Trong đó $a(t)$ và $b(t)$ được tính bằng người/giờ, t tính bằng giờ kể từ lúc 12 giờ trưa, giờ đóng cửa lễ hội là 22 giờ đêm và khi đóng cửa thì không còn ai có mặt trong lễ hội. Biết tại mọi thời điểm, người đã ra sẽ không vào lại.

Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

a) Tổng lượng khách tham dự lễ hội là 6000 người.

b) $k = 78$.

c) Số lượng khách có mặt trong lễ hội tại thời điểm t được ước lượng theo công thức $N(t) = \displaystyle\int_0^t (7,8x^3 - 102x^2 + 190x + 500)dx$.

d) Số lượng khách có mặt trong lễ hội khi lớn nhất không vượt quá 1970 người.

Hướng dẫn giải. **a) Sai.**

Vì tốc độ khách vào lễ hội tại thời điểm t (giờ) (được tính từ lúc 12 giờ trưa) được xác định bằng hàm số $a(t) = -24t^2 + 190t + 500$ và tại mọi thời điểm, người đã ra sẽ không vào lại nên số lượng khách vào lễ hội bằng $\displaystyle\int_0^n a(t)dt$, với n là số giờ tính từ thời điểm 12 giờ.

Ta có giờ đóng cửa lễ hội là 22 giờ đêm nên tính từ lúc 12 giờ trưa, lễ hội đã mở cửa được $22 - 12 = 10$ (giờ).

Vậy tổng lượng khách tham dự lễ hội là:

$$\int_0^{10} a(t)dt = \int_0^{10} (-24t^2 + 190t + 500)dt = 6500 \text{ (người)}.$$

b) Đúng.

Tương tự, dựa vào tốc độ khách ra lễ hội tại thời điểm t (giờ) là $b(t) = -7,8t^3 + kt^2$ (người/giờ) ta có tổng lượng khách ra lễ hội tại thời điểm m giờ (số giờ tính từ 12 giờ) là $\displaystyle\int_0^m b(t)dt$.

Biết tổng lượng khách ra lễ hội tại thời điểm 10 giờ (tức lúc tổng 6500 khách vào ra về hết) là:

$$\int_0^{10} b(t)dt = 6500 \Leftrightarrow \int_0^{10} (-7,8t^3 + kt^2)dt = 6500$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{-7,8.t^4}{4} + \frac{kt^3}{3}\right)\Bigg|_0^{10} = 6500 \Leftrightarrow -19500 + \frac{1000k}{3} = 6500$$

$$\Leftrightarrow \frac{1000k}{3} = 26000 \Leftrightarrow k = 78.$$

c) Đúng.

$a(x) = -24x^2 + 190x + 500$; $b(x) = -7,8x^3 + 78x^2$.

Số lượng khách có mặt trong lễ hội tại thời điểm t bằng tổng số người vào trừ tổng số người ra:

$$N(t) = \int_0^t [a(x) - b(x)]dx = \int_0^t [-24x^2 + 190x + 500 - (-7,8x^3 + 78x^2)]dx$$
$$= \int_0^t (7,8x^3 - 102x^2 + 190x + 500)dx.$$

d) Đúng.

Số lượng khách có mặt trong lễ hội lớn nhất bằng với $N(t)$ max trên đoạn $[0;10]$.

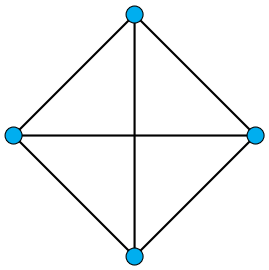
Ta có $N'(t) = 7,8t^3 - 102t^2 + 190t + 500$.

$$N'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \approx -1,424... \notin [0;10] \\ x = 10 \in [0;10] \\ x \approx 4,5... \in [0;10] \end{array}\right.$$

Ta có $N(10) = 0, N(0) = 0, N(4,5...) \approx 1875$.

Suy ra số lượng khách có mặt trong lễ hội lớn nhất bằng 1875 người.

Bài 49. Xét một đồ thị đầy đủ K_4 có 4 đỉnh, các đỉnh đó được kết nối với nhau thông qua các cạnh và 2 đường chéo (tham khảo hình vẽ). Với 6 cạnh của đồ thị, tung một đồng xu cân đối ngẫu nhiên: nếu mặt ngửa xuất hiện, ta giữ nguyên cạnh đó; nếu mặt sấp xuất hiện, ta loại bỏ cạnh đó. Gọi P là biến cố "sau khi tung đồng xu 6 lần, đồ thị vẫn được kết nối" (tức là tồn tại tối thiểu một con đường nối 4 đỉnh với nhau).



Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

a) Số phần tử của không gian mẫu là 16.

b) Sau 6 lần tung đồng xu, nếu chỉ còn 1 hoặc 2 cạnh thì đồ thị chắc chắn không kết nối.

c) Sau 6 lần tung đồng xu đồ thị còn 3 cạnh, có 4 trường hợp đồ thị không được kết nối.

d) Xác suất xảy ra biến cố P lớn hơn $0,6$.

Hướng dẫn giải. **a) Sai.**

Mỗi cạnh có 2 khả năng: loại bỏ (xuất hiện mặt sấp) hoặc giữ nguyên (xuất hiện mặt ngửa) nên 6 cạnh như thế sẽ có $2^6 = 64$ khả năng. Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 64$.

b) Đúng.

Quan sát hình vẽ, ta nhận thấy rằng phải còn tối thiểu 3 cạnh thì đồ thị mới được kết nối. Do đó sau 6 lần tung đồng xu, nếu chỉ còn 1 hoặc 2 cạnh thì đồ thị chắc chắn không kết nối.

c) Đúng.

Trường hợp sau 6 lần tung đồng xu đồ thị còn 3 cạnh: khi đó đồ thị không được kết nối khi chỉ có 3 đỉnh được nối lại với nhau tạo thành 1 tam giác, nên số cách chọn ra 3 đỉnh trong 4 đỉnh là $C_4^3 = 4$ cách.

Vậy sau 6 lần tung đồng xu đồ thị còn 3 cạnh, có 4 trường hợp đồ thị không được kết nối.

d) Sai.

Gọi $\overline{P}$ là biến cố "sau khi tung đồng xu 6 lần, đồ thị không được kết nối".

Sau 6 lần tung đồng xu, có các trường hợp sau:

- Không còn cạnh nào: 1 cách.
- Còn 1 cạnh: $C_6^1 = 6$ cách.
- Còn 2 cạnh: $C_6^2 = 15$ cách.
- Còn 3 cạnh: từ kết quả phần c) thì ta được 4 cách.

(còn tối thiểu 4 cạnh thì đồ thị chắc chắn được kết nối)
Suy ra $n(\overline{P}) = 1 + 6 + 15 + 4 = 26$.
Suy ra xác suất $\overline{P}$ là $P(\overline{P}) = \dfrac{n(\overline{P})}{n(\Omega)} = \dfrac{26}{64} = \dfrac{13}{32}$.
Xác suất xảy ra biến cố P bằng:

$$1 - P(\overline{P}) = 1 - \frac{13}{32} = \frac{19}{32} = 0,59375 < 0,6.$$

Bài 50. Cho hàm số $f(x) = \sin 2x$

Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

a) Tập giá trị của hàm số $f(x)$ là $[-1; 1]$.

b) $f'(x) = \cos 2x$.

c) Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x)$ tại điểm có hoành độ $x_0 = \pi$ là $k = 1$.

d) Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x)$ tại điểm có hoành độ $x_0 = \pi$ có phương trình là $y = 2x - 2\pi$.

Hướng dẫn giải. **a) Đúng.**
Ta có tập giá trị của hàm $y = \sin x$ là $[-1; 1]$.
Ta có tập giá trị của hàm số $f(x) = \sin 2x$ là $[-1; 1]$.
Suy ra mệnh đề a) đúng.

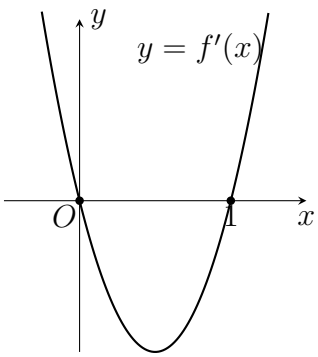
b) Sai.
Sử dụng công thức $(\sin u)' = u' \cdot \cos u$, ta có:
$f'(x) = (2x)' \cdot \cos 2x = 2\cos 2x$.
Suy ra mệnh đề b) sai.

c) Sai.
Ta có tại $x_0 = \pi$:
$f'(\pi) = 2\cos(2\pi) = 2 \cdot 1 = 2$.
$f(\pi) = \sin(2\pi) = 0$.
Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ $x_0 = \pi$ là $k = f'(\pi) = 2$.
Suy ra mệnh đề c) sai.

d) Đúng.
Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ $x_0 = \pi$ là:
$y = f'(\pi)(x - \pi) + f(\pi)$
$\Leftrightarrow y = 2(x - \pi) + 0 \Leftrightarrow y = 2x - 2\pi$.
Suy ra mệnh đề d) đúng.

Bài 51. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của đạo hàm $y = f'(x)$ là một parabol

đi qua gốc tọa độ O và cắt trục hoành tại điểm $A(1;0)$ như hình vẽ.



Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

a) $f'(x)=0$ khi $x=0$ hoặc $x=1$.

b) Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

c) Hàm số $y=f(x)$ có 2 điểm cực trị.

d) $f\left(\dfrac{1}{2}\right)>f(1)$.

Hướng dẫn giải. **a) Đúng.**

Giá trị của x để $f'(x)=0$ tương ứng với hoành độ các giao điểm của đồ thị hàm số $y=f'(x)$ với trục hoành. Quan sát đồ thị, ta thấy đồ thị $f'(x)$ cắt trục hoành tại hai điểm có hoành độ $x=0$ và $x=1$. Suy ra mệnh đề a) đúng.

b) Đúng.

Từ hình vẽ, trên khoảng $(0;1)$, đồ thị hàm số $f'(x)$ nằm hoàn toàn phía dưới trục hoành nên $f'(x)<0$, suy ra hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$. Suy ra mệnh đề b) đúng.

c) Đúng.

Số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$ là số nghiệm đơn (hoặc nghiệm bội lẻ) của phương trình $f'(x)=0$. Từ kết quả phần a), ta thấy phương trình $f'(x)=0$ có hai nghiệm là $x=0$ và $x=1$. Tại cả hai điểm này, đồ thị $f'(x)$ đều cắt xuyên qua trục hoành nên đây là hai nghiệm đơn. Do đó, hàm số $y=f(x)$ có đúng 2 điểm cực trị. Suy ra mệnh đề c) đúng.

d) Đúng.

Xét hàm số $y=f(x)$ trên khoảng $(0;1)$. Theo kết quả phần b), hàm số nghịch biến trên khoảng này. Với $\dfrac{1}{2}$ và 1 thuộc khoảng đang xét, vì $\dfrac{1}{2}<1$ nên theo tính chất của hàm số nghịch biến, ta có $f\left(\dfrac{1}{2}\right)>f(1)$. Suy ra mệnh đề d) đúng.

Bài 52. Một sự kiện diễn ra trong một rạp hát có n hàng ghế xếp theo hình quạt. Hàng thứ nhất có 15 ghế, hàng thứ 2 có 18 ghế, hàng thứ ba có 21 ghế,... cứ tiếp tục theo quy luật như vậy thì hàng cuối cùng có 72 ghế. Trong một buổi biểu diễn ca nhạc của ca sĩ Sơn Tùng MTP, rạp hát đó đã bán được vừa hết số vé tương ứng với số ghế trong rạp. Biết rằng giá bán vé mỗi ghế ở ba hàng đầu là 800 nghìn đồng, giá vé mỗi ghế ở các hàng còn lại là 500 nghìn đồng và mỗi ghế chỉ một người ngồi.



Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

a) Số ghế ở hàng thứ n ($n \in \mathbb{N}^*$) được xác định bởi công thức $u_n = 3n + 12$.

b) Có tổng cộng 18 hàng ghế trong rạp hát trên.

c) Tổng số ghế trong rạp hát trên là 870 ghế.

d) Số tiền thu được từ việc bán vé của sự kiện trên nhỏ hơn 500 triệu đồng.

Hướng dẫn giải. **a) Đúng.**

Từ quy luật hàng ghế đầu 15 ghế, các hàng sau đó hơn hàng liền trước đó 3 ghế, ta nhận thấy các hàng ghế theo thứ tự (từ hàng 1 đến hàng n) lập thành một cấp số cộng với $u_1 = 15$ và công sai $d = 3$.

Áp dụng công thức số hạng tổng quát của cấp số cộng, ta có: $u_n = u_1 + (n-1)d = 15 + (n-1)3 = 15 + 3n - 3 = 3n + 12$.

b) Sai.

Vì hàng ghế cuối cùng (tức hàng n) có 72 ghế nên: $u_n = 72 \Leftrightarrow 3n + 12 = 72 \Leftrightarrow 3n = 60 \Leftrightarrow n = 20$.

Vậy rạp hát có 20 hàng ghế chứ không phải 18.

c) Đúng.

Tổng số ghế trong rạp hát trên bằng tổng 20 số hạng đầu tiên của cấp số cộng với $u_1 = 15$ và công sai $d = 3$. Áp dụng công thức tính tổng n số hạng đầu tiên của cấp số cộng: $S = \dfrac{n(u_1 + u_n)}{2}$, ta suy ra tổng số ghế trong rạp là: $S = \dfrac{20(15 + 72)}{2} = 870$ (ghế).

d) Đúng.

Tổng số ghế ở 3 hàng đầu là: $S_3 = 15 + 18 + 21 = 54$.

Suy ra tổng số ghế ở các hàng còn lại bằng: $870 - 54 = 816$.

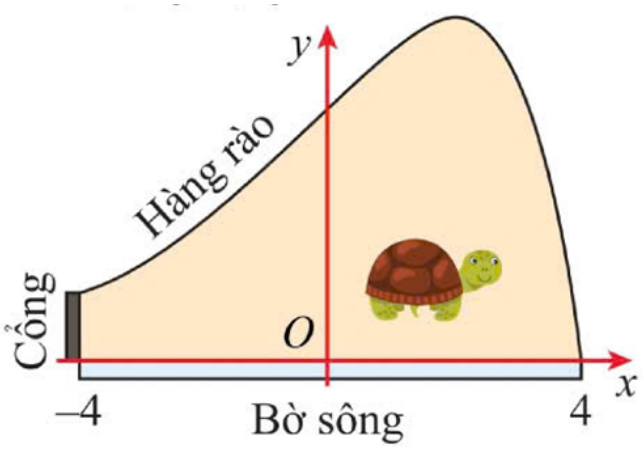
Từ giả thiết: "giá bán vé mỗi ghế ở ba hàng đầu là 800 nghìn đồng, giá vé mỗi ghế ở các hàng còn lại là 500 nghìn đồng" ta suy ra số tiền thu được từ việc bán vé là: $54 \cdot 800 + 816 \cdot 500 = 451\,200$ (nghìn đồng).

Vậy số tiền thu được từ việc bán vé của sự kiện trên bằng $451,2$ triệu đồng.

Vì $451,2 < 500$ nên mệnh đề d là đúng.

Bài 53. Trong mặt phẳng tọa độ, trục Ox được coi là bờ sông, đơn vị trên mỗi trục được tính bằng 10 mét. Một khu chuồng thú cạnh bờ hồ được giới hạn bởi hàng rào có phương trình $f(x) = (4 - x)e^{\frac{x}{2}}$, cánh cổng vào chuồng thú tại $x = -4$ và bờ sông. Biết rằng $F(x) = (b - ax)e^{\frac{x}{2}}$ $(a, b \in \mathbb{R})$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-4; 4]$.

Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?



a) Diện tích (m^2) của khu chuồng đã rào được tính bởi công thức $100[F(4)-F(-4)]$.

b) $b=12$.

c) Khoảng cách lớn nhất từ một điểm thuộc hàng rào đến bờ sông lớn hơn 50 mét.

d) Diện tích khu chuồng được rào là 2685 m^2 (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

Hướng dẫn giải. **a) Đúng.**

Theo định nghĩa tích phân, diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=-4, x=4$ trên hệ trục tọa độ là $S_{t\O}=\int_{-4}^{4} f(x)dx=F(4)-F(-4)$.

Vì đơn vị trên mỗi trục là 10 mét, nên diện tích thực tế tính bằng m^2 sẽ là $S=10\cdot 10\cdot S_{t\O}=100[F(4)-F(-4)]$.

b) Đúng.

Vì $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ nên $F'(x)=f(x)$.

Ta có: $F'(x)=\left[(b-ax)e^{\frac{x}{2}}\right]'=-ae^{\frac{x}{2}}+(b-ax)\cdot\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}=\left(-a+\frac{b}{2}-\frac{a}{2}x\right)e^{\frac{x}{2}}$.

Đồng nhất hệ số với $f(x)=(4-x)e^{\frac{x}{2}}$, ta được: $\begin{cases}-\frac{a}{2}=-1\\-a+\frac{b}{2}=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\-2+\frac{b}{2}=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=12\end{cases}$.

Vậy $b=12$ là chính xác.

c) Đúng.

Khoảng cách từ một điểm trên hàng rào đến bờ sông là giá trị $f(x)$. Ta tìm giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên đoạn $[-4;4]$.

$f'(x)=-1\cdot e^{\frac{x}{2}}+(4-x)\cdot\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}=e^{\frac{x}{2}}\left(-1+2-\frac{x}{2}\right)=e^{\frac{x}{2}}\left(1-\frac{x}{2}\right)$.

$f'(x)=0\Leftrightarrow x=2\in[-4;4]$.

Giá trị cực đại: $f(2)=(4-2)e^{\frac{2}{2}}=2e\approx 5,436$ (đơn vị tọa độ).

Đổi sang mét: $5,436\cdot 10=54,36$ m >50 m.

d) Đúng.

Từ kết quả phần a và b, ta có $F(x)=(12-2x)e^{\frac{x}{2}}$.

Diện tích thực tế là: $S=100[F(4)-F(-4)]=100\left[(12-8)e^2-(12+8)e^{-2}\right]$

$S=100[4e^2-20e^{-2}]\approx 100[29,556-2,707]\approx 2684,9\approx 2685$ (m^2).

Bài 54. Một hồ nước có diện tích 245 m^2. Thí nghiệm cho thấy bèo phủ mặt hồ trên theo quy luật: diện tích bèo tăng thêm tỉ lệ thuận với diện tích đã có, tức là nếu $S(t)$ là diện tích bèo đã phủ sau t ngày thì $S'(t)=k\cdot S(t)\quad(k\in\mathbb{R})$. Biết rằng vào thời điểm ban đầu, diện tích bèo phủ

10 m^2 và sau 5 ngày thì bèo đã phủ được 50 m^2.

Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

a) Hàm số $\ln[S(t)]$ là một nguyên hàm của hàm số $\dfrac{S'(t)}{S(t)}$.

b) Hàm số $S(t)$ biểu diễn diện tích bèo phủ sau t ngày là $S(t) = 10 \cdot e^{kt}$.

c) Giá trị $k = 0,31$ (làm tròn đến hàng phần trăm).

d) Sau 9 ngày (làm tròn đến hàng đơn vị), bèo đã phủ kín mặt hồ.

Hướng dẫn giải. **a) Đúng.**

Sử dụng công thức đạo hàm hàm hợp, ta có:

$$(\ln[S(t)])' = \frac{S'(t)}{S(t)}.$$

Theo định nghĩa nguyên hàm, ta suy ra $\ln[S(t)]$ là một nguyên hàm của $\dfrac{S'(t)}{S(t)}$.

b) Đúng.

Theo đề bài, ta có: $S'(t) = k \cdot S(t) \Rightarrow \dfrac{S'(t)}{S(t)} = k$.

Lấy tích phân hai vế theo t, ta được:

$$\int \frac{S'(t)}{S(t)}\,dt = \int k\,dt$$

$$\Rightarrow \ln|S(t)| = kt + C' \quad (*)$$

Vì $S(t) > 0$ nên $(*) \Leftrightarrow \ln[S(t)] = kt + C' \Leftrightarrow S(t) = e^{kt+C'} = e^{C'} \cdot e^{kt}$.

Từ giả thiết: "vào thời điểm ban đầu, diện tích bèo phủ 10 m^2" ta có:

$$S(0) = 10 \Leftrightarrow e^{C'} \cdot e^{k\cdot 0} = 10 \Leftrightarrow e^{C'} = 10.$$

Suy ra $S(t) = 10e^{kt}$.

c) Sai.

Sử dụng điều kiện sau 5 ngày: Tại $t = 5$, $S(5) = 50$ m^2.

$$\Rightarrow 50 = 10 \cdot e^{k\cdot 5} \Rightarrow 5 = e^{5k} \Rightarrow k = \frac{\ln(5)}{5} \approx 0,32.$$

Do đó giá trị $0,31$ là sai.

d) Sai.

"Phủ kín mặt hồ" có nghĩa là diện tích bèo đạt 245 m^2.

Ta cần tìm t sao cho $S(t) = 245$.

$$245 = 10 \cdot e^{\frac{\ln(5)}{5}t} \Rightarrow 24,5 = e^{\frac{\ln(5)}{5}t}.$$

Lấy logarit tự nhiên hai vế:

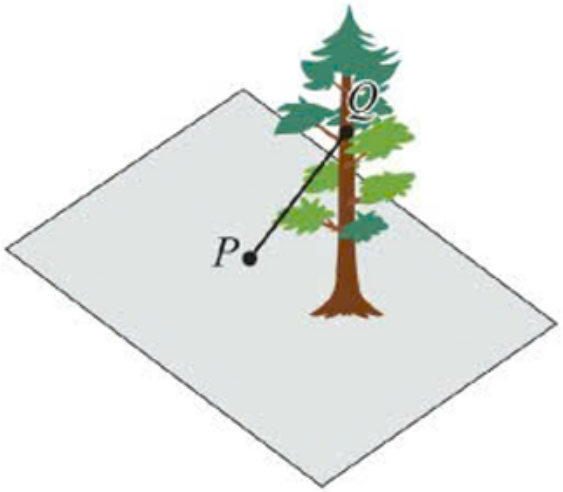
$$\ln(24,5) = \frac{\ln(5)}{5}t \Rightarrow t = \frac{5 \cdot \ln(24,5)}{\ln(5)} \approx 9,937 \text{ ngày}.$$

Làm tròn đến hàng đơn vị, $t \approx 10$ ngày.

Do đó khẳng định sau 9 ngày là sai.

Bài 55. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, đơn vị trên mỗi trục tọa độ tính bằng mét, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất, một sườn dốc được mô hình hoá bởi mặt phẳng (α) : $2x + 3y + 6z - 35 = 0$. Tại chân sườn dốc có một cây thông mọc thẳng đứng (vuông góc với mặt đất) với đỉnh của cây là điểm S có tọa độ là $S(5; 7; 26)$. Để cố định cây thông, một sợi dây bảo vệ

được buộc tại điểm Q trên cây thông ở độ cao 17 mét so với mặt đất và được kéo vuông góc với mặt sườn tại điểm P.



Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

a) Chiều cao của cây thông là 26 mét.

b) Điểm P có tọa độ là $P(1;1;5)$.

c) Một tia sét đánh trúng cây thông, làm cây bị gãy (phần bị gãy không rời khỏi cây). Đỉnh cây rơi xuống và chạm sườn dốc tại điểm $A(1;-1;6)$. Cây thông đã bị gãy ở độ cao 14 mét.

d) Sau khi gãy, vị trí buộc dây trên cây có tọa độ là $Q'(a;b;c)$, khi đó $2a+b+c=25$.

Hướng dẫn giải. **a) Đúng.**

Vì cây thông mọc thẳng đứng (vuông góc với mặt đất) và đỉnh có tọa độ là $S(5;7;26)$ nên chiều cao của cây thông bằng cao độ của điểm S và bằng 26 mét (vì đơn vị trên mỗi trục tọa độ tính bằng mét).

b) Đúng.

Gợi ý: $\begin{cases} P \in PQ \\ P \in (\alpha) \end{cases}$.

Vì sợi dây bảo vệ PQ được kéo vuông góc với mặt sườn nên $PQ \perp (\alpha)$. Do đó PQ nhận vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) là $\vec{n}=(2;3;6)$ làm vectơ chỉ phương.

Lại có điểm Q nằm trên cây thông nên sẽ có chung hoành độ và tung độ với điểm S nên $Q(5;7;q)$. Và vì điểm Q cách mặt đất 17 mét nên $Q(5;7;17)$.

Đường thẳng PQ đi qua điểm $Q(5;7;17)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{n}=(2;3;6)$ có phương trình tham số là: $PQ: \begin{cases} x=5+2t \\ y=7+3t \\ z=17+6t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

Vì $P \in PQ$ nên $P(5+2t;7+3t;17+6t)$.

Mà $P \in (\alpha)$ nên ta có: $2(5+2t)+3(7+3t)+6(17+6t)-35=0 \Leftrightarrow 10+4t+21+9t+102+36t-35=0$ $\Leftrightarrow 49t+98=0 \Leftrightarrow t=-2$.

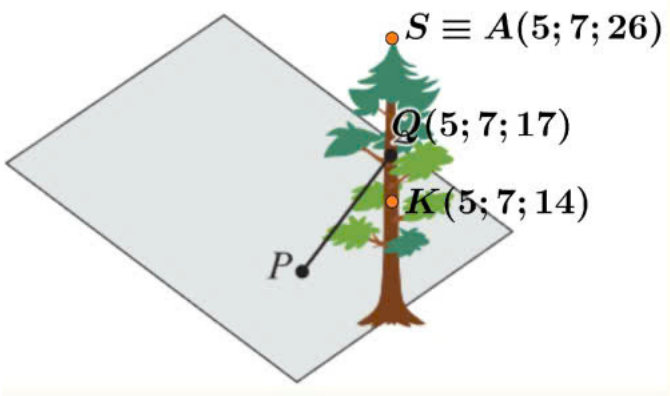
Suy ra $P(1;1;5)$.

c) Đúng.

Giả sử cây bị gãy tại điểm là $K(5;7;k)$ và ta có điểm gốc của cây là $G(5;7;0)$ (vì cây vuông góc

với mặt phẳng (Oxy) nên các điểm thuộc cây sẽ có dạng $(5;7;k), 0 \le k \le 26)$.
Khi đó tổng chiều dài cây là $AK + KG = 26$
$\Leftrightarrow \sqrt{(5-1)^2+(7+1)^2+(k-6)^2} + k = 26$
$\Leftrightarrow \sqrt{80+k^2-12k+36} = 26-k$
$\Leftrightarrow k^2 - 12k + 116 = (26-k)^2$ (vì $0 \le k \le 26$ nên hai vế đều dương nên ta bình phương hai vế)
$\Leftrightarrow k^2 - 12k + 116 = 676 - 52k + k^2$
$\Leftrightarrow 40k = 560 \Leftrightarrow k = 14$.
Vậy cây thông gãy ở vị trí $K(5;7;14)$ và độ cao 14 mét.

d) Đúng.
Khi bị gãy thì cành cây bị gãy là đoạn thẳng AK. Vì vị trí buộc dây Q cao hơn vị trí bị gãy nên sau khi bị gãy thì $Q' \in AK$.



Ta có: $Q'A = QA = QS = 26 - 17 = 9$; $KQ' = 17 - 14 = 3$.
Suy ra $Q'A = 3KQ' \Rightarrow \overrightarrow{AQ'} = 3\overrightarrow{Q'K}$ (vì 3 điểm Q', A, K thẳng hàng và Q' nằm giữa).
Với $\overrightarrow{AQ'}(a-1; b+1; c-6)$; $\overrightarrow{Q'K}(5-a; 7-b; 14-c)$.

$$\overrightarrow{AQ'} = 3\overrightarrow{Q'K} \Leftrightarrow \begin{cases} a-1 = 3(5-a) \\ b+1 = 3(7-b) \\ c-6 = 3(14-c) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-1 = 15-3a \\ b+1 = 21-3b \\ c-6 = 42-3c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4a = 16 \\ 4b = 20 \\ 4c = 48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 5 \\ c = 12 \end{cases} \Rightarrow 2a + b + c = 2.4 + 5 + 12 = 25.$$

Bài 56. Một đoàn tàu đang di chuyển trên đường ray phụ để nhập vào đường ray chính. Khi đoàn tàu cách điểm nhập 300 mét, vận tốc của đoàn tàu là 54 km/h. Bốn giây sau đó, đoàn tàu bắt đầu tăng tốc với vận tốc $v(t) = pt + q$ $(p, q \in \mathbb{R}, p > 0)$, trong đó t là thời gian tính bằng giây kể từ khi bắt đầu tăng tốc. Biết rằng đoàn tàu nhập vào đường ray chính sau 15 giây và duy trì sự tăng tốc trong 20 giây kể từ khi bắt đầu tăng tốc.

a) Quãng đường đoàn tàu đi được từ khi bắt đầu tăng tốc đến khi nhập vào đường ray chính là 250 mét.

b) Giá trị của q là 15.

c) Quãng đường $S(t)$ (đơn vị: mét) mà đoàn tàu đi được trong thời gian t giây $(0 \le t \le 30)$ kể từ khi tăng tốc được tính theo công thức: $S(t) = \frac{1}{2}pt^2 + 15t$.

d) Sau 20 giây kể từ khi tăng tốc, vận tốc của đoàn tàu vượt quá vận tốc tối đa cho phép là 150 km/h.

✍ *Hướng dẫn giải.* Đổi vận tốc ban đầu: $v_0 = 54$ km/h $= \frac{54}{3,6} = 15$ m/s.

Trong 4 giây đầu (trước khi tăng tốc), đoàn tàu đi được quãng đường là: $s_1 = v_0 \cdot 4 = 15 \cdot 4 = 60$ (m). Quãng đường từ lúc bắt đầu tăng tốc đến khi nhập vào đường ray chính là: $s_2 = 300 - 60 = 240$ (m). Vậy ý a) **Sai**.

Tại thời điểm bắt đầu tăng tốc ($t = 0$), vận tốc của đoàn tàu là 15 m/s. Thay vào công thức $v(t) = pt + q$, ta có: $v(0) = p \cdot 0 + q = 15 \Rightarrow q = 15$. Vậy ý b) **Đúng**.

Quãng đường tàu đi được từ lúc tăng tốc là nguyên hàm của vận tốc: $S(t) = \int (pt + 15)dt = \frac{1}{2}pt^2 + 15t + C$. Vì $S(0) = 0$ nên $C = 0$. Do đó $S(t) = \frac{1}{2}pt^2 + 15t$. Tuy nhiên, theo đề bài, tàu chỉ duy trì tăng tốc trong 20 giây, nên công thức này chỉ đúng với $0 \le t \le 20$. Với $t > 20$, quy luật chuyển động đã thay đổi. Vậy ý c) **Sai**.

Để tính vận tốc sau 20 giây, ta cần tìm p. Biết sau 15 giây tăng tốc tàu đi được 240 m, ta có: $S(15) = \frac{1}{2}p(15)^2 + 15(15) = 240 \Leftrightarrow 112,5p + 225 = 240 \Leftrightarrow p = \frac{15}{112,5} = \frac{2}{15}$. Vận tốc tại thời điểm $t = 20$ s là: $v(20) = \frac{2}{15} \cdot 20 + 15 = \frac{8}{3} + 15 = \frac{53}{3} \approx 17,67$ (m/s). Đổi sang km/h: $v(20) \approx 17,67 \cdot 3,6 = 63,6$ (km/h). Vì $63,6 < 150$ nên vận tốc không vượt quá tốc độ cho phép. Vậy ý d) **Sai**.

Bài 57. Cho hàm số $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 5x + 4)$. Khi đó

a) Hàm số $y = f(x)$ có tập xác định $\mathscr{D} = (-\infty; 1] \cup [4; +\infty)$.

b) Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = \frac{5-2x}{(x^2-5x+4)\ln 2}$.

c) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $\left(-\infty; \frac{5}{2}\right)$.

d) Bất phương trình $f(x) > 0$ có đúng 4 nghiệm nguyên.

✍ *Hướng dẫn giải.*

Điều kiện xác định của hàm số là biểu thức dưới dấu logarit phải dương: $x^2 - 5x + 4 > 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-4) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < 1 \\ x > 4 \end{array}\right.$. Vậy tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = (-\infty; 1) \cup (4; +\infty)$. Do đó ý a) **Sai** (do đề bài lấy cả các đầu mút 1 và 4).

Sử dụng công thức đạo hàm $(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$, ta có: $f'(x) = \frac{(x^2-5x+4)'}{(x^2-5x+4)\ln\frac{1}{2}} = \frac{2x-5}{(x^2-5x+4)(-\ln 2)} = \frac{5-2x}{(x^2-5x+4)\ln 2}$. Vậy ý b) **Đúng**.

Hàm số đồng biến khi $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{5-2x}{(x^2-5x+4)\ln 2} > 0$. Trên tập xác định $\mathscr{D}$, ta có $x^2 - 5x + 4 > 0$ và $\ln 2 > 0$, nên: $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 5 - 2x > 0 \Leftrightarrow x < \frac{5}{2}$. Kết hợp với tập xác định $\mathscr{D}$, hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$. Vì hàm số không xác định trên đoạn $[1; 4]$, nên không thể kết luận hàm số đồng biến trên cả khoảng $\left(-\infty; \frac{5}{2}\right)$. Vậy ý c) **Sai**.

Ta có: $f(x) > 0 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 5x + 4) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 < \left(\frac{1}{2}\right)^0$ (vì cơ số $0 < \frac{1}{2} < 1$ nên bất phương trình đổi chiều). $\Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 < 1 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 3 < 0$. Xét tam thức $x^2 - 5x + 3 = 0$ có hai nghiệm là $x = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$ (xấp xỉ 0,69 và 4,31). Bất phương trình có nghiệm: $x \in \left(\frac{5-\sqrt{13}}{2}; \frac{5+\sqrt{13}}{2}\right)$. Kết hợp với điều kiện xác định $x \in (-\infty; 1) \cup (4; +\infty)$, ta có tập nghiệm của bất phương trình là: $S = \left(\frac{5-\sqrt{13}}{2}; 1\right) \cup \left(4; \frac{5+\sqrt{13}}{2}\right) \approx (0,69; 1) \cup (4; 4,31)$. Trong các khoảng này không tồn tại giá trị x nguyên nào. Vậy bất phương trình không có nghiệm nguyên. Do đó ý d) **Sai**.

Bài 58. Bạn Trang thống kê chiều cao (đơn vị: cm) của các bạn học sinh nữ lớp $12C$ và lớp

$12D$ ở bảng sau:

Chiều cao (cm)	$[155;160)$	$[160;165)$	$[165;170)$	$[170;175)$	$[175;180)$
Số học sinh nữ lớp $12C$	2	7	12	4	1
Số học sinh nữ lớp $12D$	5	9	8	2	2

a) Giá trị đại diện của nhóm $[165;170)$ là $167,5$.

b) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm của lớp $12D$ là 20.

c) Nếu so sánh theo khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm thì học sinh nữ lớp $12C$ có chiều cao đồng đều hơn.

d) Nếu so sánh theo độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm thì học sinh nữ lớp $12D$ có chiều cao trung bình đồng đều hơn.

Hướng dẫn giải.

Giá trị đại diện của nhóm $[a;b)$ được tính bằng $\frac{a+b}{2}$. Đối với nhóm $[165;170)$, giá trị đại diện là $x_3 = \frac{165+170}{2} = 167,5$. Vậy ý a) **Đúng**.

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm là hiệu giữa đầu mút phải của nhóm cuối cùng và đầu mút trái của nhóm đầu tiên. $R = 180 - 155 = 25$. Vậy ý b) **Sai**.

Tổng số học sinh mỗi lớp là $n = 26$. - Với lớp $12C$:

+ Tứ phân vị thứ nhất Q_1 thuộc nhóm $[160;165)$, $Q_1 = 160 + \frac{\frac{26}{4}-2}{7} \cdot 5 \approx 163,21$.

+ Tứ phân vị thứ ba Q_3 thuộc nhóm $[165;170)$, $Q_3 = 165 + \frac{\frac{3\cdot 26}{4}-9}{12} \cdot 5 \approx 169,38$.

+ Khoảng tứ phân vị $\Delta_{Q_C} = Q_3 - Q_1 \approx 6,17$. - Với lớp $12D$:

+ Tứ phân vị thứ nhất Q_1 thuộc nhóm $[160;165)$, $Q_1 = 160 + \frac{\frac{26}{4}-5}{9} \cdot 5 \approx 160,83$.

+ Tứ phân vị thứ ba Q_3 thuộc nhóm $[165;170)$, $Q_3 = 165 + \frac{\frac{3\cdot 26}{4}-14}{8} \cdot 5 \approx 168,44$.

+ Khoảng tứ phân vị $\Delta_{Q_D} = Q_3 - Q_1 \approx 7,61$. Vì $\Delta_{Q_C} < \Delta_{Q_D}$ nên chiều cao lớp $12C$ đồng đều hơn. Vậy ý c) **Đúng**.

- Tính số trung bình:

+ $\bar{x}_C = \frac{2\cdot 157,5+7\cdot 162,5+12\cdot 167,5+4\cdot 172,5+1\cdot 177,5}{26} \approx 166,73$.

+ $\bar{x}_D = \frac{5\cdot 157,5+9\cdot 162,5+8\cdot 167,5+2\cdot 172,5+2\cdot 177,5}{26} \approx 164,81$.

- Tính phương sai và độ lệch chuẩn ($\sigma = \sqrt{s^2}$):

+ Tính được $\sigma_C \approx 4,51$ và $\sigma_D \approx 5,85$.

Vì $\sigma_C < \sigma_D$ nên học sinh nữ lớp $12C$ có chiều cao đồng đều hơn lớp $12D$. Vậy ý d) **Sai**.

Bài 59. Cho hàm số $f(x) = \sin x - \sqrt{3}\cos x - 2$. Khi đó

a) $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$.

b) Đạo hàm của hàm số đã cho là $f'(x) = \cos x - \sqrt{3}\sin x$.

c) Nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$ trên đoạn $[0;\pi]$ là $\frac{5\pi}{6}$.

d) Giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên đoạn $[0;\pi]$ là $\sqrt{3} - 2$.

Hướng dẫn giải.

Thay $x=\frac{\pi}{2}$ vào hàm số $f(x)$: $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)-\sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)-2=1-\sqrt{3}\cdot 0-2=-1$. Vậy ý a) **Đúng**.

Ta có đạo hàm: $f'(x)=(\sin x)'-\sqrt{3}(\cos x)'-(2)'=\cos x-\sqrt{3}(-\sin x)=\cos x+\sqrt{3}\sin x$. Mệnh đề ghi $f'(x)=\cos x-\sqrt{3}\sin x$ là sai về dấu. Vậy ý b) **Sai**.

Xét phương trình $f'(x)=0\Leftrightarrow\cos x+\sqrt{3}\sin x=0$ trên đoạn $[0;\pi]$. $\Leftrightarrow\sqrt{3}\sin x=-\cos x\Leftrightarrow\tan x=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ (do $\cos x=0$ không là nghiệm). $\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{6}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$. Với $x\in[0;\pi]$, ta chọn $k=1\Rightarrow x=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$. Vậy ý c) **Đúng**.

Ta có $f'(x)=2\left(\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$. Trên đoạn $[0;\pi]$, ta có:

- $f'(x)>0$ trên $\left[0;\frac{5\pi}{6}\right)$ (hàm số đồng biến).
- $f'(x)<0$ trên $\left(\frac{5\pi}{6};\pi\right]$ (hàm số nghịch biến).

Do đó, giá trị lớn nhất của hàm số đạt được tại $x=\frac{5\pi}{6}$. $\max_{[0;\pi]}f(x)=f\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)-\sqrt{3}\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)-2=\frac{1}{2}-\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-2=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}-2=0$. Mệnh đề ghi giá trị lớn nhất là $\sqrt{3}-2$ (đây thực chất là giá trị $f(\pi)$) là sai. Vậy ý d) **Sai**.

Bài 60. Kết quả khảo sát những bệnh nhân bị tai nạn xe máy về mối liên hệ giữa việc đội mũ bảo hiểm và khả năng bị chấn thương vùng đầu cho thấy:

- Tỉ lệ bệnh nhân bị chấn thương vùng đầu khi gặp tai nạn là 80%;
- Tỉ lệ bệnh nhân đội mũ bảo hiểm đúng cách khi gặp tai nạn là 90%;
- Tỉ lệ bệnh nhân đội mũ bảo hiểm đúng cách bị chấn thương vùng đầu là 18%.

Gọi A là biến cố: "Bệnh nhân bị chấn thương vùng đầu khi gặp tai nạn" và B là biến cố: "Bệnh nhân đội mũ bảo hiểm đúng cách khi gặp tai nạn".

a) Xác suất để khi gặp tai nạn, bệnh nhân đội mũ bảo hiểm đúng cách và bị chấn thương vùng đầu là $0,144$.

b) Xác suất để khi gặp tai nạn, bệnh nhân không đội mũ bảo hiểm đúng cách và bị chấn thương vùng đầu khi gặp tai nạn là $0,65$.

c) Xác suất để khi gặp tai nạn, bệnh nhân không đội mũ bảo hiểm đúng cách biết bệnh nhân bị chấn thương vùng đầu là $0,82$.

d) Việc đội mũ bảo hiểm đúng cách sẽ làm giảm khả năng chấn thương vùng đầu xuống khoảng $4,6$ lần (kết quả làm tròn ở hàng phần mười).

Hướng dẫn giải. Từ giả thiết bài toán, ta có các xác suất sau:

- $P(A)=80\%=0,8\Rightarrow P(\bar{A})=0,2$.
- $P(B)=90\%=0,9\Rightarrow P(\bar{B})=0,1$.
- Dữ kiện thứ ba "Tỉ lệ bệnh nhân đội mũ bảo hiểm đúng cách [trong số những người] bị chấn thương vùng đầu là 18%" tương ứng với xác suất có điều kiện: $P(B|A)=18\%=0,18$.

Xác suất bệnh nhân đội mũ bảo hiểm đúng cách và bị chấn thương vùng đầu là: $P(B\cap A)=P(A)\cdot P(B|A)=0,8\cdot 0,18=0,144$. Vậy ý a) **Đúng**.

Xác suất bệnh nhân không đội mũ bảo hiểm đúng cách và bị chấn thương vùng đầu là: $P(\bar{B}\cap A)=P(A)-P(B\cap A)=0,8-0,144=0,656$. Mệnh đề ghi $0,65$ là chưa chính xác (thiếu phần nghìn). Vậy ý b) **Sai**.

Xác suất bệnh nhân không đội mũ bảo hiểm đúng cách biết bệnh nhân bị chấn thương vùng đầu là: $P(\bar{B}|A) = 1 - P(B|A) = 1 - 0,18 = 0,82$. Vậy ý c) **Đúng**.

Để so sánh hiệu quả, ta xét tỉ lệ giữa nhóm không đội mũ và nhóm có đội mũ trong số những người bị chấn thương: $\frac{P(\bar{B}|A)}{P(B|A)} = \frac{0,82}{0,18} \approx 4,555... \approx 4,6$. Số liệu này cho thấy trong số những ca chấn thương đầu, tỉ lệ người không đội mũ bảo hiểm đúng cách cao gấp khoảng $4,6$ lần người đội mũ đúng cách, điều này phản ánh việc đội mũ làm giảm đáng kể khả năng chấn thương. Vậy ý d) **Đúng**.

Bài 61. Cho hàm số $F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x) = -3x^2 + 3$ trên $\mathbb{R}$ thoả mãn $F(2) = 4$ và $G(1) = -2$.

a. $\int f(x)\mathrm{d}x = -x^3 + 3x + C$ với C là hằng số.

b. $G(2) = -2$.

c. $F(x) - G(x) = 10$.

d. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = F(x)$, $y = G(x)$, và hai đường thẳng $x = 3$, $x = 7$ bằng 40.

Hướng dẫn giải. **a) Đúng.**

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x = \int (-3x^2 + 3)\mathrm{d}x$

$= \frac{-3x^3}{3} + 3x + C = -x^3 + 3x + C$ với C là hằng số.

b) Sai.

Vì $G(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ nên

$G(x) = \int f(x)\mathrm{d}x = -x^3 + 3x + C.$

Mà $G(1) = -2$ nên ta có

$-1^3 + 3 \cdot 1 + C = -2 \Rightarrow C = -4.$

Suy ra $G(x) = -x^3 + 3x - 4.$

Vậy $G(2) = -2^3 + 3 \cdot 2 - 4 = -6.$

c) Đúng.

Làm tương tự như phần c, ta để tìm $F(x)$.

Ta có $F(x) = -x^3 + 3x + C$. Mà $F(2) = 4$ nên suy ra

$-2^3 + 3 \cdot 2 + C = 4 \Rightarrow C = 6.$

Suy ra $F(x) = -x^3 + 3x + 6.$

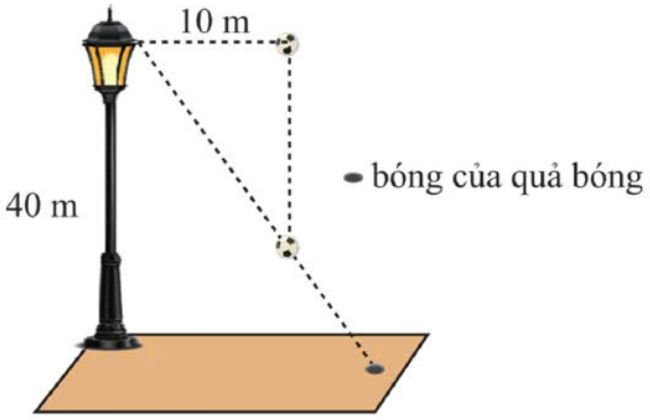
Vậy $F(x) - G(x) = 6 - (-4) = 10.$

d) Đúng.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = F(x)$, $y = G(x)$ và hai đường thẳng $x = 3$, $x = 7$ bằng

$$\int_3^7 |F(x) - G(x)|\mathrm{d}x = \int_3^7 10\mathrm{d}x = 40 \text{ (đvdt)}$$

Bài 62. Một ngọn đèn chiếu sáng từ đỉnh của một cột đèn cao 40 m. Một vật được thả rơi tự do từ cùng độ cao, cách đèn 10 m theo phương ngang (tham khảo như hình vẽ). Biết gia tốc trọng trường bằng 10 m/s^2, tại thời điểm thả rơi vật có vận tốc bằng 0. Gọi $h(t)$ là độ cao của vật tại thời điểm t giây.



a) Độ cao của vật tại thời điểm t giây được xác định bởi công thức $h(t) = 40 - 5t^2$ (mét).

b) Tốc độ của vật khi chạm đất bằng $28,2$ (m/s) (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

c) Khoảng cách giữa bóng của vật và chân đèn sau t giây là $L(t) = \frac{10h(t)}{40-h(t)}$.

d) Tại thời điểm vật chạm đất, bóng của vật hướng về phía chân đèn với tốc độ bằng $7,1$ (m/s) (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Hướng dẫn giải. **a) Đúng.**

Ta có: $g = 10$.

Quãng đường vật di chuyển trong khoảng thời gian t là $s(t) = \frac{1}{2}gt^2 = 5t^2$.

$\Rightarrow h(t) = 40 - 5t^2$.

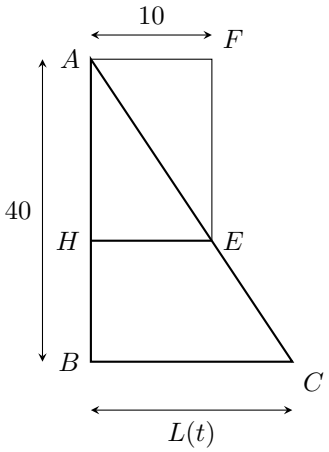
b) Sai.

Ta có: $h(t) = 40 - 5t^2 = 0 \Rightarrow t = 2\sqrt{2}$.

$\Rightarrow v(2\sqrt{2}) \approx 28,3$ m/s.

c) Sai.

Sơ đồ hình học minh họa định lý Thales:



Theo định lý Talet ta có: $\dfrac{AH}{AB} = \dfrac{EH}{BC}$

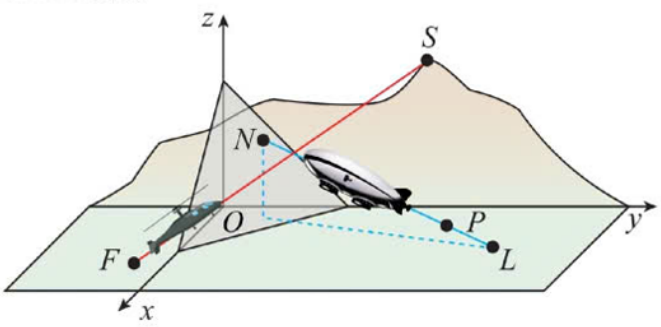
$\Rightarrow \dfrac{40 - h(t)}{40} = \dfrac{10}{L(t)}$

$\Rightarrow L(t) = \dfrac{400}{40 - h(t)}$.

d) Đúng.

$$L(t) = \frac{400}{40 - h(t)}$$
$$\Rightarrow v(t) = L'(t) = \frac{400 \cdot h'(t)}{(40 - h(t))^2}.$$
Tại thời điểm chạm đất thì $t = 2\sqrt{2}$.
$$\Rightarrow v(2\sqrt{2}) = \frac{400 \cdot (-10 \cdot 2\sqrt{2})}{(5 \cdot (2\sqrt{2})^2)^2} \approx -7,1.$$
$\Rightarrow$ Tại thời điểm vật chạm đất, bóng của vật hướng về phía chân đèn với tốc độ bằng $|v(2\sqrt{2})| = 7,1$ m/s.

Bài 63. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, đơn vị trên mỗi trục tính bằng kilomet, mặt đất trùng với mặt phẳng (Oxy). Một khinh khí cầu cất cánh tại sân bay bay thẳng từ điểm $L(24; 52; 0)$ và ngay sau đó được định vị tại $P(20; 42; 2)$. Cùng lúc đó một trực thăng xuất phát từ căn cứ được đặt tại điểm $F(20; -8; 0)$ bay thẳng theo hướng đến đỉnh núi $S(-4; 32; 16)$. Mặt trước của một bức tường sương mù được giới hạn bởi mặt phẳng đi qua 3 điểm $A(16; 0; 0)$, $B(0; 16; 0)$ và $C(0; 0; 16)$. Trên đường bay của khinh khí cầu và trực thăng, có một điểm giao nhau gọi là điểm M.



a. Phương trình mặt phẳng (ABC) là $x + y + z - 16 = 0$.

b. Khinh khí cầu sẽ chạm với bức tường sương mù tại điểm $N(a; b; c)$, khi đó $a + 2b + 3c = 44$.

c. Điểm M có hoành độ nhỏ hơn 6.

d. Khoảng cách từ điểm giao nhau đến mặt phẳng chứa bức tường sương mù nằm trong khoảng 4000 đến 6500 mét.

Hướng dẫn giải. **a) Đúng.**

Mặt phẳng sương mù (ABC) đi qua 3 điểm $A(16; 0; 0)$, $B(0; 16; 0)$ và $C(0; 0; 16)$ nên có phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn là: $\frac{x}{16} + \frac{y}{16} + \frac{z}{16} = 1 \Leftrightarrow x + y + z = 16 \Leftrightarrow x + y + z - 16 = 0$.

b) Sai.

Khinh khí cầu sẽ chạm với bức tường sương mù tại điểm giao giữa đường thẳng LP và mặt phẳng (ABC). Khinh khí cầu bay thẳng từ $L(24; 52; 0)$ đến $P(20; 42; 2)$. Nên đường bay của khinh khí cầu là đường thẳng LP. Ta có $\overrightarrow{LP} = (-4; -10; 2)$. Khi đó, ta chọn $\vec{u}_1 = (2; 5; -1)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng LP. Suy ra phương trình đường thẳng LP là: $\begin{cases} x = 24 + 2t \\ y = 52 + 5t \\ z = -t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

$N \in LP$ suy ra $N(24 + 2t; 52 + 5t; -t)$. Mà $N \in (ABC)$ nên ta có: $24 + 2t + 52 + 5t + (-t) - 16 = 0 \Leftrightarrow 6t + 60 = 0 \Leftrightarrow t = -10$. Suy ra $N(4; 2; 10) \Rightarrow a + 2b + 3c = 4 + 2.2 + 3.10 = 38 \neq 44$.

c) Sai.

Vì M là điểm giao nhau của khinh khí cầu và trực thăng nên $M \in FS \cap LP$. Vì $M \in LP$

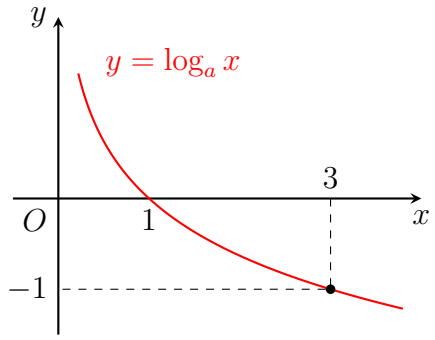
nên $M(24+2t;52+5t;-t)$. Ta có vectơ chỉ phương của đường thẳng FS là $\overrightarrow{FS}=(-24;40;16)$. Chọn $\vec{u}_2=(3;-5;-2)$ làm một vectơ chỉ phương của đường thẳng FS. Suy ra phương trình đường thẳng FS là: $\begin{cases}x=20+3k\\y=-8-5k\\z=-2k\end{cases},k\in\mathbb{R}$. Vì $M\in FS$ nên ta có hệ: $\begin{cases}24+2t=20+3k\\52+5t=-8-5k\\-t=-2k\end{cases}\Leftrightarrow$

$\begin{cases}2t-3k=-4\\5t+5k=-60\\-t+2k=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=-8\\k=-4\end{cases}\Rightarrow M(8;12;8)$. Vậy điểm M có hoành độ bằng 8.

d) Sai.

Áp dụng công thức tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng, ta có: $d(M,(ABC))=\frac{|8+12+8-16|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{12}{\sqrt{3}}=4\sqrt{3}\approx 6,9282$ (km) $=6928,2$ (m). Vì $6928,2\notin(4000;6500)$ nên nhận định này sai.

Bài 64. Cho hàm số $y=f(x)=\log_a x$ với $a>0$ và $a\neq 1$ có đồ thị như hình vẽ bên.



a. Tập xác định của hàm số $f(x)$ là $D=(-\infty;+\infty)$.

b. Đồ thị hàm số $f(x)$ đi qua điểm $(-1;3)$.

c. $a=\frac{1}{3}$.

d. Bất phương trình $f(x)\geq -2$ có 9 nghiệm nguyên.

Hướng dẫn giải. **a) Sai.**

Điều kiện xác định của hàm số $y=f(x)=\log_a x$ với $a>0$ và $a\neq 1$ là $x>0$.
Suy ra tập xác định của hàm số $f(x)$ là $D=(0;+\infty)$.

b) Sai.

Dựa vào hình vẽ, ta thấy đồ thị hàm số $f(x)$ đi qua điểm $(3;-1)$ và không đi qua điểm $(-1;3)$. (Hơn nữa $x=-1$ không nằm trong tập xác định).

c) Đúng.

Vì đồ thị hàm số $f(x)$ đi qua điểm $(3;-1)$ nên ta có $f(3)=-1$
$\Leftrightarrow\log_a 3=-1\Leftrightarrow 3=a^{-1}\Leftrightarrow a=\frac{1}{3}$.

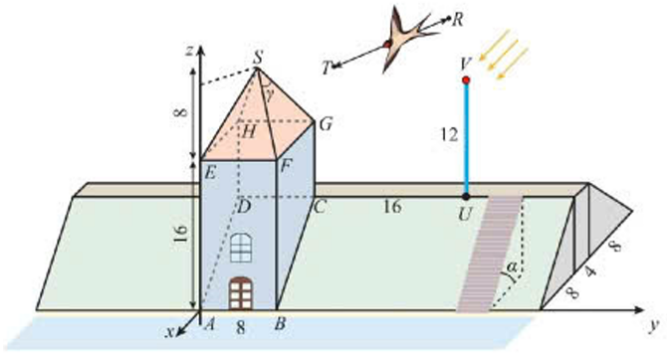
d) Đúng.

$f(x)\geq -2\Leftrightarrow\log_{\frac{1}{3}}x\geq -2$
$\Leftrightarrow x\leq\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$ (vì cơ số $0<\frac{1}{3}<1$ nên ở bước này ta đổi chiều bất đẳng thức)
$\Leftrightarrow x\leq 9$.

Kết hợp với điều kiện $\begin{cases}x>0\\x\in\mathbb{Z}\end{cases}$ ta suy ra $x\in\{1;2;3;\ldots;9\}$.

Vậy bất phương trình $f(x)\geq -2$ có 9 nghiệm nguyên.

Bài 65. Một con đê có tiết diện là một hình thang cân với độ dài đáy lớn bằng 20 mét, độ dài đáy bé 4 mét, chiều cao là 8 mét. Ở sườn phía trước của một con đê có một tòa tháp với phần thân là hình hộp chữ nhật cao 16 mét với đáy là hình vuông cạnh bằng 8 mét, phần mái nhà cao 8 mét có dạng hình chóp tứ giác đều $S.EFGH$. Trên hệ tọa độ $Oxyz$, đơn vị trên mỗi trục tính bằng mét, mặt đất trùng với mặt phẳng (Oxy), điểm A trùng với gốc tọa độ, tia Oy cùng hướng với tia AB, tia Oz hướng lên (tham khảo như hình vẽ). Một con chim bay thẳng theo một đường thẳng, lần lượt đi qua các vị trí $R(-13;17;25)$ và $T(-9;9;23)$, tiếp mái tại một điểm Q trong tam giác SHG.



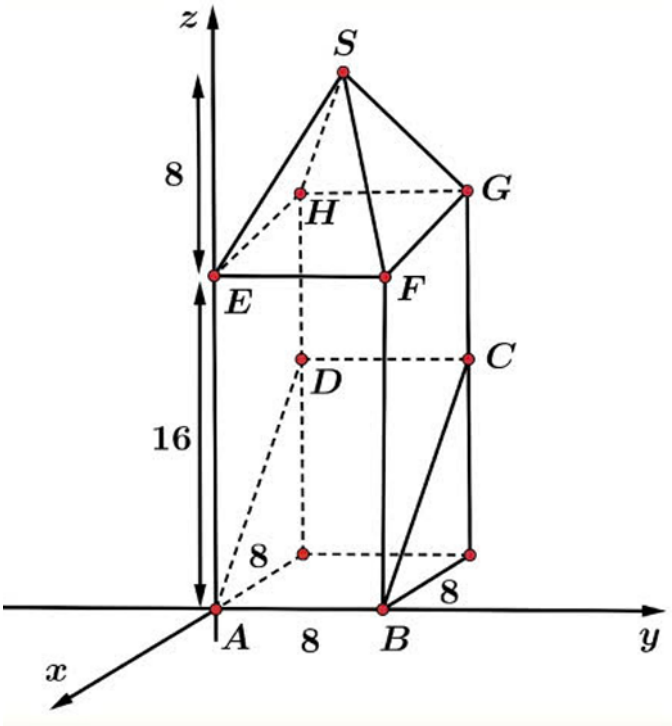
a. Đỉnh của mái nhà có tọa độ $S(-4;4;24)$.

b. Phương trình mặt phẳng (SHG) đi qua điểm $M(3;12;8)$.

c. Điểm $Q(a;b;c)$, khi đó $2(a-b)\geq c$.

d. Điểm Q cách mặt phẳng chứa sườn dốc phía trước một khoảng nhỏ hơn 20 mét.

Hướng dẫn giải.



a) Đúng.

Mái nhà là hình chóp tứ giác đều $S.EFGH$ nên hình chiếu của S xuống mặt đáy $(EFGH)$ là

tâm I của hình vuông $EFGH$. Từ cách gắn hệ trục, ta có $E(0;0;16)$, $F(0;8;16)$, $G(-8;8;16)$, $H(-8;0;16)$. Tâm I là trung điểm $EG \Rightarrow I(-4;4;16)$. Vì S cao hơn đáy 8m nên cao độ $s = 16+8 = 24$. Vậy $S(-4;4;24)$.

b) Sai.

Ta có $H(-8;0;16), S(-4;4;24), G(-8;8;16)$.
Vectơ chỉ phương: $\overrightarrow{HS} = (4;4;8) // (1;1;2)$ và $\overrightarrow{HG} = (0;8;0) // (0;1;0)$.
Vectơ pháp tuyến $\vec{n} = [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (-2;0;1)$.
Phương trình mặt phẳng (SHG): $-2(x+8)+1(z-16) = 0 \Leftrightarrow -2x+z-32 = 0$.
Thay $M(3;12;8)$ vào: $-2(3)+8-32 = -30 \neq 0$. Vậy $M \notin (SHG)$.

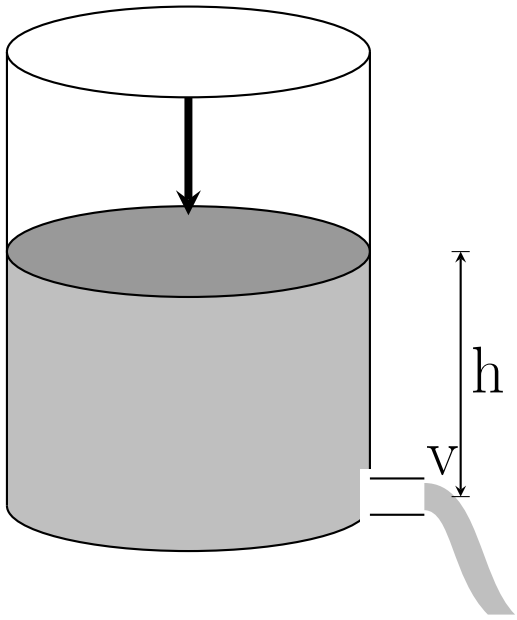
c) Sai.

Đường thẳng RT đi qua $T(-9;9;23)$ và có VTCP $\overrightarrow{RT} = (4;-8;-2) // (2;-4;-1)$.
PTTS: $x = -9+2t, y = 9-4t, z = 23-t$.
Giao điểm Q với mặt phẳng (SHG): $-2(-9+2t)+(23-t)-32 = 0 \Rightarrow 9-5t = 0 \Rightarrow t = 1,8$.
Suy ra $Q(-5,4;1,8;21,2)$. Ta có $2(a-b) = 2(-5,4-1,8) = -14,4$.
Vì $-14,4 < 21,2$ nên $2(a-b) < c$.

d) Đúng.

Mặt phẳng sườn dốc phía trước (P) đi qua $A(0;0;0), B(0;8,0)$ và đỉnh đê $D'(-8;0;8)$.
$\overrightarrow{AB} = (0;8;0), \overrightarrow{AD'} = (-8;0;8)$. VTPT $\vec{n}_P = (1;0;1)$.
Phương trình $(P): x+z = 0$.
Khoảng cách $d(Q,(P)) = \frac{|-5,4+21,2|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{15,8}{\sqrt{2}} \approx 11,17 < 20$ m.

Bài 66. Một bể ban đầu chứa đầy nước, bể có dạng hình trụ với chiều cao bằng 9 m và bán kính đáy bằng 2 m. Nước bắt đầu chảy ra từ một vòi nước ở đáy bể. Gọi $V(t)$ là thể tích chất lỏng đã thoát ra tại thời điểm t (phút) sau khi mở vòi thì $V'(t) = k(45-t)$ với $(k \in \mathbb{R}, 0 \leq t \leq 45)$. Biết sau 15 phút mực nước còn lại trong bể cao 4 m và công thức tính thể tích hình trụ là $V = \pi r^2 h$.



a. Hàm số $f(t) = k(45-t)$ là một nguyên hàm của hàm số $V(t)$.

b. $V(t) = k\left(45t - \frac{t^2}{2}\right) + C$, với $0 \leq t \leq 45$ và k, C là các hằng số.

c. $k = -0,11$ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

d. Sau 42 phút, thể tích chất lỏng còn lại trong bể bằng 503 lít (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Hướng dẫn giải. **a) Sai.**

Theo định nghĩa: $F(t)$ là nguyên hàm của $f(t)$ nếu $F'(t) = f(t)$.

Ở đây $V'(t) = k(45 - t)$, nên $V(t)$ mới là nguyên hàm của $f(t) = k(45 - t)$, không phải ngược lại.

b) Đúng.

Ta có $V(t) = \int V'(t)dt = \int k(45 - t)dt = k\int(45 - t)dt = k\left(45t - \frac{t^2}{2}\right) + C$.

c) Sai.

- Tại thời điểm ban đầu ($t = 0$), thể tích nước thoát ra bằng 0, nên $V(0) = 0 \Rightarrow C = 0$.
- Sau 15 phút, mực nước còn lại cao 4 m, trong khi bể cao 9 m. Vậy chiều cao của khối nước đã thoát ra là $9 - 4 = 5$ (m).
- Thể tích nước thoát ra sau 15 phút là: $V(15) = \pi \cdot r^2 \cdot h_{thot} = \pi \cdot 2^2 \cdot 5 = 20\pi$ (m^3).
- Thay vào công thức $V(t)$: $k\left(45 \cdot 15 - \frac{15^2}{2}\right) = 20\pi \Leftrightarrow 562,5k = 20\pi \Rightarrow k = \frac{20\pi}{562,5} \approx 0,1117$.

Giá trị k phải dương (vì thể tích thoát ra tăng theo thời gian). Do đó mệnh đề $k = -0,11$ là sai.

d) Đúng.

- Thể tích nước ban đầu của bể là $V_{\text{Ø}y} = \pi \cdot 2^2 \cdot 9 = 36\pi$ (m^3).
- Thể tích nước thoát ra sau 42 phút là:

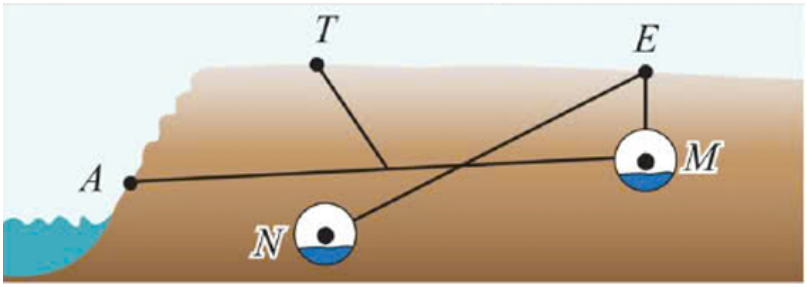
$V(42) = \frac{20\pi}{562,5}\left(45 \cdot 42 - \frac{42^2}{2}\right) = \frac{20\pi}{562,5} \cdot 1008 = 35,84\pi$ (m^3).

- Thể tích nước còn lại trong bể:

$V_{cn} = 36\pi - 35,84\pi = 0,16\pi \approx 0,5026548$ (m^3).

- Đổi sang lít (1 m^3 = 1000 lít): $V_{cn} \approx 0,5026548 \cdot 1000 \approx 503$ (lít).

Bài 67. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, đơn vị trên các trục tọa độ tính bằng 100 m, mặt đất nằm trên mặt phẳng (Oxy). Hai bể chứa nước M và N nằm ở các vị trí $M(8;12;-6)$ và $N(14;2;-10)$. Một kênh tràn k dẫn nước từ bể chứa M đến $A(11;0;-9)$. Trên bề mặt, từ điểm $T(8;2;0)$, một mũi khoan thông gió được thực hiện theo hướng vectơ $\vec{v} = (1;1;-4)$. Ngoài ra, hai đường ống cung cấp nước được lên kế hoạch xây dựng và khoan từ điểm E (nằm trên mặt đất) đến hai bể chứa nước (tham khảo như hình vẽ).



a) Gọi H là vị trí mũi khoan thông gió chạm đến kênh tràn, khi đó $H(8+a;2+a;-4a)$ $(a \in \mathbb{R})$.

b) Chiều dài của mũi khoan thông gió nằm trong khoảng 840 đến 850 mét.

c) Ống cung cấp nước EN có khả năng va chạm với kênh tràn k.

d) Biết rằng tiến độ xây dựng ống cung cấp nước là 20 cm/phút, thời gian tối thiểu để xây dựng xong hai đường ống cung cấp nước là 165 giờ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của giờ).

Hướng dẫn giải. **Xét ý a):** Điểm T có tọa độ $(8;2;0)$. Mũi khoan thông gió TH được thực hiện từ T theo hướng vectơ $\vec{v} = (1;1;-4)$.

Gọi $H(x;y;z)$ là điểm thuộc mũi khoan, ta có $\overrightarrow{TH} = a \cdot \vec{v}$ với $a > 0$.

$\Rightarrow (x-8;y-2;z-0)=a(1;1;-4) \Leftrightarrow \begin{cases} x=8+a \\ y=2+a \\ z=-4a \end{cases}$ Vậy $H(8+a;2+a;-4a)$.

$\Rightarrow$ Ý a) **Đúng**.

Xét ý b): Kênh tràn k nằm trên đường thẳng AM. Ta có $\overrightarrow{MA}=(11-8;0-12;-9-(-6))=(3;-12;-3)$. Chọn vectơ chỉ phương của đường thẳng AM là $\vec{u}=(1;-4;-1)$. Phương trình đường thẳng AM đi qua $M(8;12;-6)$ là: $\begin{cases} x=8+t \\ y=12-4t \\ z=-6-t \end{cases}$

Vì $H \in AM$, ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 8+a=8+t \\ 2+a=12-4t \\ -4a=-6-t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-t=0 \\ a+4t=10 \\ 4a-t=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ t=2 \end{cases}$$

Suy ra $H(10;4;-8)$.

Độ dài đại số $TH=\sqrt{(10-8)^2+(4-2)^2+(-8-0)^2}=\sqrt{2^2+2^2+(-8)^2}=\sqrt{72}=6\sqrt{2}$ (đơn vị tọa độ).

Vì đơn vị là 100 m nên chiều dài thực tế là: $100\cdot 6\sqrt{2}\approx 848,53$ (m). Giá trị này nằm trong khoảng $(840;850)$. $\Rightarrow$ Ý b) **Đúng**.

Xét ý c): Vectơ chỉ phương của kênh tràn AM là $\vec{u}_1=(1;-4;-1)$.

Vectơ $\overrightarrow{AN}=(14-11;2-0;-10-(-9))=(3;2;-1)$.

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (AMN) là $\vec{n}=[\vec{u}_1,\overrightarrow{AN}]=(2;2;14)//(1;1;7)$. Mặt phẳng (AMN) không song song với mặt đất $(Oxy):z=0$ (vì vectơ pháp tuyến khác phương).

Do đó giao tuyến d của (AMN) và (Oxy) tồn tại. Nếu điểm E nằm trên giao tuyến d, thì E,A,M,N đồng phẳng. Khi đó đường thẳng EN và AM (kênh k) nằm trong cùng một mặt phẳng và có khả năng cắt nhau (va chạm). $\Rightarrow$ Ý c) **Đúng**.

Xét ý d): Để thời gian xây dựng hai đường ống EM và EN là tối thiểu thì tổng độ dài $S=EM+EN$ phải nhỏ nhất (E thuộc mặt đất $z=0$).

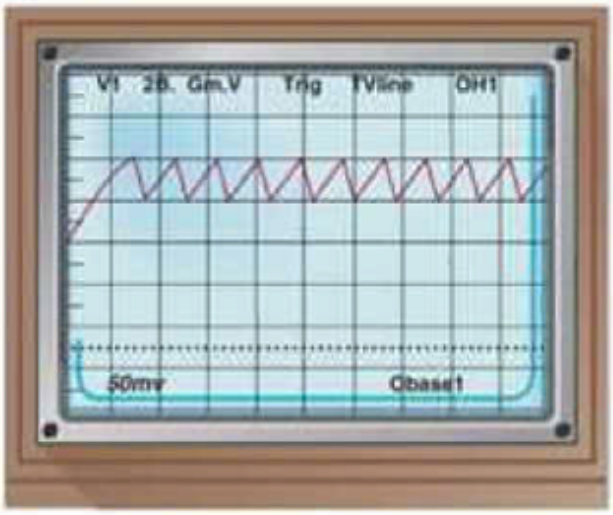
Lấy $M'(8;12;6)$ là điểm đối xứng của $M(8;12;-6)$ qua mặt phẳng (Oxy). Khi đó $EM+EN=EM'+EN\geq M'N$.

Giá trị nhỏ nhất là $M'N=\sqrt{(14-8)^2+(2-12)^2+(-10-6)^2}=\sqrt{6^2+(-10)^2+(-16)^2}=\sqrt{392}=14\sqrt{2}$ (đơn vị tọa độ).

Chiều dài thực tế: $L=14\sqrt{2}\cdot 100\approx 1979,9$ (m) $=197990$ (cm). Thời gian xây dựng: $T=\frac{197990}{20}=9899,5$ (phút) $\approx \frac{9899,5}{60}\approx 164,99$ (giờ).

Làm tròn đến hàng đơn vị là 165 giờ. $\Rightarrow$ Ý d) **Đúng**.

Bài 68. Một máy hiện sóng thường hiển thị một đường cong răng cưa. Đường cong này có dạng hình sin với các chu kỳ và biên độ thay đổi (như hình vẽ). Nhà khoa học đã mô hình hóa chu kì đầu tiên của sóng đó qua phương trình $y=\frac{1}{2}\sin(2\pi x)+\frac{1}{4}\sin(4\pi x)$ với x (giây) là thời gian truyền sóng và $x\in[0;1]$, y là độ cao của sóng có đơn vị cm.



a) $y(0) = y(1) = 0$.

b) Ta có đạo hàm $y' = \cos(2\pi x) + \cos(4\pi x)$.

c) Trong giây đầu tiên, tốc độ chuyển động của sóng bằng 0 tại 2 thời điểm.

d) Trong giây đầu tiên, sóng cao nhất bằng $6,5$ mm (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Hướng dẫn giải. **a) Đúng.**

Xét hàm số $y = \frac{1}{2}\sin(2\pi x) + \frac{1}{4}\sin(4\pi x)$. Ta có:
$y(0) = \frac{1}{2}\sin(2\pi \cdot 0) + \frac{1}{4}\sin(4\pi \cdot 0) = \frac{1}{2}\sin 0 + \frac{1}{4}\sin 0 = 0.$
$y(1) = \frac{1}{2}\sin(2\pi \cdot 1) + \frac{1}{4}\sin(4\pi \cdot 1) = \frac{1}{2}\sin 2\pi + \frac{1}{4}\sin 4\pi = 0 + 0 = 0.$
Vậy $y(0) = y(1) = 0$.

b) Sai.

Ta có đạo hàm của hàm số:
$y' = \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot \cos(2\pi x) + \frac{1}{4} \cdot 4\pi \cdot \cos(4\pi x) = \pi\cos(2\pi x) + \pi\cos(4\pi x) = \pi[\cos(2\pi x) + \cos(4\pi x)].$
So với mệnh đề ở câu b, đạo hàm thiếu thừa số π.

c) Sai.

Tốc độ chuyển động của sóng bằng 0 khi $y' = 0$:
$\pi[\cos(2\pi x) + \cos(4\pi x)] = 0 \Leftrightarrow \cos(4\pi x) = -\cos(2\pi x) \Leftrightarrow \cos(4\pi x) = \cos(\pi - 2\pi x)$
Sử dụng công thức tổng thành tích: $2\pi\cos(3\pi x)\cos(\pi x) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos(3\pi x) = 0\\ \cos(\pi x) = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3\pi x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi\\ \pi x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{1}{6} + \dfrac{k}{3}\\ x = \dfrac{1}{2} + k\end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$$

Vì $x \in [0;1]$, các giá trị x thỏa mãn là: $x = \frac{1}{6}; x = \frac{1}{2}; x = \frac{5}{6}$.
Vậy có 3 thời điểm tốc độ bằng 0, không phải 2.

d) Đúng.

Để tìm độ cao lớn nhất, ta tính giá trị của y tại các điểm tới hạn và hai đầu mút:
$y(0) = y(1) = 0.$
$y\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{2}\sin\left(2\pi \cdot \frac{1}{6}\right) + \frac{1}{4}\sin\left(4\pi \cdot \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{8} \approx 0,65$ cm.
$y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sin\pi + \frac{1}{4}\sin 2\pi = 0.$
$y\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{1}{2}\sin\frac{5\pi}{3} + \frac{1}{4}\sin\frac{10\pi}{3} = \frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{4}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{8}.$
Độ cao lớn nhất là $y_{\max} \approx 0,65$ cm $= 6,5$ mm tại thời điểm $x = \frac{1}{6}$ giây.

Bài 69. Trong một lớp có 40 học sinh, người ta khảo sát sở thích uống nước của các bạn. Kết quả thu được như sau:

- 25 bạn thích uống trà sữa.
- 18 bạn thích uống nước cam.
- 10 bạn thích cả hai loại trên.

a) Số học sinh chỉ thích trà sữa là 15 học sinh.

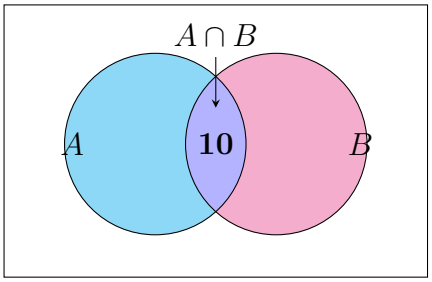
b) Số học sinh chỉ thích nước cam là 9 học sinh.

c) Số học sinh không thích cả hai loại đồ uống trên là 7 học sinh.

d) Chọn ra một học sinh trong lớp, biết rằng học sinh đó không thích trà sữa, xác suất để học sinh đó cũng không thích nước cam là $\frac{8}{15}$.

Hướng dẫn giải. Gọi A là tập hợp các học sinh thích trà sữa; B là tập hợp các học sinh thích nước cam. Từ giả thiết đề bài, ta có $n(A) = 25$; $n(B) = 18$; $n(A \cap B) = 10$.

Ta có biểu đồ Ven biểu diễn hai tập A và B như sau:



Vùng trắng trong hình là số học sinh không thích cả hai loại đồ uống

a) Đúng.

Từ biểu đồ Ven, số học sinh chỉ thích trà sữa (vùng chỉ có màu xanh dương) là:
$n(A \setminus B) = n(A) - n(A \cap B) = 25 - 10 = 15$.

b) Sai.

Tương tự, ta suy ra được số học sinh chỉ thích nước cam (vùng chỉ có màu tím) là:
$n(B \setminus A) = n(B) - n(A \cap B) = 18 - 10 = 8$.
Mệnh đề ghi 9 học sinh là sai.

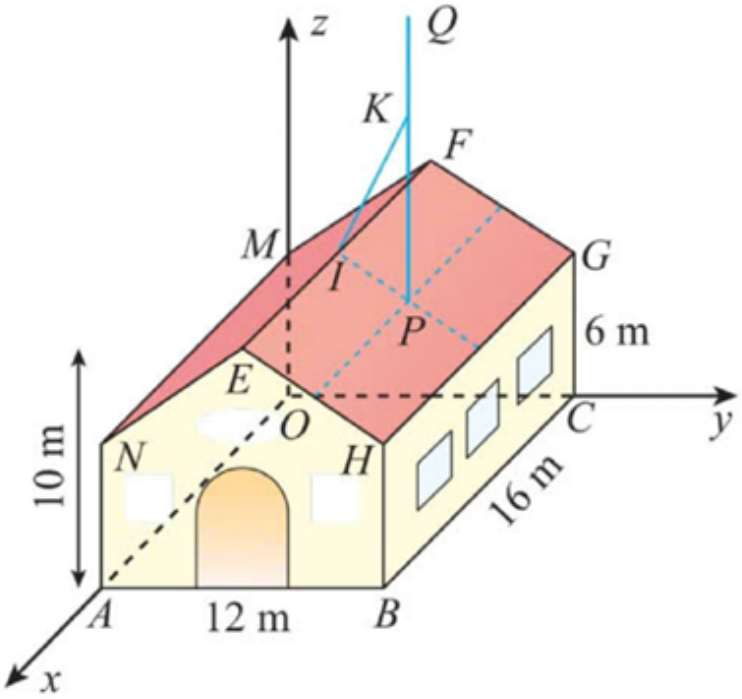
c) Đúng.

Số học sinh thích ít nhất một loại đồ uống là:
$n(A \cup B) = n(A \setminus B) + n(B \setminus A) + n(A \cap B) = 15 + 8 + 10 = 33$ (học sinh).
Số học sinh không thích cả hai loại đồ uống trên là:
$40 - 33 = 7$ (học sinh).

d) Sai.

Yêu cầu bài toán: Tính xác suất có điều kiện $P(\overline{B}|\overline{A})$.
Ta có số học sinh không thích trà sữa là $n(\overline{A}) = 40 - n(A) = 40 - 25 = 15$.
Số học sinh vừa không thích trà sữa vừa không thích nước cam chính là số học sinh không thích cả hai loại đồ uống (đã tính ở câu c): $n(\overline{A} \cap \overline{B}) = 7$.
Vậy xác suất cần tính là:
$P(\overline{B}|\overline{A}) = \frac{n(\overline{A} \cap \overline{B})}{n(\overline{A})} = \frac{7}{15}$.
Mệnh đề ghi $\frac{8}{15}$ là sai.

Bài 70. Hình bên minh họa một nhà kho trong không gian với hai mái $EFGH$ và $EFMN$ là các hình chữ nhật có kích thước bằng nhau. Biết rằng các bức tường của nhà kho tạo thành hình hộp chữ nhật $OABC.MNHG$ với $BC = 16$ mét, $AB = 12$ mét và $OM = 6$ mét. Trung điểm I của EF (đỉnh mái nhà) cách đáy nhà kho 10 mét. Chọn hệ tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ với điểm A thuộc tia Ox, C thuộc tia Oy, M thuộc tia Oz. Một Ăngten PQ cao 12 mét được đặt thẳng đứng tại tâm của mái $EFGH$.



a) Điểm I có tọa độ là $I(6;8;10)$.

b) Hai mái của nhà kho đều tạo với mặt đáy một góc lớn hơn $30°$.

c) Đỉnh Q của Ăngten có tọa độ là $Q(9;8;20)$.

d) Ăngten được cố định bằng một sợi IK dài 7 mét, nối từ điểm I đến điểm K (K thuộc đoạn PQ). Vậy khoảng cách QK nhỏ hơn $3,5$ mét.

Hướng dẫn giải. Dựa vào hình vẽ và các dữ kiện đề bài, ta xác định tọa độ các điểm như sau:

- Gốc tọa độ $O(0;0;0)$. Các trục Ox, Oy, Oz lần lượt đi qua A, C, M.

- Theo nhãn trên hình vẽ: đoạn OA tương ứng với chiều dài 16 m ($BC = 16$), đoạn OC tương ứng với chiều rộng 12 m ($AB = 12$), và $OM = 6$ m là chiều cao tường.

- Vậy: $A(16;0;0)$, $C(0;12;0)$, $B(16;12;0)$, $M(0;0;6)$, $N(16;0;6)$, $G(0;12;6)$, $H(16;12;6)$.

Điểm I là trung điểm của đỉnh mái EF. Hình chiếu của I trên mặt phẳng (Oxy) là tâm của hình chữ nhật $OABC$.

Tọa độ hình chiếu là: $I'(\frac{16+0}{2}; \frac{12+0}{2}; 0) = (8;6;0)$.

Vì I cách đáy 10 m nên cao độ $z_I = 10$. Vậy $I(8;6;10)$.

Mệnh đề ghi $I(6;8;10)$ là **Sai**.

Đường đỉnh mái EF song song với trục Ox và đi qua điểm $(8;6;10)$. Do đó $E(0;6;10)$ và $F(16;6;10)$.

Gọi α là góc tạo bởi mái nhà và mặt đáy. Xét tam giác vuông tạo bởi đỉnh mái, tường và phương ngang:

Chiều cao từ đỉnh mái đến mặt tường là $h = 10 - 6 = 4$ m.

Khoảng cách ngang từ đỉnh mái đến tường bên là $d = \frac{OC}{2} = \frac{12}{2} = 6$ m.

Ta có: $\tan\alpha = \frac{h}{d} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \Rightarrow \alpha \approx 33,7°$.

Vì $33,7° > 30°$ nên mái nhà tạo với đáy góc lớn hơn $30°$. Vậy ý b) **Đúng**.

Mái $EFGH$ có các đỉnh: $E(0;6;10), F(16;6;10), G(0;12;6), H(16;12;6)$.

Tâm P của hình chữ nhật $EFGH$ là trung điểm của FH (hoặc EG):

$P = \left(\frac{16+16}{2}; \frac{6+12}{2}; \frac{10+6}{2}\right) = (16;9;8)$ là sai dựa trên hình vẽ (P phải ở giữa nhà theo phương Ox).

Thực tế P là trung tâm vùng mái bên phải: $x_P = \frac{0+16}{2} = 8$; $y_P = \frac{6+12}{2} = 9$; $z_P = \frac{10+6}{2} = 8$. Vậy $P(8;9;8)$.

Ăngten PQ thẳng đứng, cao 12 m nên đỉnh Q có tọa độ: $Q(8;9;8+12) = (8;9;20)$. Mệnh đề ghi $Q(9;8;20)$ là **Sai**.

Điểm K thuộc đoạn PQ nên K có tọa độ $(8;9;k)$ với $8 \le k \le 20$.

Độ dài $IK = 7 \Leftrightarrow IK^2 = 49$.

$\Leftrightarrow (8-8)^2 + (9-6)^2 + (k-10)^2 = 49 \Leftrightarrow 0 + 9 + (k-10)^2 = 49 \Leftrightarrow (k-10)^2 = 40 \Rightarrow k = 10 + \sqrt{40} = 10 + 2\sqrt{10} \approx 16,325$ (m).

Khoảng cách $QK = |z_Q - z_K| = |20 - (10 + 2\sqrt{10})| = 10 - 2\sqrt{10} \approx 3,675$ (m).

Vì $3,675 > 3,5$ nên mệnh đề nói QK nhỏ hơn 3,5 m là **Sai**.

Bài 71. Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 4$ có đồ thị (C). Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = \mathbb{R}$ và $y' = -3x^3 + 6x$.

b) Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

c) Đồ thị (C) có hai điểm cực trị và phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị là $2x + y - 4 = 0$.

d) Diện tích của tam giác OAB bằng 4, với O là gốc tọa độ và A, B là các điểm cực trị của (C).

Hướng dẫn giải. Xét hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 4$.

Tập xác định của hàm số đa thức luôn là $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
Đạo hàm của hàm số: $y' = (-x^3 + 3x^2 + 4)' = -3x^2 + 6x$.
Mệnh đề ghi $y' = -3x^3 + 6x$ là **Sai** (sai số mũ của biến x).

Cho $y' = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow -3x(x-2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu y':

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	

Trong khoảng $(0;2)$, ta thấy $y' > 0$ nên hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$.
Vậy ý b) **Đúng**.

Từ bảng xét dấu, hàm số có hai điểm cực trị là:

- Điểm cực tiểu: $x = 0 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow A(0;4)$.
- Điểm cực đại: $x = 2 \Rightarrow y = -(2)^3 + 3(2)^2 + 4 = 8 \Rightarrow B(2;8)$.

Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị $A(0;4)$ và $B(2;8)$:
$\frac{x-0}{2-0} = \frac{y-4}{8-4} \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{y-4}{4} \Leftrightarrow 2x = y - 4 \Leftrightarrow 2x - y + 4 = 0$.
Mệnh đề ghi phương trình là $2x + y - 4 = 0$ là **Sai** (sai dấu của biến y).

Tọa độ các điểm cực trị là $A(0;4)$, $B(2;8)$ và gốc tọa độ $O(0;0)$.
Diện tích tam giác OAB được tính theo công thức:
$S_{OAB} = \frac{1}{2}|x_A y_B - x_B y_A| = \frac{1}{2}|0 \cdot 8 - 2 \cdot 4| = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4$.
(Hoặc có thể thấy cạnh $OA = 4$ nằm trên trục Oy, chiều cao từ B xuống OA chính là $|x_B| = 2 \Rightarrow S = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 = 4$).
Vậy ý d) **Đúng**.

Kết luận: a) S, b) Đ, c) S, d) Đ.

Bài 72. Hiện nay, thời gian sử dụng điện thoại của học sinh quá nhiều dẫn đến suy giảm thị lực. Trung tâm Mắt Kính Đức Thành Trà Kiệu tổ chức khám sàn lọc miễn phí cho 100 học sinh của một trường THPT trên địa bàn huyện để kiểm tra tình trạng cận thị của học sinh và thu được mẫu số liệu sau:

Mức độ cận thị (Đơn vị diop)	$[0;0,5)$	$[0,5;1,0)$	$[1,0;1,5)$	$[1,5;2,0)$	$[2,0;2,5)$
Số học sinh	20	15	30	20	15

Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) Giá trị đại diện của nhóm chứa Mốt là $1,25$.

b) Độ cận trung bình (đơn vị diop) của 100 học sinh là $1,26$.

c) Trung vị của mẫu số liệu là $M_e = 1,26$.

d) Phương sai của mẫu số liệu là $s^2 = 0,4389$.

Hướng dẫn giải. Tổng số học sinh là $n = 20 + 15 + 30 + 20 + 15 = 100$. Bảng giá trị đại diện x_i của các nhóm:

- Nhóm $[0;0,5)$ có $x_1 = 0,25$.
- Nhóm $[0,5;1,0)$ có $x_2 = 0,75$.
- Nhóm $[1,0;1,5)$ có $x_3 = 1,25$.
- Nhóm $[1,5;2,0)$ có $x_4 = 1,75$.
- Nhóm $[2,0;2,5)$ có $x_5 = 2,25$.

Nhóm chứa mốt là nhóm có tần số lớn nhất. Ở đây $n_3 = 30$ là tần số lớn nhất, nên nhóm chứa mốt là $[1,0;1,5)$.

Giá trị đại diện của nhóm này là $x_3 = \frac{1,0+1,5}{2} = 1,25$. Vậy ý a) **Đúng**.

Độ cận trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là:

$\bar{x} = \frac{20 \cdot 0,25 + 15 \cdot 0,75 + 30 \cdot 1,25 + 20 \cdot 1,75 + 15 \cdot 2,25}{100}$

$\bar{x} = \frac{5 + 11,25 + 37,5 + 35 + 33,75}{100} = \frac{122,5}{100} = 1,225$.

Vì $1,225 \neq 1,26$ nên ý b) **Sai**.

Vị trí trung vị là $\frac{n}{2} = 50$.

Cộng dồn tần số: 20 (nhóm 1), $20 + 15 = 35$ (nhóm 2), $35 + 30 = 65$ (nhóm 3). Vậy nhóm chứa trung vị là nhóm thứ ba $[1,0;1,5)$.

Công thức trung vị: $M_e = L + \frac{\frac{n}{2} - cf_{p-1}}{n_p} \cdot w = 1,0 + \frac{50-35}{30} \cdot 0,5 = 1,0 + 0,25 = 1,25$.

Vì $1,25 \neq 1,26$ nên ý c) **Sai**.

Tính phương sai theo công thức $s^2 = \frac{1}{n}\sum n_i x_i^2 - \bar{x}^2$:

$\sum n_i x_i^2 = 20 \cdot 0,25^2 + 15 \cdot 0,75^2 + 30 \cdot 1,25^2 + 20 \cdot 1,75^2 + 15 \cdot 2,25^2$

$= 1,25 + 8,4375 + 46,875 + 61,25 + 75,9375 = 193,75.$

$s^2 = \frac{193,75}{100} - (1,225)^2 = 1,9375 - 1,500625 = 0,436875.$

Làm tròn đến 4 chữ số thập phân ta được $s^2 \approx 0,4369$.

Vì $0,4369 \neq 0,4389$ nên ý d) **Sai**.

Bài 73. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(4;2;-1)$, $B(1;-1;2)$, $C(0;-2;3)$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) $\overrightarrow{AB} = (-3;-3;3)$, $AB = 3\sqrt{3}$.

b) Ba điểm A, B, C tạo thành tam giác có trọng tâm là $G\left(\frac{5}{3};-\frac{1}{3};\frac{4}{3}\right)$.

c) Điểm $A'(4;0;0)$ là hình chiếu của điểm A lên mặt phẳng (Oyz).

d) Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng OA và AB. Khi đó $\cos\varphi = \frac{\sqrt{7}}{3}$.

Hướng dẫn giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (1-4;-1-2;2-(-1)) = (-3;-3;3)$.

Độ dài đoạn thẳng AB là: $AB = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2 + 3^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$.

Vậy ý a) **Đúng**.

Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC được tính theo công thức:

$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{4+1+0}{3} = \frac{5}{3}$. $y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{2-1-2}{3} = -\frac{1}{3}$. $z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} = \frac{-1+2+3}{3} = \frac{4}{3}$. Vậy $G\left(\frac{5}{3};-\frac{1}{3};\frac{4}{3}\right)$. Ý b) **Đúng**.

Hình chiếu của điểm $A(x;y;z)$ lên mặt phẳng (Oyz) là điểm $M(0;y;z)$.

Do đó, hình chiếu của $A(4;2;-1)$ lên mặt phẳng (Oyz) phải là $(0;2;-1)$.

Tọa độ $A'(4;0;0)$ là hình chiếu của A lên trục Ox. Vậy ý c) **Sai**.

Ta có $\overrightarrow{OA} = (4;2;-1)$ và $\overrightarrow{AB} = (-3;-3;3)$.

Góc φ giữa hai đường thẳng OA và AB được tính bởi:

$\cos\varphi = \frac{\left|\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB}\right|}{\left|\overrightarrow{OA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \frac{|4\cdot(-3)+2\cdot(-3)+(-1)\cdot 3|}{\sqrt{4^2+2^2+(-1)^2}\cdot 3\sqrt{3}}$ $\cos\varphi = \frac{|-12-6-3|}{\sqrt{21}\cdot\sqrt{27}} = \frac{21}{\sqrt{567}} = \frac{21}{9\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{3}$.

Vậy ý d) **Đúng**.

Bài 74. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, đơn vị mỗi trục là km. Máy bay M lúc đầu quan sát ($t = 0$) nó ở vị trí có tọa độ $A(3;-10;12)$. Cùng lúc đó một máy bay N đang ở vị trí có tọa độ $B(45;25;18)$. Hai máy bay này đều đang chuyển động cùng hướng với vectơ $\vec{v}(0;1;0)$. Từ điểm A, máy bay M tăng tốc với tốc độ $v(t) = \beta t + 1000$ (km/h), (trong đó t tính bằng giờ kể từ khi tăng tốc

$(0 \le t \le 10)$, β là hằng số dương nhỏ hơn 20), còn máy bay N chuyển động với vận tốc không đổi là 962 km/h. Biết rằng sau 30 phút kể từ lúc ban đầu, khoảng cách giữa hai máy bay là 45 km.

a. Khoảng cách giữa hai máy bay lúc ban đầu là 55 km.

b. Sau t (giờ) $(0 \le t \le 10)$ máy bay N đang ở vị trí có tọa độ là $(45; 25 + 962t; 18)$.

c. $\beta = 12$.

d. Khoảng cách giữa hai máy bay sau 1 giờ (kể từ thời điểm quan sát) lớn hơn 50 km.

Hướng dẫn giải. **a) Đúng.**

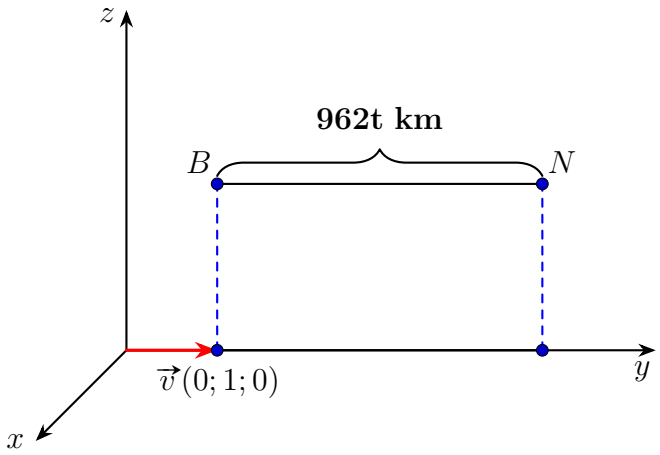
Tại thời điểm $t = 0$, vị trí hai máy bay là $A(3; -10; 12)$ và $B(45; 25; 18)$.
Khoảng cách giữa hai máy bay lúc ban đầu là:

$$AB = \sqrt{(45-3)^2 + (25+10)^2 + (18-12)^2} = \sqrt{42^2 + 35^2 + 6^2} = 55 \text{ (km)}.$$

b) Đúng.

Máy bay N chuyển động với vận tốc không đổi $v_N = 962$ km/h theo hướng $\vec{v}(0; 1; 0)$.
Sau t giờ, máy bay N đi được quãng đường $s_N = 962t$ (km).
Vì hướng chuyển động cùng phương với trục Oy, nên chỉ có tung độ thay đổi:

$$N(45; 25 + 962t; 18).$$



c) Sai.

Máy bay M chuyển động cùng hướng $\vec{v}(0; 1; 0)$ nên tọa độ sau t giờ là $M(3; -10 + s_M; 12)$.
Quãng đường máy bay M đi được là:

$$s_M = \int_0^t v(t)dt = \int_0^t (\beta t + 1000)dt = \left[\frac{\beta t^2}{2} + 1000t\right]_0^t = \frac{\beta t^2}{2} + 1000t.$$

Suy ra $M\left(3; -10 + \dfrac{\beta t^2}{2} + 1000t; 12\right)$.
Sau 30 phút ($t = 0{,}5$ h): $N(45; 25 + 962 \cdot 0{,}5; 18) \Rightarrow N(45; 506; 18)$.
$M\left(3; -10 + \dfrac{\beta(0{,}5)^2}{2} + 1000 \cdot 0{,}5; 12\right) \Rightarrow M\left(3; 490 + \dfrac{\beta}{8}; 12\right)$.
Theo giả thiết $MN = 45$:

$$\sqrt{(45-3)^2 + \left(506 - \left(490 + \frac{\beta}{8}\right)\right)^2 + (18-12)^2} = 45$$

$$\Leftrightarrow 42^2 + \left(16 - \frac{\beta}{8}\right)^2 + 6^2 = 45^2$$

$$\Leftrightarrow 1800+\left(16-\frac{\beta}{8}\right)^2=2025\Leftrightarrow\left(16-\frac{\beta}{8}\right)^2=225$$
$$\Leftrightarrow\left|16-\frac{\beta}{8}\right|=15\Rightarrow 16-\frac{\beta}{8}=15\ (\text{vì } 0<\beta<20\Rightarrow 16-\frac{\beta}{8}>0)$$
$$\Leftrightarrow\frac{\beta}{8}=1\Leftrightarrow\beta=8.$$

d) Sai.

Với $\beta=8$, tọa độ máy bay M sau t giờ là $M(3;-10+4t^2+1000t;12)$.

Sau 1 giờ ($t=1$):

$M(3;-10+4+1000;12)\Rightarrow M(3;994;12)$.

$N(45;25+962\cdot 1;18)\Rightarrow N(45;987;18)$.

Khoảng cách lúc này:

$$MN=\sqrt{(45-3)^2+(987-994)^2+(18-12)^2}=\sqrt{42^2+(-7)^2+6^2}=\sqrt{1849}=43\text{ km}.$$

Vì $43<50$ nên nhận định d sai.

Bài 75. Khi phát hiện một vật thể bay, xác suất một hệ thống radar phát cảnh báo là $0,9$ nếu vật thể bay đó là mục tiêu thật và là $0,05$ nếu đó là mục tiêu giả. Thống kê cho thấy có 99% các vật thể bay là mục tiêu giả. Radar phát hiện một vật thể bay. Gọi A là biến cố: "Hệ thống radar phát cảnh báo". Gọi B là biến cố: "Vật thể đó là mục tiêu thật". Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $P(B)=0,99$ và $P(\overline{B})=0,01$.

b) Xác suất có điều kiện $P(A|B)=0,9$.

c) Xác suất $P(A)=58,5\%$.

d) Biết rằng hệ thống radar đang phát cảnh báo khi phát hiện một vật thể bay. Xác suất vật thể đó là mục tiêu thật là $0,15$ (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Hướng dẫn giải. **a) Sai.**

Theo đề bài, có 99% các vật thể bay là mục tiêu giả, nên $P(\overline{B})=0,99$.

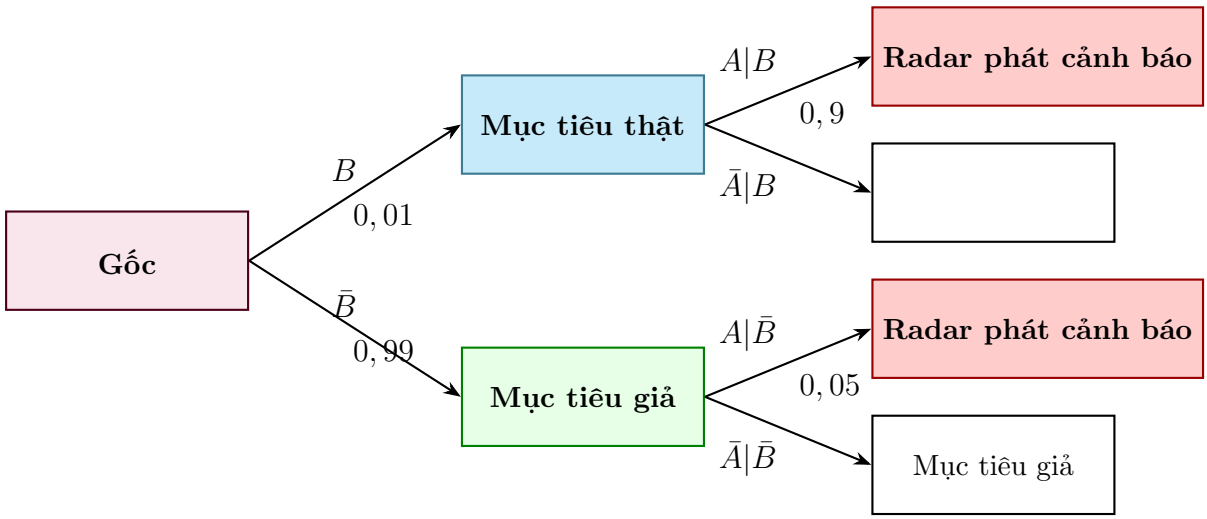
Suy ra $P(B)=1-P(\overline{B})=1-0,99=0,01$.

b) Đúng.

$P(A|B)$ là xác suất hệ thống radar phát cảnh báo khi biết vật thể bay đó là mục tiêu thật, theo giả đề bài cho bằng $0,9$.

c) Sai.

Ta có sơ đồ cây sau:



Áp dụng công thức xác suất toàn phần, ta có:
$P(A) = P(B) \cdot P(A|B) + P(\overline{B}) \cdot P(A|\overline{B})$
$P(A) = 0,01 \cdot 0,9 + 0,99 \cdot 0,05$
$P(A) = 0,009 + 0,0495 = 0,0585 = 5,85\%.$

d) Đúng.
Xác suất vật thể đó là mục tiêu thật khi biết hệ thống radar đang phát cảnh báo là $P(B|A)$.
Áp dụng công thức Bayes, ta có:
$$P(B|A) = \frac{P(B) \cdot P(A|B)}{P(A)} = \frac{0,01 \cdot 0,9}{0,0585} \approx 0,1538 \approx 0,15.$$

Bài 76. Cho hàm số $f(x) = e^{x^2} - x^2$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

a) Tập xác định của hàm số $f(x)$ là $D = (0; +\infty)$.

b) Hàm số đã cho có đạo hàm là $f'(x) = 2x \cdot e^{x^2} - 2x$.

c) Phương trình $f'(x) = 0$ có tập nghiệm là $S = \{-1; 0; 1\}$.

d) Giá trị cực tiểu của hàm số $f(x)$ bằng 1.

Hướng dẫn giải. **a) Sai.**
Hàm số $f(x) = e^{x^2} - x^2$ xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$, do đó tập xác định là $D = \mathbb{R}$.

b) Đúng.
Áp dụng công thức đạo hàm: $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ và $(e^u)' = u' \cdot e^u$.
Ta có: $f'(x) = (x^2)' \cdot e^{x^2} - (x^2)' = 2x \cdot e^{x^2} - 2x$.

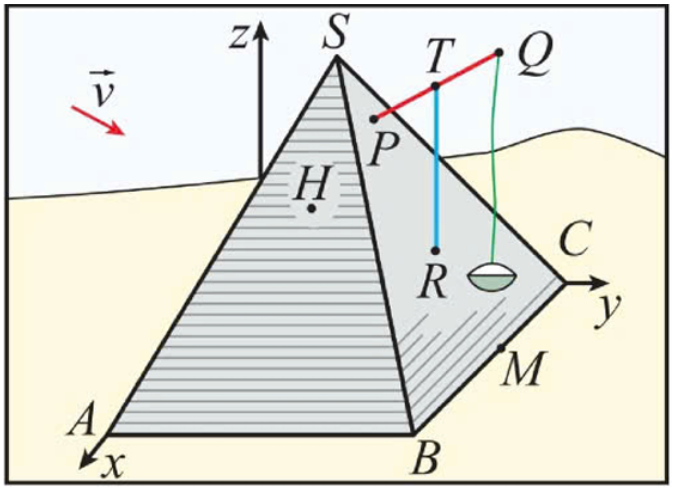
c) Sai.
Ta có: $f'(x) = 0 \iff 2x \cdot e^{x^2} - 2x = 0 \iff 2x\left(e^{x^2} - 1\right) = 0$
$$\iff \begin{bmatrix} 2x = 0 \\ e^{x^2} - 1 = 0 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} x = 0 \\ e^{x^2} = 1 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} x = 0 \\ x^2 = 0 \end{bmatrix} \iff x = 0.$$
Vậy phương trình $f'(x) = 0$ có tập nghiệm là $S = \{0\}$.

d) Đúng.
Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra giá trị cực tiểu của hàm số $f(x)$ đạt tại $x = 0$ và bằng $f(0) = e^0 - 0^2 = 1$.

Bài 77. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, đơn vị mỗi trục là mét, một kim tự tháp là hình chóp đều với đỉnh $S(50; 50; 100)$ và các điểm $A(100; 0; 0)$, $B(100; 100; 0)$, $C(0; 100; 0)$, $D(0; 0; 0)$. Một thanh dầm PQ nhô ra từ mặt BCS, nó được đỡ bằng một giá đỡ RT thẳng đứng, trong đó $T \in PQ$, $R \in (SBC)$. Biết $P(50; 60; 80)$, $Q(50; 100; 100)$, giá đỡ RT song song với trục Oz và có chiều dài là 60 mét. Các mệnh đề sau đúng hay sai?



a) Phương trình tham số của đường thẳng PQ là $\begin{cases} x = 50 \\ y = 60 + 2t \\ z = 80 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.

b) Phương trình mặt phẳng (SBC) là $2y + z - 150 = 0$.

c) Tung độ của điểm R bằng 84.

d) Tọa độ của điểm T là $T(a; b; c)$. Vậy $a + b + c = 226$.

Hướng dẫn giải. **a) Đúng.**

Ta có $\overrightarrow{PQ} = (0; 40; 20) = 20(0; 2; 1)$.

Chọn $\vec{u}_{PQ} = (0; 2; 1)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng PQ.

Đường thẳng PQ đi qua điểm $P(50; 60; 80)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}_{PQ} = (0; 2; 1)$ nên có phương trình tham số là: $\begin{cases} x = 50 \\ y = 60 + 2t \\ z = 80 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.

b) Sai.

Ta có $\overrightarrow{SB} = (50; 50; -100) = 50(1; 1; -2)$; $\overrightarrow{SC} = (-50; 50; -100) = -50(1; -1; 2)$.

Mặt phẳng (SBC) có cặp vectơ chỉ phương là $\vec{u}_1 = (1; 1; -2)$ và $\vec{u}_2 = (1; -1; 2)$.

Suy ra một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (SBC) là:

$\vec{n}_{SBC} = [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (0; -4; -2) = -2(0; 2; 1)$.

Mặt phẳng (SBC) đi qua điểm $C(0; 100; 0)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_{SBC} = (0; 2; 1)$ nên có phương trình là:

$0(x - 0) + 2(y - 100) + 1(z - 0) = 0 \iff 2y + z - 200 = 0$.

c) Đúng.

Vì $T \in PQ$ nên $T(50; 60 + 2t; 80 + t)$.

Mà RT thẳng đứng so với mặt đất nên $R(50; 60 + 2t; z_R)$.

Từ giả thiết "giá đỡ RT có chiều dài là 60 mét" và $R \in (SBC)$, ta có hệ phương trình:

$\begin{cases} RT = 60 \\ 2(60 + 2t) + z_R - 200 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (80 + t) - z_R = 60 \\ 120 + 4t + z_R - 200 = 0 \end{cases}$ (Vì RT thẳng đứng và T nằm trên R nên RT bằng cao độ của điểm T trừ đi cao độ của điểm R).

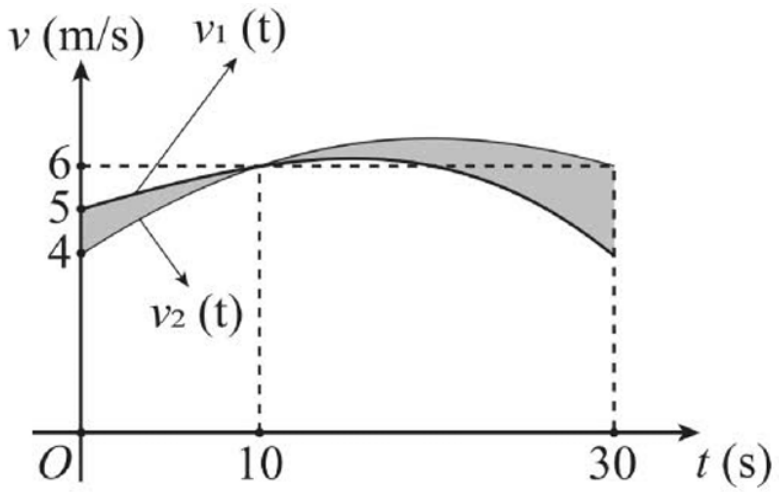
$\iff \begin{cases} t - z_R = -20 \\ 4t + z_R = 80 \end{cases} \iff \begin{cases} t = 12 \\ z_R = 32 \end{cases}$.

Vậy tung độ của điểm R bằng $60+2\cdot 12=84$.

d) Đúng.

Từ phần c, ta thu được $t=12$ suy ra tọa độ điểm T là: $T(50;60+2\cdot 12;80+12)\Rightarrow T(50;84;92)$. Khi đó $a+b+c=50+84+92=226$.

Bài 78. Có hai vận động viên A và B chạy trên một đường thẳng với vận tốc lần lượt được biểu diễn bởi đồ thị hàm số $y=v_1(t)=-\dfrac{1}{6000}t^3+\dfrac{7}{60}t+5$ (m/s) và parabol $y=v_2(t)$ (m/s) như hình vẽ. Biết rằng hai vận động viên xuất phát cùng một lúc tại cùng một vị trí.



Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

a. Diện tích phần tô đậm như hình vẽ bằng khoảng cách giữa hai vận động viên sau 30 giây kể từ lúc xuất phát.

b. $v_2(t)=-\dfrac{1}{150}(t^2-40t-600)$ (m/s).

c. Tại thời điểm 10s, vận động viên A dẫn trước vận động viên B một khoảng bằng 4,3 mét (làm tròn đến hàng phần mười).

d. Sau 30 giây, hai vận động viên cách nhau một khoảng 19,9 mét (làm tròn đến hàng phần mười).

Hướng dẫn giải. **a) Sai.**

Quãng đường vận động viên A đi được sau 30 giây là $S_1=\displaystyle\int_0^{30}v_1(t)dt$.

Quãng đường vận động viên B đi được sau 30 giây là $S_2=\displaystyle\int_0^{30}v_2(t)dt$.

Khoảng cách giữa hai người là $d=|S_1-S_2|=\left|\displaystyle\int_0^{30}v_1(t)dt-\int_0^{30}v_2(t)dt\right|$.

Trong khi đó, diện tích phần tô đậm là $S=\displaystyle\int_0^{30}|v_1(t)-v_2(t)|dt$. Do hai hàm số cắt nhau tại $t=10$ nên hai giá trị này khác nhau.

b) Đúng.

Giả sử $v_2(t)=at^2+bt+c$. Dựa vào đồ thị, $v_2(t)$ đi qua 3 điểm: $(0;4),(10;6),(30;6)$.

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} c=4 \\ 100a+10b+4=6 \\ 900a+30b+4=6 \end{cases} \iff \begin{cases} c=4 \\ a=-1/150 \\ b=4/15 \end{cases}$

$\Rightarrow v_2(t)=-\dfrac{1}{150}t^2+\dfrac{4}{15}t+4=-\dfrac{1}{150}(t^2-40t-600).$

c) Đúng.

Tại $t=10s$:

$S_1=\displaystyle\int_0^{10}\left(-\frac{1}{6000}t^3+\frac{7}{60}t+5\right)dt=\frac{665}{12}\approx 55,42$ (m).

$S_2=\displaystyle\int_0^{10}\left(-\frac{1}{150}t^2+\frac{4}{15}t+4\right)dt=\frac{460}{9}\approx 51,11$ (m).

Khoảng cách: $d=S_1-S_2=\dfrac{665}{12}-\dfrac{460}{9}\approx 4,3$ (m).

d) Sai.

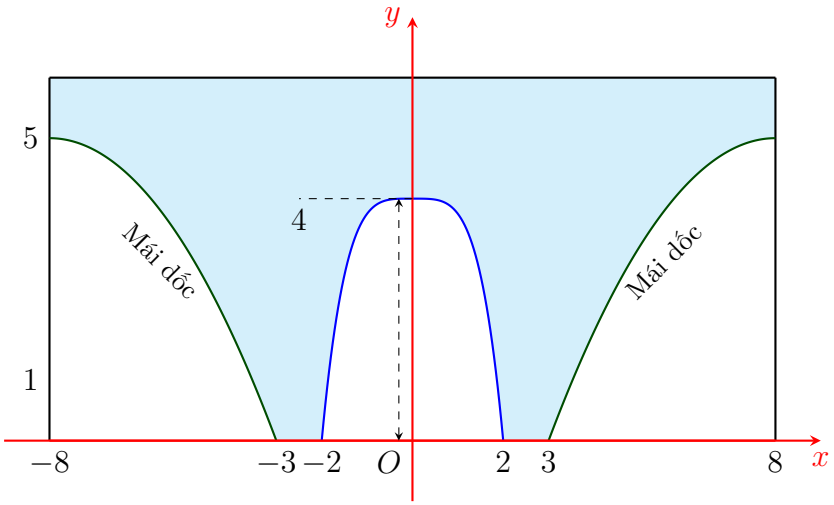
Tại $t=30s$:

$S_1=\displaystyle\int_0^{30}v_1(t)dt=\frac{555}{4}=138,75$ (m).

$S_2=\displaystyle\int_0^{30}v_2(t)dt=150$ (m).

Khoảng cách: $d=|138,75-150|=11,25$ (m). (Kết quả 19,9 là sai).

Bài 79. Hình vẽ sau mô tả mặt cắt ngang của một cây cầu cao 6 mét, dài 16 mét, rộng 4 mét, được giới hạn bởi hai đường mái dốc và các đường thẳng; cầu có hầm chui cao 4 mét, rộng 4 mét. Trên hệ tọa độ Oxy, đường chui được mô hình hóa bằng hàm bậc bốn $f(x)=ax^4+b$, hai đường cong mái dốc được mô hình hóa bởi hai parabol $y=g(x)$ và $y=h(x)$ đối xứng nhau qua trục Oy, parabol bên phải là $y=g(x)$ có đỉnh $I(8;5)$. Các số liệu được cho như hình vẽ (đơn vị mỗi trục là mét), biết cây cầu có chiều rộng bằng 8 mét.



Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a. Hàm số $f(x)=-\dfrac{1}{4}x^4+4$.

b. Parabol bên phải có phương trình là $g(x)=-\dfrac{1}{5}(x-8)^2+5$.

c. Diện tích phần mặt cắt giới hạn bởi hai parabol $y=g(x)$ và $y=h(x)$, trục hoành, hai đường thẳng $x=-8, x=8$ nhỏ hơn 30 mét vuông.

d. Thể tích vật liệu để xây dựng cây cầu nhỏ hơn 500 m^3.

Hướng dẫn giải. **a) Đúng.**

Đường chui cao 4m, rộng 4m nên đi qua các điểm $(0;4)$ và $(\pm 2;0)$.

Thay vào $f(x)=ax^4+b$:

$$\begin{cases} f(0)=4 \\ f(2)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} b=4 \\ a\cdot 2^4+4=0 \end{cases} \iff \begin{cases} b=4 \\ a=-1/4 \end{cases} \Rightarrow f(x)=-\frac{1}{4}x^4+4.$$

b) Đúng.

Parabol $g(x)$ có đỉnh $I(8;5)$ nên có dạng $g(x)=k(x-8)^2+5$.

Dựa vào hình vẽ, đường dốc bắt đầu từ $x=3$ (do đối xứng với bên trái tại $x=-3$), nên $g(3)=0$.

$\Rightarrow k(3-8)^2+5=0 \iff 25k=-5 \iff k=-1/5$.

Vậy $g(x)=-\frac{1}{5}(x-8)^2+5$.

c) Sai.

Ký hiệu S_1, S_2 là diện tích phần dưới hai mái dốc. Vì tính đối xứng nên $S_1=S_2$.

Diện tích giới hạn bởi hai parabol và trục hoành là:

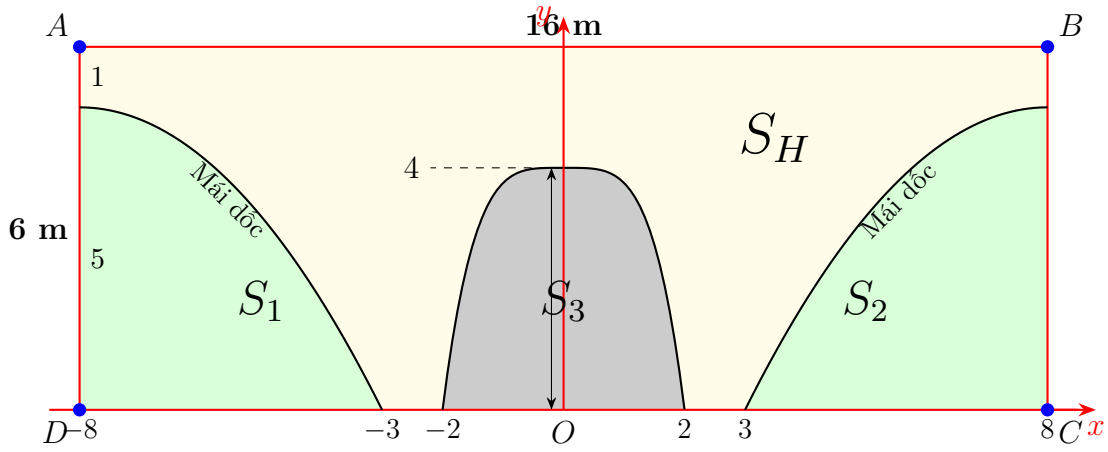
$$S=S_1+S_2=2S_2=2\int_3^8 |g(x)|dx=2\int_3^8 \left[-\frac{1}{5}(x-8)^2+5\right]dx.$$

Tính tích phân: $S=2\cdot\left[-\frac{1}{15}(x-8)^3+5x\right]_3^8=2\cdot\left(40-\left(\frac{25}{3}+15\right)\right)=\frac{100}{3}\approx 33,33$ (m^2).

Vì $33,33>30$ nên mệnh đề này sai.

d) Đúng.

Diện tích mặt cắt ngang S_H bằng diện tích hình chữ nhật lớn trừ đi các phần rỗng:



$S_{ABCD}=16\cdot 6=96$ (m^2).

Phần hầm chui $S_3=\int_{-2}^{2}\left(-\frac{1}{4}x^4+4\right)dx=\left[-\frac{1}{20}x^5+4x\right]_{-2}^{2}=\frac{64}{5}=12,8$ (m^2).

$S_H=S_{ABCD}-(S_1+S_2)-S_3=96-\frac{100}{3}-12,8=\frac{748}{15}\approx 49,87$ (m^2).

Thể tích vật liệu (với chiều rộng cầu $L=8$m):

$V=S_H\cdot 8=\frac{748}{15}\cdot 8=\frac{5984}{15}\approx 398,93$ (m^3).

Vì $398,93<500$ nên mệnh đề này đúng.

Bài 80. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, đơn vị mỗi trục là km, mặt đất trùng với mặt phẳng (Oxy), trục Oz hướng lên, đường đi của máy bay được coi là đường thẳng và chúng được coi là các điểm. Một máy bay cất cánh từ mặt đất, đang tăng độ cao và được tháp kiểm soát không lưu phát hiện tại $A(8;8;4)$, 2 phút sau đó nó đi đến điểm $B(4;12;6)$. Máy bay tiếp tục đi vào một lớp mây, bắt

đầu ở độ cao 9 km và kết thúc ở độ cao 10 km. Ngay sau khi ra khỏi lớp mây, máy bay chuyển từ chế độ tăng độ cao sang chế độ bay ngang cùng chiều với tia Oy. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

a) Phương trình đường thẳng AB là $\dfrac{x-8}{2}=\dfrac{y-8}{2}=\dfrac{z-4}{-1}$.

b) Máy bay cất cánh tại điểm có hoành độ bằng 16.

c) Thời gian tính từ lúc cất cánh đến khi vừa ra khỏi lớp mây của máy bay này là 10 phút.

d) Giả sử vận tốc máy bay không đổi trong quá trình bay thì sau 30 phút nó ở vị trí cách điểm cất cánh một khoảng lớn hơn 80 km.

Hướng dẫn giải. **a) Sai.**

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-4;4;2)$. Chọn $\vec{u}_{AB}=(2;-2;-1)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng AB.
Đường thẳng AB đi qua điểm $A(8;8;4)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}_{AB}=(2;-2;-1)$ có phương trình chính tắc là $\dfrac{x-8}{2}=\dfrac{y-8}{-2}=\dfrac{z-4}{-1}$.

b) Đúng.

Gọi C là điểm máy bay cất cánh. Khi đó $\begin{cases} C\in(Oxy):z=0 \\ C\in AB \end{cases}$ suy ra $C=(Oxy)\cap AB$.

Thay $z=0$ vào phương trình đường thẳng AB, ta được $\dfrac{x-8}{2}=\dfrac{y-8}{-2}=\dfrac{0-4}{-1}$

$$\iff \frac{x-8}{2}=\frac{y-8}{-2}=4 \iff \begin{cases} \dfrac{x-8}{2}=4 \\ \dfrac{y-8}{-2}=4 \end{cases} \iff \begin{cases} x-8=8 \\ y-8=-8 \end{cases} \iff \begin{cases} x=16 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$C(16;0;0)$.
Vậy máy bay cất cánh tại điểm có hoành độ bằng 16.

c) Đúng.

Vì *vận tốc của máy bay là không đổi* nên thời gian tính từ lúc cất cánh (tại điểm C) đến khi vừa ra khỏi lớp mây (tức tại điểm Q) của máy bay là $t=\dfrac{CQ}{v}$.

Bước 1: Tính quãng đường CQ (km).
Vì Q là điểm kết thúc lớp mây nên có độ cao 10 km nên cao độ của điểm Q bằng 10.
Mà $Q\in AB$ nên thay $z_Q=10$ vào phương trình đường thẳng AB, ta được:

$$\frac{x-8}{2}=\frac{y-8}{-2}=\frac{10-4}{-1} \iff \frac{x-8}{2}=\frac{y-8}{-2}=-6$$

$$\iff \begin{cases} \dfrac{x-8}{2}=-6 \\ \dfrac{y-8}{-2}=-6 \end{cases} \iff \begin{cases} x-8=-12 \\ y-8=12 \end{cases} \iff \begin{cases} x=-4 \\ y=20 \end{cases} \Rightarrow Q(-4;20;10).$$

Suy ra quãng đường $CQ=\sqrt{(-4-16)^2+20^2+10^2}=30$ (km).
Bước 2: Tính vận tốc của máy bay.
Vì máy bay đi từ A đến B mất 2 phút nên vận tốc của máy bay là:

$$v=\frac{AB}{2}=\frac{\sqrt{(-4)^2+4^2+2^2}}{2}=\frac{6}{2}=3 \text{ (km/phút)}.$$

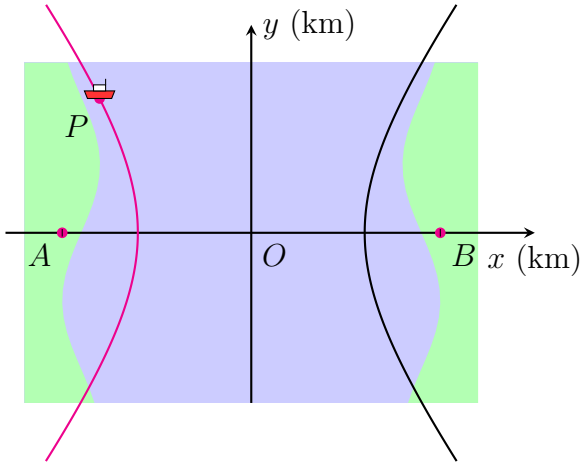
Suy ra thời gian tính từ lúc cất cánh đến khi vừa ra khỏi lớp mây là $t=\dfrac{30}{3}=10$ phút.

d) Đúng.

Nhận xét: Trong 30 phút bay:
10 phút đầu, máy bay bay từ C đến Q;

20 phút tiếp theo, máy bay bay từ $Q \to Q'$ với vận tốc không đổi và bay ngang cùng chiều với tia Oy (có vectơ chỉ phương là $\vec{j} = (0;1;0)$).
Khi đó khoảng cách cần tính là CQ'. Do đó, ta cần tìm tọa độ điểm Q'.
Máy bay bay với vận tốc không đổi 3 km/phút và chuyển động cùng hướng với vectơ $\vec{j} = (0;1;0)$ nên có vectơ vận tốc là $\vec{v} = 3 \cdot \dfrac{\vec{j}}{|\vec{j}|} = 3 \cdot \dfrac{(0;1;0)}{\sqrt{0^2+1^2+0^2}} = (0;3;0)$.
Vì ban đầu máy bay ở $Q(-4;20;10)$ nên sau 20 phút, máy bay ở vị trí
$Q' = Q + 20 \cdot \vec{v} = (-4;20+20\cdot 3;10) \Rightarrow Q'(-4;80;10)$.
Vậy $CQ' = \sqrt{(-4-16)^2+80^2+10^2} = \sqrt{400+6400+100} = \sqrt{6900} \approx 83$ km > 80 km.

Bài 81. Trong một khu vực trên biển có hai trạm định vị vô tuyến được đặt tại điểm A và B cách nhau 1000 km. Một con tàu di chuyển trên biển, nó luôn nhận tín hiệu từ trạm A trước tín hiệu từ trạm B một khoảng là $0,002$ giây. Biết rằng các tín hiệu hai trạm truyền đi với tốc độ không đổi trong không khí là $3 \cdot 10^8$ (m/s). Gọi t_1, t_2 (đơn vị giây) lần lượt là thời gian truyền tín hiệu từ trạm A và trạm B đến con tàu. Xét hệ tọa độ Oxy như hình vẽ (đơn vị trên mỗi trục tọa độ tính bằng km). Gọi vị trí trên biển của con tàu là P.



Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

a) $t_1 - t_2 = 0,002$.

b) Hiệu khoảng cách giữa tàu với trạm A và trạm B là một đẳng thức cố định được xác định bởi $|PA - PB| = 600$ (km).

c) Quỹ đạo chuyển động của tàu là một đường hypebol có phương trình là $\dfrac{x^2}{400^2} - \dfrac{y^2}{300^2} = 1$.

d) Khi con tàu cách gốc tọa độ O một khoảng 800 km thì hoành độ của nó nhỏ hơn 600.

Hướng dẫn giải. **a) Sai.**
Vì "con tàu luôn nhận tín hiệu từ trạm A trước tín hiệu từ trạm B một khoảng là $0,002$ giây" nên thời gian nhận tín hiệu từ trạm A ít hơn thời gian nhận tín hiệu từ trạm B là $0,002$ giây $\iff t_2 - t_1 = 0,002$.

b) Đúng.
PA, PB lần lượt là khoảng cách giữa con tàu tại vị trí P đến trạm A, B.
Ta có tốc độ truyền tín hiệu từ 2 trạm A, B đến con tàu là $v = 3 \cdot 10^8$ (m/s) $= 3 \cdot 10^5$ (km/s).
Lại có t_1, t_2 (giây) lần lượt là thời gian truyền tín hiệu từ trạm A và trạm B đến con tàu.
Nên $\begin{cases} PA = v \cdot t_1 = 3 \cdot 10^5 t_1 \\ PB = v \cdot t_2 = 3 \cdot 10^5 t_2 \end{cases}$

$\Rightarrow |PA - PB| = |3 \cdot 10^5 t_1 - 3 \cdot 10^5 t_2| = 3 \cdot 10^5 |t_1 - t_2| = 3 \cdot 10^5 \cdot 0,002 = 600$ (km).
Vậy hiệu khoảng cách giữa tàu với trạm A và trạm B là $|PA - PB| = 600$ (km).

c) Sai.
Từ phần b, ta có $|PA - PB| = 600$ (km). Theo định nghĩa, quỹ đạo của tàu là một nhánh của đường hypebol với $2a = 600 \Rightarrow a = 300$.
Khoảng cách giữa hai tiêu cự (hai trạm) là $2c = AB = 1000 \Rightarrow c = 500$.
Ta có $b^2 = c^2 - a^2 = 500^2 - 300^2 = 400^2 \Rightarrow b = 400$.
Phương trình chính tắc của hypebol là: $\dfrac{x^2}{300^2} - \dfrac{y^2}{400^2} = 1$.
Mệnh đề ghi $\dfrac{x^2}{400^2} - \dfrac{y^2}{300^2} = 1$ là sai (nhầm lẫn giữa a và b).

d) Đúng.
Giả sử tọa độ $P(x_0; y_0)$. Vì tàu cách gốc tọa độ O một khoảng 800 km nên:
$OP = 800 \iff \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = 800 \iff x_0^2 + y_0^2 = 800^2 \iff y_0^2 = 800^2 - x_0^2$.
Vì P thuộc vào hypebol $\dfrac{x^2}{300^2} - \dfrac{y^2}{400^2} = 1$, thay tọa độ điểm P vào ta được:
$\dfrac{x_0^2}{300^2} - \dfrac{800^2 - x_0^2}{400^2} = 1 \iff \dfrac{16x_0^2 - 9(800^2 - x_0^2)}{1440000} = 1$
$\iff 25x_0^2 - 9 \cdot 800^2 = 1440000 \iff 25x_0^2 = 1440000 + 5760000 = 7200000$.
$\iff x_0^2 = 288000 \Rightarrow |x_0| = \sqrt{288000} \approx 536,656 < 600$.
Vậy hoành độ của nó nhỏ hơn 600 là đúng.

Bài 82. Tốc độ phát triển của một loại nấm mốc trên một sàn nhà tỷ lệ thuận với lượng nấm mốc hiện tại. Diện tích nấm mốc trên sàn lúc đầu ($t = 0$) là 2 cm^2 và sau 2 ngày là 9 cm^2. Gọi $A(t)$ là diện tích nấm mốc tại thời điểm t thì $A'(t) = k \cdot A(t)$ (với k là hằng số). Cho biết $A(t) = e^{g(t)}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $g(t) = e^{kt} + C$ với C là hằng số xác định.
b) $k = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{9}{2}$.
c) $g(0) = 2 \ln 2$.
d) Sau 3 ngày (tính từ thời điểm $t = 0$), diện tích nấm mốc bao phủ lớn hơn 20 cm^2.

Hướng dẫn giải.

a) Sai.
$A'(t) = k \cdot A(t) \iff \dfrac{A'(t)}{A(t)} = k \iff (\ln A(t))' = k$.
Nguyên hàm hai vế, ta được:
$\displaystyle\int (\ln A(t))' dt = \int k dt \iff \ln A(t) = kt + C \iff A(t) = e^{kt+C}$.
Lại có $A(t) = e^{g(t)} \Rightarrow g(t) = \ln A(t) = kt + C$.

b) Đúng.
Từ phần a) ta thu được $A(t) = e^{kt+C}$.
Lại có $\begin{cases} A(0) = 2 \\ A(2) = 9 \end{cases} \iff \begin{cases} e^{k \cdot 0 + C} = 2 \\ e^{k \cdot 2 + C} = 9 \end{cases} \iff \begin{cases} e^C = 2 \\ e^{2k+C} = 9 \end{cases} \iff \begin{cases} C = \ln 2 \\ 2k + \ln 2 = \ln 9 \end{cases}$
$\iff \begin{cases} C = \ln 2 \\ 2k = \ln 9 - \ln 2 = \ln \dfrac{9}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} C = \ln 2 \\ k = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{9}{2} \end{cases}$.

c) Sai.

Từ phần b, ta thu được $\begin{cases} C = \ln 2 \\ k = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{9}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow g(t) = kt + C = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{9}{2}t + \ln 2.$

Thay $t = 0$ vào phương trình $g(t)$ ta được $g(0) = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{9}{2}\cdot 0 + \ln 2 = \ln 2.$

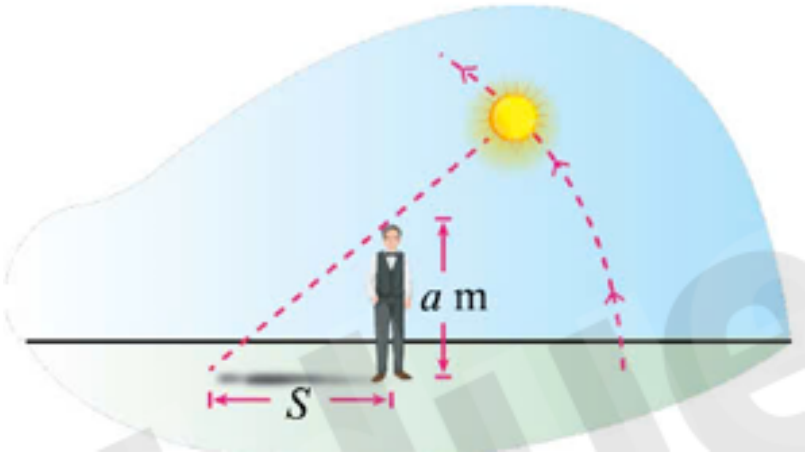
d) Sai.

Ta có $A(t) = e^{\frac{1}{2}\ln\frac{9}{2}t + \ln 2}$.

Sau 3 ngày (tính từ thời điểm $t = 0$), diện tích nấm mốc bao phủ là:

$A(3) = e^{\frac{1}{2}\ln\frac{9}{2}\cdot 3 + \ln 2} \approx 19 \text{ cm}^2 < 20 \text{ cm}^2$.

Bài 83. Một mô hình hàm lượng giác sau đây mô phỏng chiều dài của bóng một người đàn ông cao a mét khi mặt trời chiếu vào. Nếu gọi chiều dài của bóng người đàn ông đó là $S(t)$ thì ta có $S(t) = a\left|\cot\left(\dfrac{\pi}{12}t\right)\right|$ (mét) với t là số giờ tính từ lúc 6 giờ sáng (tức là tại thời điểm 6 giờ sáng thì $t = 0$) (tham khảo hình vẽ). Vào thời điểm 9 giờ sáng, bóng của người đàn ông dài 1,8 mét.



Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Vào thời điểm 6 giờ sáng và 18 giờ tối ta không thể xác định được bóng của người đàn ông.

b) Từ lúc 6 giờ sáng đến 18 giờ tối chiều dài bóng của người đàn ông luôn giảm.

c) Người đàn ông đó cao hơn 1,75 mét.

d) Bóng của người đàn ông dài 1 mét vào các thời điểm $t = 4,07$ và $t = 7,94$ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Hướng dẫn giải. **a) Đúng.**

Ta có: $t = 0$ ứng với 6 giờ sáng, $t = 12$ ứng với 18 giờ tối.

$S(0) = a\,|\cot(0)|$; $S(12) = a\,|\cot(\pi)|$ không xác định.

b) Sai.

Ta có: $S(t) = a\left|\cot\left(\dfrac{\pi}{12}t\right)\right| = a\sqrt{\cot^2\left(\dfrac{\pi}{12}t\right)}$.

$$\Rightarrow S'(t) = a\frac{2\cdot\cot\left(\dfrac{\pi}{12}t\right)\cdot\dfrac{-\pi}{12\cdot\sin^2\left(\frac{\pi}{12}t\right)}}{2\sqrt{\cot^2\left(\dfrac{\pi}{12}t\right)}} = 0$$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{12}t\right) = 0 \quad \left(\sin\left(\frac{\pi}{12}t\right) \neq 0\right)$$

$\Rightarrow \dfrac{\pi}{12}t = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow t = 6 + 12k.$

Mà $0 \le t \le 12$, nên $k = 0 \Rightarrow t = 6$ (lúc 12 giờ trưa) là cực tiểu của hàm số.

$\Rightarrow$ Chiều dài bóng giảm từ 6 giờ đến 12 giờ và tăng từ 12 giờ đến 18 giờ.

c) Đúng.

Vào lúc 9 giờ sáng thì $t = 9 - 6 = 3$.

Ta có: $S(3) = 1,8 \Rightarrow a\left|\cot\left(\dfrac{\pi}{12}\cdot 3\right)\right| = 1,8$

$\Rightarrow a\left|\cot\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right| = 1,8 \Rightarrow a \cdot 1 = 1,8.$

Vì $a = 1,8 > 1,75$ nên người đàn ông cao hơn 1,75 mét.

d) Sai.

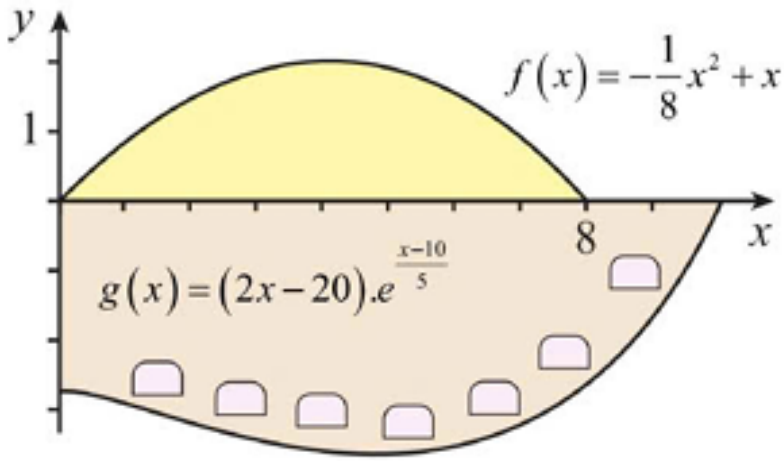
Ta có: $S(t) = 1,8\left|\cot\left(\dfrac{\pi}{12}t\right)\right| = 1 \Rightarrow \left|\cot\left(\dfrac{\pi}{12}t\right)\right| = \dfrac{5}{9}.$

+) $\cot\left(\dfrac{\pi}{12}t\right) = \dfrac{5}{9} \Rightarrow t \approx 4,06.$

+) $\cot\left(\dfrac{\pi}{12}t\right) = -\dfrac{5}{9} \Rightarrow t \approx 7,94.$

Vì đề bài ghi $t = 4,07$ (lệch so với $4,06$) nên mệnh đề này là Sai.

Bài 84. Ở Dubai, những hòn đảo nhân tạo được xây dựng trên biển để làm địa điểm nghỉ dưỡng. Trên hệ tọa độ Oxy, đơn vị mỗi trục tính bằng 100 mét, đường bờ biển của một hòn đảo được mô tả như hình vẽ bởi các đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$. Trong đó $y = f(x)$ là một parabol có đỉnh $I(4;2)$, đi qua gốc tọa độ và $g(x) = (2x - 20)e^{0,2x-2}$. Hòn đảo này gồm hai phần, phần bãi tắm được giới hạn bởi đường cong $y = f(x)$ và trục hoành; phần nghỉ dưỡng được giới hạn bởi đường cong $y = g(x)$, trục tung và trục hoành.



Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a. $f(x) = -0,125x^2 + x$.

b. Diện tích của bãi tắm bằng lớn hơn 100 nghìn mét vuông.

c. Biết rằng $G(x) = (ax+b)e^{0,2x-2}$ là một nguyên hàm của hàm số $g(x)$ trên $\mathbb{R}$, khi đó $a-b = 140$.

d. Tổng diện tích hòn đảo lớn hơn 500 nghìn mét vuông.

Hướng dẫn giải. **a) Đúng.**

Parabol $y = f(x)$ có đỉnh $I(4;2)$ và qua $O(0;0)$. Giả sử $f(x) = a(x-4)^2 + 2$.

Vì $f(0) = 0 \Rightarrow a(0-4)^2 + 2 = 0 \Rightarrow 16a = -2 \Rightarrow a = -\frac{1}{8} = -0,125.$

Vậy $f(x) = -0,125(x-4)^2 + 2 = -0,125x^2 + x.$

b) Đúng.

Đơn vị mỗi trục là 100m nên 1 đơn vị diện tích trên hình $= 100^2 = 10.000$ (m^2).

Diện tích bãi tắm trên hình: $S_1' = \int_0^8 f(x)dx = \int_0^8 (-0,125x^2 + x)dx = \dfrac{32}{3}$.

Diện tích thực tế: $S_1 = 100^2 \cdot \frac{32}{3} \approx 106.667$ (m^2) > 100.000 (m^2).

c) Sai.

$G(x)$ là nguyên hàm của $g(x)$ nên $G'(x) = g(x)$.

$G'(x) = [a + 0,2(ax + b)]e^{0,2x-2} = (0,2ax + a + 0,2b)e^{0,2x-2}$.

Đồng nhất hệ số với $g(x) = (2x - 20)e^{0,2x-2}$:

$$\begin{cases} 0,2a = 2 \\ a + 0,2b = -20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 10 \\ 10 + 0,2b = -20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 10 \\ b = -150 \end{cases}.$$

Khi đó $a - b = 10 - (-150) = 160$.

d) Sai.

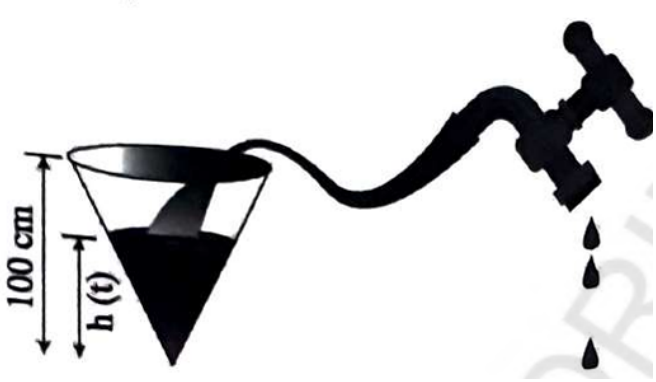
Diện tích phần nghỉ dưỡng trên hình:

$S_2' = \int_0^{10} |g(x)|dx = -\int_0^{10} g(x)dx = -\left[(10x - 150)e^{0,2x-2}\right]_0^{10} = 50 - 150e^{-2} \approx 29,6997.$

Diện tích hòn đảo thực tế: $S = S_1 + S_2 \approx 106.667 + 10.000 \cdot 29,6997 \approx 403.664$ (m^2).

Vì $403.664 < 500.000$ nên mệnh đề d sai.

Bài 85. Một bình nước rỗng có dạng hình nón ngược có chiều cao $h = 100$ cm, bán kính đáy $r = 50$ cm như hình vẽ.



Nước được chảy vào bình với tốc độ 2 lít/phút, gọi $V(t)$ (cm^3) và $h(t)$ (cm) lần lượt là thể tích và chiều cao của mực nước trong bình sau t (phút) tính từ lúc nước chảy vào. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a. Bể sẽ đầy nước sau 121 phút (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị của phút).

b. Mối quan hệ giữa $V(t)$ và $h(t)$ là: $V(t) = \dfrac{\pi}{6} \cdot [h(t)]^3$.

c. Hàm số biểu thị chiều cao mực nước theo thời gian t phút là $h(t) = \sqrt[3]{\dfrac{12000t}{\pi}}$ (cm).

d. Sau 20 phút, mực nước đang dâng lên với tốc độ lớn hơn 1 cm/phút.

Hướng dẫn giải. **a) Sai.**

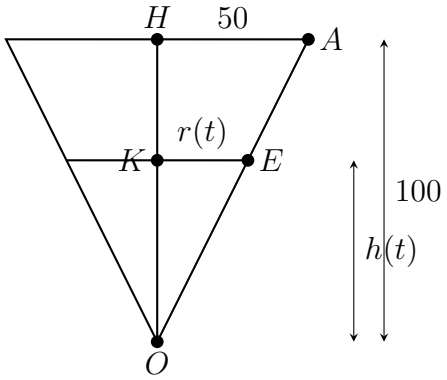
Tốc độ chảy $v = 2$ lít/phút $= 2000$ cm^3/phút. Sau t phút, thể tích nước là $V(t) = 2000t$ cm^3.

Thể tích bình: $V_{bnh} = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 50^2 \cdot 100 = \dfrac{250000}{3}\pi \approx 261799$ cm^3.

Thời gian đầy bể: $t = \dfrac{V_{bnh}}{2000} = \dfrac{125\pi}{3} \approx 131$ (phút).

b) Sai.

Gọi $r(t)$ là bán kính mặt nước tại thời điểm t. Theo định lý Thales trong tam giác mặt cắt ngang:



Ta có $\dfrac{r(t)}{50} = \dfrac{h(t)}{100} \Rightarrow r(t) = \dfrac{h(t)}{2}$.

Thể tích nước: $V(t) = \dfrac{1}{3}\pi[r(t)]^2 h(t) = \dfrac{1}{3}\pi\left(\dfrac{h(t)}{2}\right)^2 h(t) = \dfrac{\pi}{12}[h(t)]^3$.

c) Sai.

Từ $V(t) = 2000t$ và $V(t) = \dfrac{\pi}{12}[h(t)]^3 \Rightarrow \dfrac{\pi}{12}[h(t)]^3 = 2000t$.

$\Rightarrow [h(t)]^3 = \dfrac{24000t}{\pi} \Rightarrow h(t) = \sqrt[3]{\dfrac{24000t}{\pi}}$ (cm).

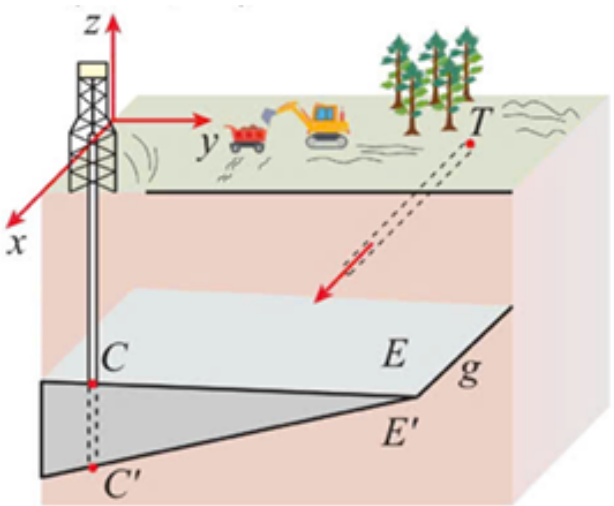
d) Sai.

Tốc độ dâng của mực nước là $h'(t)$. Ta có $h(t) = \left(\dfrac{24000}{\pi}\right)^{1/3} \cdot t^{1/3}$.

Đạo hàm: $h'(t) = \left(\dfrac{24000}{\pi}\right)^{1/3} \cdot \dfrac{1}{3} \cdot t^{-2/3}$.

Tại $t = 20$: $h'(20) = \sqrt[3]{\dfrac{24000}{\pi}} \cdot \dfrac{1}{3} \cdot 20^{-2/3} \approx 0,89 < 1$ cm/phút.

Bài 86. Một lớp than đá hình lăng trụ tam giác có các mặt phẳng giới hạn trên và dưới là (E) và (E'), tiếp giáp với các lớp đất xung quanh. Trên hệ trục tọa độ $Oxyz$, đơn vị trên mỗi trục tính bằng mét, mặt đất là mặt phẳng (Oxy). Các kĩ sư thực hiện ba lần khoan thăm dò, lần thứ nhất cắt mặt (E) và (E') lần lượt tại điểm $A(-20;30;-200)$, $A'(-20;30;-236)$; lần thứ hai cắt mặt (E) và (E') lần lượt tại điểm $B(120;180;-80)$, $B'(120;180;-120)$; lần thứ ba cắt mặt (E) và (E') lần lượt tại điểm $C(80;120;-120)$, $C'(80;120;-160)$. Từ điểm $T(-200;200;0)$, một đường hầm được đào theo hướng của vectơ $\vec{v} = (2;-1;-1)$.



Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

a) Phương trình của mặt phẳng (E) là $3x-2y+6z-1200=0$.

b) Một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (E') là $\vec{n}'=(2;2;-5)$.

c) Khi đào hầm, vị trí đầu tiên mà đường hầm gặp lớp than là $M(a;b;c)$, khi đó $a>90$.

d) Chiều dài đoạn đường hầm nằm trong lớp than đá lớn hơn 80 mét.

Hướng dẫn giải. **a) Sai.**

Mặt phẳng (E) đi qua 3 điểm A,B,C nên có cặp vectơ chỉ phương là:
$\overrightarrow{AB}=(140;150;120)$; $\overrightarrow{AC}=(100;90;80)$.
Chọn $\vec{u}_1(14;15;12)$, $\vec{u}_2(10;9;8)$ là cặp VTCP của mặt phẳng (E).
Khi đó, một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (E) là $\vec{n}_E=[\vec{u}_1,\vec{u}_2]=(12;8;-24)$.
Mặt phẳng (E) đi qua $A(-20;30;-200)$ và có VTPT $\vec{n}_1=(3;2;-6)$ có phương trình:
$3(x+20)+2(y-30)-6(z+200)=0 \iff 3x+2y-6z-1200=0$.

b) Đúng.

Mặt phẳng (E') đi qua 3 điểm A',B',C' nên có cặp VTCP:
$\overrightarrow{A'B'}=(140;150;116)$; $\overrightarrow{A'C'}=(100;90;76)$.
Suy ra một VTPT của mặt phẳng (E') là $\vec{n}_{E'}=[\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'}]=(960;960;-2400)=480(2;2;-5)$.
Suy ra $\vec{n}_2=(2;2;-5)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (E').

c) Sai.

Đường hầm d đi qua $T(-200;200;0)$ theo hướng $\vec{v}=(2;-1;-1)$ có PT tham số:

$$d:\begin{cases}x=-200+2t\\ y=200-t\\ z=-t\end{cases}\quad(t\in\mathbb{R}).$$

Thay vào PT mặt phẳng $(E):3x+2y-6z-1200=0$, ta được:
$3(-200+2t)+2(200-t)-6(-t)-1200=0 \iff 10t-1400=0 \iff t=140$.
Vị trí đầu tiên gặp lớp than là $M(80;60;-140)$. Khi đó $a=80<90$.

d) Sai.

Mặt phẳng (E') đi qua $C'(80;120;-160)$ có VTPT $\vec{n}_2=(2;2;-5)$ nên có PT:
$2(x-80)+2(y-120)-5(z+160)=0 \iff 2x+2y-5z-1200=0$.
Thay PT đường hầm d vào PT (E'), ta được:
$2(-200+2t)+2(200-t)-5(-t)-1200=0 \iff 7t-1200=0 \iff t=\dfrac{1200}{7}$.
Giao điểm $N=d\cap(E')$ có tọa độ $N\left(\dfrac{1000}{7};\dfrac{200}{7};-\dfrac{1200}{7}\right)$.
Chiều dài đoạn trong lớp than là $MN=\sqrt{(\frac{1000}{7}-80)^2+(\frac{200}{7}-60)^2+(-\frac{1200}{7}+140)^2}\approx 76,98$ (m) <80 (m).

Bài 87. Sự tăng trưởng của một loại vi khuẩn tuân theo công thức $S(t)=A\cdot e^{rt}$, trong đó A là số lượng vi khuẩn ban đầu, r là tỉ lệ tăng trưởng $(r>0)$, t là thời gian tăng trưởng tính bằng giờ kể từ lúc đầu. Biết số lượng vi khuẩn ban đầu là 100 con và sau 5 giờ là 300 con. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Ta có: $S(0)=100$ và $S(5)=300$.

b) $A=300$.

c) $r=\dfrac{\ln 3}{5}$.

d) Sau 15 giờ số lượng vi khuẩn là 2700 con.

Hướng dẫn giải. **a) Đúng.**

Từ giả thiết "số lượng vi khuẩn ban đầu là 100 con và sau 5 giờ là 300 con" ta có $S(0) = 100$ và $S(5) = 300$.

b) Sai.

Ta có $S(0) = 100 \iff A \cdot e^{r\cdot 0} = 100 \iff A = 100$.

Suy ra $S(t) = 100e^{rt}$.

c) Đúng.

$S(5) = 300 \iff 100e^{r\cdot 5} = 300 \iff e^{5r} = \dfrac{300}{100} = 3 \iff 5r = \ln 3 \iff r = \dfrac{\ln 3}{5}$.

Suy ra $S(t) = 100e^{\frac{\ln 3}{5}\cdot t}$.

d) Đúng.

Sau 15 giờ số lượng vi khuẩn là $S(15) = 100e^{\frac{\ln 3}{5}\cdot 15} = 2700$.

Bài 88. Cho hàm số $f(x) = 2\cos^2\dfrac{x}{2}$. Xét tính đúng, sai của các mệnh đề sau:

a) Tập giá trị của hàm số $f(x)$ là $[0; 2]$.

b) $f(x) = 1 - \cos x$.

c) Một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ là $F(x) = x + \sin x$.

d) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0; x = \pi$ lớn hơn 4.

Hướng dẫn giải. **a) Đúng.**

Vì $0 \le \cos^2\dfrac{x}{2} \le 1$ nên $0 \le 2\cos^2\dfrac{x}{2} \le 2$. Vậy tập giá trị của hàm số là $[0; 2]$.

b) Sai.

Sử dụng công thức hạ bậc: $\cos^2\alpha = \dfrac{1 + \cos 2\alpha}{2} \Rightarrow 2\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha$.

Ta có $f(x) = 1 + \cos\left(2 \cdot \dfrac{x}{2}\right) = 1 + \cos x$.

c) Đúng.

Ta có $\displaystyle\int (1 + \cos x)\mathrm{d}x = x + \sin x + C$.

Với $C = 0$, ta có một nguyên hàm là $F(x) = x + \sin x$.

d) Sai.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0; x = \pi$ là:

$S = \displaystyle\int_0^{\pi} (1 + \cos x)\mathrm{d}x = (x + \sin x)\Big|_0^{\pi} = (\pi + \sin\pi) - (0 + \sin 0) = \pi$.

Vì $\pi \approx 3,14 < 4$ nên mệnh đề d sai.

Bài 89. Khi trả lời câu hỏi trong một bài thi trắc nghiệm, học sinh có thể biết đáp án hoặc dự đoán đáp án. Các câu hỏi trắc nghiệm có 4 đáp án nhưng chỉ có 1 đáp án đúng. Giả sử với mỗi câu hỏi bạn Tuấn có xác suất biết đáp án đúng là $0,6$ và xác suất Tuấn không biết đáp án đúng là $0,4$. Trong trường hợp không biết đáp án Tuấn sẽ dự đoán đáp án đúng bằng cách chọn ngẫu nhiên một trong 4 đáp án của đề thi. Giả sử Tuấn gặp một câu hỏi trắc nghiệm.

Gọi A là biến cố: "Câu trả lời của Tuấn là đúng".

Gọi B là biến cố: "Câu hỏi đó Tuấn đã biết đáp án".

a) $P(B)=0,6, P(\overline{B})=0,4$.

b) Xác suất có điều kiện: $P(A|B)=0,5; P(A|\overline{B})=0,25$.

c) Xác suất để câu trả lời của Tuấn đúng là 72%.

d) Với câu trắc nghiệm mà câu trả lời của Tuấn là đúng, xác suất để câu đó là câu mà Tuấn biết đáp án đúng là $\dfrac{6}{7}$.

Hướng dẫn giải. **a) Đúng.** Vì câu hỏi bạn Tuấn có xác suất biết đáp án đúng là $0,6$ và xác suất Tuấn không biết đáp án đúng là $0,4$ nên $P(B)=0,6, P(\overline{B})=0,4$.

b) Sai. Xác suất câu trả lời của Tuấn là đúng khi Tuấn đã biết đáp án bằng $P(A|B)=1$. Xác suất câu trả lời của Tuấn là đúng khi Tuấn chưa biết đáp án bằng $P(A|\overline{B})=0,25$ (do Tuấn chọn ngẫu nhiên 1 trong 4 đáp án).

c) Sai. Áp dụng công thức xác suất toàn phần $P(A)=P(B)P(A|B)+P(\overline{B})P(A|\overline{B})$, ta có:

$$P(A)=0,6\cdot 1+0,4\cdot 0,25=0,7.$$

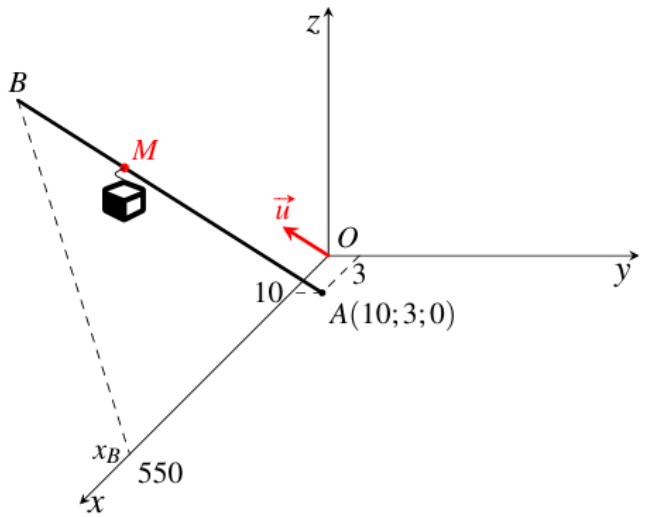
Vậy xác suất để câu trả lời của Tuấn đúng là 70%.

d) Đúng. Áp dụng công thức Bayes $P(B|A)=\dfrac{P(B)P(A|B)}{P(A)}$, ta có:

$$P(B|A)=\frac{0,6\cdot 1}{0,7}=\frac{6}{7}.$$

Vậy với câu trắc nghiệm mà câu trả lời của Tuấn là đúng thì xác suất để câu đó là câu mà Tuấn biết đáp án đúng là $\dfrac{6}{7}$.

Bài 90. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, một cabin cáp treo xuất phát từ điểm $A(10;3;0)$ và chuyển động thẳng đều theo đường cáp có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(2;-2;1)$ với tốc độ là $4,5$ (m/s) (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét, hướng chuyển động cùng chiều với hướng vectơ $\vec{u}$). Khi đó



a) Phương trình đường cáp là $\dfrac{x+10}{2}=\dfrac{y+3}{-2}=\dfrac{z}{1}$.

b) Sau t giây kể từ khi xuất phát, cabin chuyển động được quãng đường bằng $4,5t$ (m).

c) Giả sử sau t giây kể từ khi xuất phát ($t\geq 0$), cabin đến điểm M. Tọa độ của điểm M theo t là $M(9t+10;-9t+3;t)$.

d) Cabin dừng ở điểm B có hoành độ $x_B = 550$. Độ dài quãng đường AB bằng 810 m.

Hướng dẫn giải. a) **S Sai.** Phương trình đường cáp đi qua điểm $A(10;3;0)$ và nhận vectơ $\vec{u}(2;-2;1)$ làm một vectơ chỉ phương là:

$$d: \frac{x-10}{2} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z}{1}.$$

b) **Đ Đúng.** Vì cabin chuyển động thẳng đều với vận tốc $v = 4,5$ (m/s) nên sau t giây quãng đường chuyển động của cabin là $S = v \cdot t = 4,5t$ (m).

c) **S Sai.** Điểm M thuộc đường thẳng d nên tọa độ điểm M có dạng $(10+2t; 3-2t; t)$ (nếu coi t là tham số tỉ lệ, tuy nhiên ở đây t là thời gian nên tọa độ đúng phải tính theo vận tốc). Với giả thiết bài toán, tọa độ của M theo thời gian t là $M(10+3t; 3-3t; 1,5t)$.

d) **Đ Đúng.** Ta có $x_M = 10+3t$. Khi cabin dừng ở B có $x_B = 550$ thì $10+3t = 550 \Rightarrow t = 180$ (s).
Do đó, tọa độ điểm B là $B(550; -537; 270)$.
Độ dài quãng đường AB là:

$$AB = \sqrt{(550-10)^2 + (-537-3)^2 + (270-0)^2} = \sqrt{656100} = 810 \text{ (m)}.$$

Bài 91. Một ô tô đang di chuyển với tốc độ 72 km/h tại vị trí A thì tài xế quan sát thấy biển báo giới hạn tốc độ nên đạp phanh để giảm tốc và hàm vận tốc được tuân theo quy luật $v(t) = at+b$ (m/s). Sau 4 giây hãm phanh, xe đi được quãng đường là 70 m và vận tốc lúc này vừa đúng bằng tốc độ giới hạn cho phép. Tài xế tiếp tục giữ nguyên tốc độ giới hạn này đi tiếp trong 10 giây để đi qua hết khu vực này. Sau đó, xe tiếp tục giảm tốc theo quy luật $v(t) = ct^2 + d$ (m/s) và dừng hẳn tại B. Biết tổng quãng đường từ A đến B bằng 280 m. Kiểm tra tính đúng/sai của các khẳng định sau:

a) Biển báo quy định tốc độ giới hạn tối đa là 60 (km/h).

b) $a = -1,25$.

c) Quãng đường xe chạy với tốc độ không đổi là 160 m.

d) Tại thời điểm $t = 17$ giây tính từ A thì vận tốc của xe là $11,25$ (m/s).

Hướng dẫn giải. Đổi vận tốc ban đầu tại A: $v_0 = 72$ km/h $= \dfrac{72}{3,6} = 20$ m/s.

Giai đoạn 1: Giảm tốc từ A $(0 \le t \le 4)$

- Hàm vận tốc: $v_1(t) = at + b$.
- Tại $t = 0$, $v_1(0) = 20 \Rightarrow b = 20$. Vậy $v_1(t) = at + 20$.
- Quãng đường đi được sau 4 giây: $S_1 = \int_0^4 (at+20)dt = \left(\frac{1}{2}at^2 + 20t\right)\Big|_0^4 = 8a + 80$.
- Theo đề bài $S_1 = 70$ m $\Rightarrow 8a + 80 = 70 \Rightarrow a = -1,25$. $\Rightarrow$ **Khẳng định b) Đúng.**
- Vận tốc giới hạn tại $t = 4$: $v_L = v_1(4) = -1,25 \cdot 4 + 20 = 15$ m/s.
- Đổi sang km/h: $v_L = 15 \cdot 3,6 = 54$ km/h. $\Rightarrow$ **Khẳng định a) Sai** (vì $54 \neq 60$).

Giai đoạn 2: Duy trì tốc độ giới hạn trong 10 giây $(4 < t \le 14)$

- Quãng đường đi được: $S_2 = v_L \cdot 10 = 15 \cdot 10 = 150$ m. $\Rightarrow$ **Khẳng định c) Sai** (vì $150 \neq 160$).

Giai đoạn 3: Giảm tốc từ giây thứ 14 đến khi dừng hẳn tại B

- Quãng đường giai đoạn 3: $S_3 = S_{AB} - (S_1 + S_2) = 280 - (70 + 150) = 60$ m.

◈ Xét mốc thời gian t' tính từ giây thứ 14 ($t' = t - 14$). Hàm vận tốc $v_3(t') = ct'^2 + d$.

◈ Tại $t' = 0$, $v_3(0) = 15 \Rightarrow d = 15$.

◈ Giả sử xe dừng hẳn sau T giây kể từ khi bắt đầu giai đoạn 3.

◈ $v_3(T) = 0 \Rightarrow cT^2 + 15 = 0 \Rightarrow c = -\dfrac{15}{T^2}$.

◈ Quãng đường $S_3 = \int_0^T (ct'^2 + 15)dt' = \dfrac{cT^3}{3} + 15T = 60$.

◈ Thay $c = -\dfrac{15}{T^2}$ vào: $\dfrac{-15}{T^2} \cdot \dfrac{T^3}{3} + 15T = 60 \Rightarrow -5T + 15T = 60 \Rightarrow T = 6$ s.

◈ Suy ra $c = -\dfrac{15}{6^2} = -\dfrac{5}{12}$.

◈ Tại thời điểm $t = 17$ s, tương ứng với $t' = 17 - 14 = 3$ s.

◈ $v_3(3) = -\dfrac{5}{12} \cdot 3^2 + 15 = -3,75 + 15 = 11,25$ m/s. $\Rightarrow$ **Khẳng định d) Đúng.**

Bài 92. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên các trục là mét), một thiết bị bay không người lái xuất phát từ điểm $A(1;2;0)$. Thiết bị chuyển động thẳng nhanh dần theo hướng của vectơ đơn vị $\vec{u} = (a;b;c)$ với $|\vec{u}| = 1$. Tốc độ của thiết bị phụ thuộc vào thời gian t (giây) theo công thức $v(t) = mt + 10$ (m/s), trong đó m là hằng số dương. Biết rằng sau 5 giây kể từ lúc xuất phát, thiết bị đi được quãng đường 125 m. Vectơ chỉ phương chuyển động $\vec{u}$ tạo với tia Ox một góc 45°, tạo với tia Oy một góc 60° và tạo với tia Oz một góc nhọn. Kiểm tra tính đúng/sai của các khẳng định sau:

a) $c = \dfrac{1}{2}$.

b) Phương trình quỹ đạo là đường thẳng $\dfrac{x-1}{\sqrt{2}} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z}{1}$.

c) $m = 4$.

d) Sau 10 giây kể từ lúc xuất phát thì thiết bị đạt độ cao 200 mét.

Hướng dẫn giải. **a): Đúng.**

Gọi α, β, γ lần lượt là góc tạo bởi vectơ đơn vị $\vec{u}$ với các tia Ox, Oy, Oz.

Ta có các hệ số a, b, c chính là các cosin chỉ phương: $a = \cos\alpha = \cos 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ và $b = \cos\beta = \cos 60° = \dfrac{1}{2}$.

Vì $\vec{u}$ là vectơ đơn vị nên: $a^2 + b^2 + c^2 = 1 \Rightarrow \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + c^2 = 1 \Rightarrow \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + c^2 = 1 \Rightarrow c^2 = \dfrac{1}{4}$.

Do $\vec{u}$ tạo với tia Oz một góc nhọn nên $c = \cos\gamma > 0 \Rightarrow c = \dfrac{1}{2}$.

c): Sai.

Quãng đường thiết bị đi được sau thời gian t là: $S(t) = \int_0^t v(x)dx = \int_0^t (mx+10)dx = \left[\dfrac{1}{2}mx^2 + 10x\right]_0^t = \dfrac{1}{2}mt^2 + 10t$.

Theo đề bài, sau 5 giây thiết bị đi được 125 m: $S(5) = 125 \Rightarrow \dfrac{1}{2}m \cdot 5^2 + 10 \cdot 5 = 125 \Rightarrow \dfrac{25}{2}m + 50 = 125 \Rightarrow \dfrac{25}{2}m = 75 \Rightarrow m = 6$.

b): Đúng.

Vectơ chỉ phương của quỹ đạo là $\vec{u} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Chọn vectơ chỉ phương cùng phương là $\vec{u'} = 2\vec{u} = (\sqrt{2}; 1; 1)$.

Thiết bị xuất phát từ $A(1; 2; 0)$, nên phương trình chính tắc của đường thẳng quỹ đạo là: $\frac{x-1}{\sqrt{2}} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{1}$.

d): Đúng.

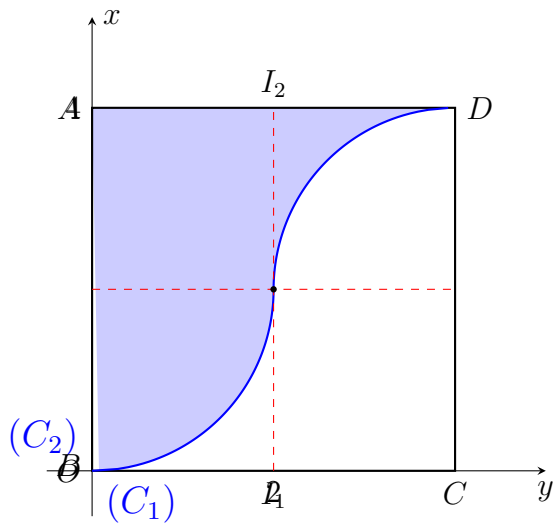
Quãng đường thiết bị đi được sau 10 giây là: $S(10) = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 10^2 + 10 \cdot 10 = 300 + 100 = 400$ m.

Tọa độ của thiết bị tại thời điểm t là $\overrightarrow{M(t)} = \vec{A} + S(t) \cdot \vec{u}$.

Độ cao của thiết bị chính là cao độ z: $z(t) = z_A + S(t) \cdot c = 0 + S(t) \cdot \frac{1}{2}$.

Tại thời điểm $t = 10$: $z(10) = 400 \cdot \frac{1}{2} = 200$ m.

Bài 93. Hình phẳng (H) dưới đây được giới hạn bởi các cạnh AB, AD của hình vuông và các cung phần tư của các đường tròn có bán kính bằng 2 cm với tâm lần lượt là trung điểm của các cạnh BC và AD và được gắn vào hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ dưới đây:



Kiểm tra tính đúng/sai của các khẳng định sau:

a) Cung tròn phần tư (C_2) có tâm $I_2(4; 2)$.

b) Phương trình của cung tròn phần tư (C_1) là $y = 2 - \sqrt{4 - x^2}$.

c) Diện tích hình phẳng (H) bằng 8 cm^2.

d) Người ta muốn tạo ra một vật trang trí dạng khối tròn xoay bằng cách quay hình phẳng (H) quanh trục AB thì lúc này vật trang trí có thể tích bằng 72 cm^3 (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

Hướng dẫn giải. Dựa vào hình vẽ, ta thiết lập hệ tọa độ với trục Ox thẳng đứng và Oy nằm ngang. Gốc tọa độ $B \equiv O(0, 0)$.

Khi đó: $A(4; 0)$, $C(0; 4)$, $D(4; 4)$.

Trung điểm của BC là $I_1(0; 2)$, trung điểm của AD là $I_2(4; 2)$.

a): Đúng.

Cung tròn (C_2) đi qua điểm $(2; 2)$ và $(4; 4)$, tâm của nó là trung điểm cạnh AD, do đó tọa độ tâm

là $I_2(4;2)$.

b): Đúng.

Cung tròn (C_1) có tâm $I_1(0;2)$ và bán kính $R=2$. Phương trình đường tròn là: $x^2+(y-2)^2=2^2 \Leftrightarrow (y-2)^2=4-x^2 \Leftrightarrow y=2\pm\sqrt{4-x^2}$.

Vì cung (C_1) nằm trong khoảng $y\in[0;2]$ nên phương trình là $y=2-\sqrt{4-x^2}$ với $x\in[0;2]$.

c): Đúng.

Hàm số xác định đường biên của hình phẳng (H) là: $f(x)=\begin{cases}2-\sqrt{4-x^2} & \text{khi } 0\le x\le 2\\ 2+\sqrt{4-(x-4)^2} & \text{khi } 2<x\le 4\end{cases}$

Diện tích hình phẳng (H) là: $S=\displaystyle\int_0^2(2-\sqrt{4-x^2})dx+\int_2^4(2+\sqrt{4-(x-4)^2})dx=(4-\pi)+(4+\pi)=8$ cm^2.

d): Sai.

Trục AB chính là trục Ox (trục thẳng đứng trong hình). Thể tích khối tròn xoay khi quay (H) quanh Ox là: $V=\pi\displaystyle\int_0^4[f(x)]^2dx=\pi\left(\int_0^2(2-\sqrt{4-x^2})^2dx+\int_2^4(2+\sqrt{4-(x-4)^2})^2dx\right)$.

Tính toán các tích phân:

$I_1=\displaystyle\int_0^2(8-x^2-4\sqrt{4-x^2})dx=\left[8x-\frac{x^3}{3}\right]_0^2-4\pi=\frac{40}{3}-4\pi.$

$I_2=\displaystyle\int_2^4(8-(x-4)^2+4\sqrt{4-(x-4)^2})dx=\frac{40}{3}+4\pi.$

Vậy $V=\pi\left(\dfrac{40}{3}-4\pi+\dfrac{40}{3}+4\pi\right)=\dfrac{80\pi}{3}\approx 83,78$ cm$^3\neq 72$ cm^3.

Bài 94. Trong y học hạt nhân, đồng vị phóng xạ I-131 thường được sử dụng để hỗ trợ chẩn đoán và điều trị các bệnh lý về tuyến giáp. Sau khi tiêm vào cơ thể bệnh nhân, số lượng hạt nhân phóng xạ sẽ giảm dần theo thời gian. Giả sử khối lượng $m(t)$ (đơn vị: mg) của I-131 còn lại trong cơ thể tại thời điểm t ngày $(t\ge 0)$ thỏa mãn $m(t)>0$ và tốc độ phân rã tỉ lệ thuận với khối lượng hiện có theo phương trình $m'(t)=k\cdot m(t)$ với $k\neq 0$. Kết quả kiểm tra cho thấy khối lượng I-131 còn lại tại thời điểm $t=8$ ngày và $t=16$ ngày lần lượt là 4 mg và 2 mg. Kiểm tra tính đúng/sai của các khẳng định sau:

a) $m(t)=e^{kt+C}$ với C là một hằng số xác định.

b) $k=-\dfrac{\ln 2}{4}$.

c) $C=3\ln 2$.

d) Khối lượng I-131 còn lại trong cơ thể tại thời điểm $t=24$ ngày nhỏ hơn $0,8$ mg.

Hướng dẫn giải. **a): Đúng.**

Ta có phương trình vi phân: $m'(t)=k\cdot m(t)\Leftrightarrow\dfrac{m'(t)}{m(t)}=k$.

Lấy nguyên hàm hai vế theo biến t: $\displaystyle\int\frac{m'(t)}{m(t)}dt=\int kdt\Rightarrow\ln|m(t)|=kt+C$.

Vì $m(t)>0$ nên $\ln(m(t))=kt+C\Rightarrow m(t)=e^{kt+C}$.

b) và c):

Theo giả thiết:

- Tại $t=8$: $m(8)=e^{8k+C}=4\Rightarrow 8k+C=\ln 4=2\ln 2\quad(1)$.

◈ Tại $t = 16$: $m(16) = e^{16k+C} = 2 \Rightarrow 16k + C = \ln 2 \quad (2)$.

Lấy $(2) - (1)$ ta được: $8k = \ln 2 - 2\ln 2 = -\ln 2 \Rightarrow k = -\dfrac{\ln 2}{8}$.

$\Rightarrow$ **b) Sai.**

Thay k vào (1): $8 \cdot \left(-\dfrac{\ln 2}{8}\right) + C = 2\ln 2 \Rightarrow -\ln 2 + C = 2\ln 2 \Rightarrow C = 3\ln 2$.

$\Rightarrow$ **c) Đúng.**

d): Sai.

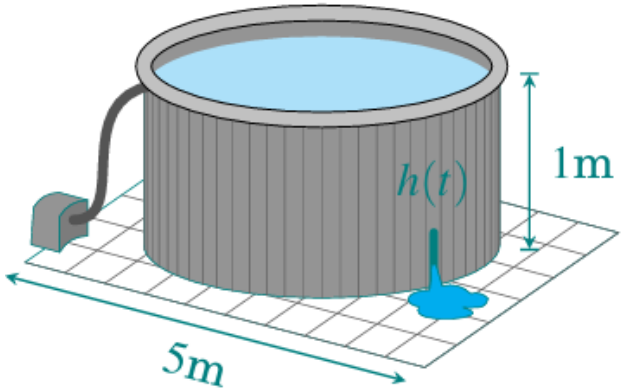
Hàm khối lượng là $m(t) = e^{-\frac{\ln 2}{8}t + 3\ln 2}$.

Tại thời điểm $t = 24$: $m(24) = e^{-\frac{\ln 2}{8}\cdot 24 + 3\ln 2} = e^{-3\ln 2 + 3\ln 2} = e^0 = 1$ mg.

Vì $1 > 0,8$ nên khối lượng I-131 còn lại tại $t = 24$ không nhỏ hơn $0,8$ mg.

Cách giải nhanh: Nhận thấy cứ sau 8 ngày khối lượng giảm đi một nửa (từ 4mg về 2mg), nên sau 8 ngày tiếp theo (tức $t = 24$) khối lượng sẽ còn $2 : 2 = 1$ mg.

Bài 95. Một bể bơi hình trụ có đường kính 5 m và chiều cao 1 m; bể được bơm nước vào với tốc độ không đổi v_0. Sau khi nước được bơm đầy, bể bơi bị thủng một lỗ ở đáy và nước chảy ra ngoài và bể bị chảy hết nước trong 8 giờ. Biết tốc độ giảm chiều cao của bể bơi khi nước chảy ra ngoài vào thời điểm t giờ (tính từ lúc nước đầy bể và ngừng bơm) được cho bởi hàm số $h'(t) = at + b$, với $a, b \in \mathbb{R}$. Lúc nước chảy hết ra ngoài thì tốc độ giảm chiều cao bằng 0.



a) Thể tích của bể bơi sau khi nước được làm đầy là $6,25\pi$ m^3.

b) $32a + 1 = 0$ và $4b - 1 = 0$.

c) Sau 4 giờ kể từ lúc bể bị rò, lượng nước bị mất đi bằng $\dfrac{75\pi}{16}$ m^3.

d) Lượng nước bị rò rỉ ra ngoài một nửa sau $8 - 4\sqrt{2}$ giờ.

Hướng dẫn giải. **a) Đúng** Bể nước hình trụ có bán kính đáy $r = 2,5$ m chiều cao $h = 1$ m.

Thể tích khi bể đầy nước $V = \pi r^2 h = \pi \cdot (2,5)^2 \cdot 1 = 6,25\pi$ (m^3).

b) Sai Ta có $h'(t) = at + b$.

Suy ra chiều cao của nước thời điểm t là $h(t) = \displaystyle\int (at + b)\mathrm{d}t = \frac{a}{2}t^2 + bt + c$.

Theo đề bài ta có $\begin{cases} h'(8) = 0 \\ h(0) = 1 \\ h(8) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8a + b = 0 \\ c = 1 \\ 32a + 8b + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{32} \\ b = -\dfrac{1}{4} \\ c = 1. \end{cases}$

Khi đó, $32a - 1 = 0$; $4b + 1 = 0$.
Vậy chiều cao của nước thời điểm t là $h(t) = \dfrac{1}{64}t^2 - \dfrac{1}{4}t + 1$.

c) Đúng Chiều cao mực nước trong bể sau 4 giờ là

$$h(4) = \frac{1}{64} \cdot 4^2 - \frac{1}{4} \cdot 4 + 1 = 0,25 \text{ (m)}.$$

Lượng nước còn lại trong bể sau 4 giờ là $V_1 = \pi r^2 \cdot h(4) = \pi \cdot (2,5)^2 \cdot 0,25 = \dfrac{25\pi}{16}$ (m^3).
Lượng nước đã thoát ra sau 4 giờ là $V_2 = V - V_1 = 6,25\pi - \dfrac{25\pi}{16} = \dfrac{75\pi}{16}$ (m^3).

d) Sai Lượng nước còn lại khi đã mất một nửa là $V' = \dfrac{V}{2} = \dfrac{6,25\pi}{2} = \dfrac{25\pi}{8}$ (m^3).
Chiều cao tương ứng $h(t_1)$ của bể khi đó thỏa mãn

$$\pi \cdot (2,5)^2 \cdot h(t_1) = \frac{25\pi}{8} \Leftrightarrow h(t_1) = 0,5 \text{ (m)}.$$

Bài 96. Hình dạng hạt của đậu Hà Lan có hai kiểu hình: hạt trơn và hạt nhăn, có hai gene ứng với hai kiểu hình này là gene trội B và gene lặn b. Khi cho lai hai cây đậu Hà Lan, cây con lấy ngẫu nhiên một cách độc lập một gene từ cây bố và một gene từ cây mẹ để hình thành một cặp gene. Giả sử cây bố và cây mẹ được chọn ngẫu nhiên từ một quần thể các cây đậu Hà Lan, ở đó tỉ lệ cây mang kiểu gene bb, Bb tương ứng là 40% và 60%. Khi đó:

a) Xác suất để cây con lấy gene b từ cây bố với điều kiện cây bố có kiểu gene bb là $0,5$.

b) Xác suất để cây con lấy gene b từ cây bố với điều kiện cây bố có kiểu gene Bb là $0,5$.

c) Xác suất để cây con lấy gene b từ cây bố là $0,6$.

d) Xác suất để cây con có kiểu gene bb là $0,49$.

Hướng dẫn giải. Gọi A là biến cố: "Cây bố có kiểu gene bb";
M là biến cố: "Cây con lấy gene b từ cây bố";
N là biến cố: "Cây con lấy gene b từ cây mẹ";
E là biến cố: "Cây con có kiểu gene bb".
Theo giả thiết M và N độc lập nên $P(E) = P(M) \cdot P(N)$.
Ta áp dụng công thức xác suất toàn phần $P(M) = P(A) \cdot P(M|A) + P(\bar{A}) \cdot P(M|\bar{A})$ $(*)$.
Suy ra $P(A) = 0,4; P(\bar{A}) = 0,6$.

a) Sai $P(M|A)$ là xác suất để cây con lấy gene b từ cây bố với điều kiện cây bố có kiểu gene bb. Do đó $P(M|A) = 1$.

b) Đúng $P(M|\bar{A})$ là xác suất để cây con lấy gene b từ cây bố với điều kiện cây bố có kiểu gene Bb. Do đó $P(M|\bar{A}) = \dfrac{1}{2} = 0,5$.

c) Sai Thay vào $(*)$ ta được $P(M) = 0,4 \cdot 1 + 0,6 \cdot 0,5 = 0,4 + 0,3 = 0,7$.

d) Đúng Tương tự tính được $P(N) = 0,7$. Vậy $P(E) = P(M) \cdot P(N) = 0,7 \cdot 0,7 = 0,49$.
Từ kết quả trên suy ra trong một quần thể các cây đậu Hà Lan, ở đó tỉ lệ cây bố và cây mẹ mang kiểu gene bb, Bb tương ứng là 40% và 60%, thì tỉ lệ cây con có kiểu gene bb là khoảng 49%.

Bài 97. Một con sư tử đang đuổi theo một con ngựa vằn và chúng cùng chạy trên một đường thẳng. Ngựa vằn đã nhận ra sư tử khi sư tử cách nó khoảng 40 m. Từ thời điểm này, sư tử đuổi theo ngựa vằn với tốc độ $v_1(t) = 15e^{-0,1t}$ m/s và ngựa vằn bỏ chạy với tốc độ $v_2(t) = 20 - 20e^{-0,1t}$ m/s (t tính bằng giây, $0 \le t \le 60$). Kiểm tra tính đúng/sai của các khẳng định sau:

a) Tại thời điểm ban đầu $t = 0$ giây, vận tốc của con ngựa vằn là 20 m/s.

b) Tốc độ của sư tử giảm dần theo thời gian, trong khi tốc độ của ngựa vằn tăng dần theo thời gian.

c) Sư tử ở gần ngựa vằn nhất khi $v_1'(t) = v_2'(t)$ và khoảng cách ngắn nhất giữa chúng là $1,72$ m (làm tròn đến hàng phần trăm theo đơn vị mét).

d) Sư tử sẽ không bắt được ngựa vằn và khoảng cách ngắn nhất giữa chúng là $1,92$ m (làm tròn đến hàng phần trăm theo đơn vị mét).

Hướng dẫn giải. **a) Sai** Vận tốc ban đầu của con ngựa vằn là $v_2(0) = 20 - 20e^0 = 20 - 20 = 0$ (m/s).

b) Đúng Ta có $v_1'(t) = -0,1 \cdot 15e^{-0,1t} = -1,5e^{-0,1t} < 0, \forall t \in [0;60]$. Suy ra tốc độ sư tử giảm dần theo thời gian.
Ta có $v_2'(t) = -0,1 \cdot (-20)e^{-0,1t} = 2e^{-0,1t} > 0, \forall t \in [0;60]$. Suy ra tốc độ của ngựa vằn tăng dần theo thời gian.

c) Sai Gọi $d(t)$ là khoảng cách giữa sư tử và ngựa vằn tại thời điểm t. Ta có:

$$d(t) = 40 + \int_0^t [v_2(u) - v_1(u)]\mathrm{d}u.$$

Khoảng cách cực tiểu khi $d'(t) = 0 \Leftrightarrow v_2(t) - v_1(t) = 0 \Leftrightarrow v_2(t) = v_1(t)$.
Giải phương trình:

$$20 - 20e^{-0,1t} = 15e^{-0,1t} \Leftrightarrow 20 = 35e^{-0,1t} \Leftrightarrow e^{-0,1t} = \frac{20}{35}$$

$$\Leftrightarrow -0,1t = \ln\frac{20}{35} \Rightarrow t = \frac{\ln\frac{20}{35}}{-0,1} \approx 5,6 \text{ s}.$$

Bảng biến thiên:

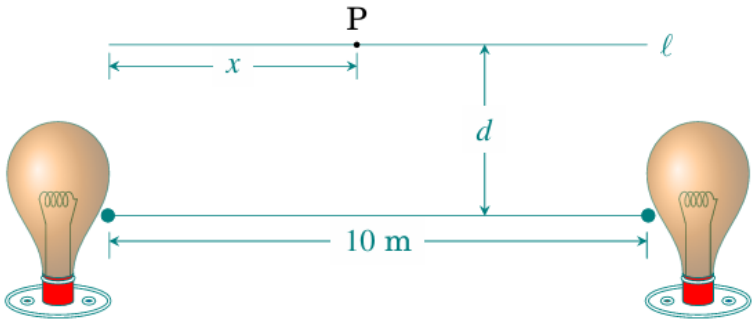
t	0		$5,6$		60
$d'(t)$		$-$	0	$+$	
$d(t)$	40	$\searrow$	$1,92$	$\nearrow$	$890,87$

Vậy sư tử ở gần ngựa vằn nhất khi $v_1(t) = v_2(t)$, và khoảng cách ngắn nhất giữa chúng là $1,92$ m. Khẳng định c ghi điều kiện $v_1'(t) = v_2'(t)$ và giá trị $1,72$ là sai.

d) Đúng Từ bảng biến thiên, ta thấy khoảng cách ngắn nhất giữa hai con vật là $1,92$ m.

Vì $d_{\min} > 0$ nên sư tử không bao giờ bắt được ngựa vằn. Kể từ thời điểm gần nhất đó, ngựa vằn chạy nhanh hơn sư tử nên khoảng cách sẽ ngày càng tăng lên, sư tử dần bị bỏ lại phía sau.

Bài 98. Hai nguồn sáng có cường độ giống hệt nhau được đặt cách nhau 10 m. Một vật sẽ được đặt tại một điểm P nằm trên một đường thẳng ℓ, song song với đường nối hai nguồn sáng và cách đường đó một khoảng d m (xem hình vẽ). Ta muốn đặt điểm P trên đường ℓ sao cho cường độ chiếu sáng tại P là nhỏ nhất. Ta cần biết rằng cường độ chiếu sáng tại điểm đơn lẻ tỉ lệ thuận với cường độ của nguồn và tỉ lệ nghịch với bình phương khoảng cách đến nguồn đó. Đặt hệ trục tọa độ Oxy sao cho tâm O trùng với nguồn sáng bên trái, tia Ox chứa đoạn nối hai nguồn sáng, tia Oy hướng lên trên, đơn vị trên mỗi trục là m. Kiểm tra tính đúng/sai của các khẳng định sau:



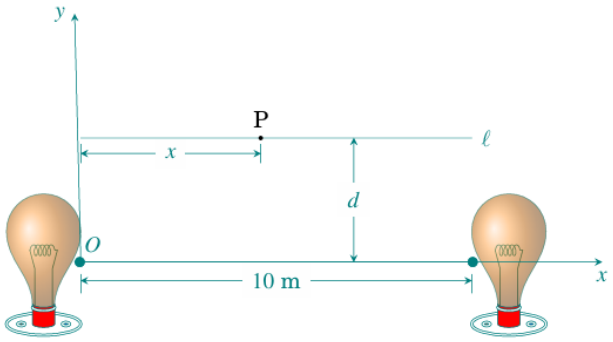
a) Khoảng cách từ P đến các nguồn sáng là $r_1 = \sqrt{x^2 + d^2}; r_2 = \sqrt{(x+10)^2 + d^2}$.

b) Tổng cường độ chiếu sáng tại P là $I(x) = k\left(\dfrac{1}{x^2+d^2} + \dfrac{1}{(x-10)^2+d^2}\right)$; với $k > 0$ là hằng số tỉ lệ.

c) Khi $d = 5$ m, cường độ ánh sáng tại P đạt cực tiểu khi $x = 5$ m.

d) Khi $d = 10$ m thì cường độ ánh sáng không đạt cực tiểu khi P ở vị trí chính giữa của thanh ℓ.

✍ *Hướng dẫn giải.* Thiết lập hệ trục tọa độ như đề bài: Nguồn sáng 1 đặt tại $O(0;0)$, nguồn sáng 2 đặt tại $S_2(10;0)$. Điểm P nằm trên đường thẳng $y = d$ nên có tọa độ $P(x;d)$.



a) Sai.

Khoảng cách từ $P(x;d)$ đến nguồn sáng bên trái $O(0;0)$ là: $r_1 = \sqrt{(x-0)^2 + (d-0)^2} = \sqrt{x^2+d^2}$.
Khoảng cách từ $P(x;d)$ đến nguồn sáng bên phải $S_2(10;0)$ là: $r_2 = \sqrt{(x-10)^2 + (d-0)^2} = \sqrt{(x-10)^2+d^2}$.
Trong khẳng định a, biểu thức r_2 viết là $(x+10)^2$ nên là sai.

b) Đúng.

Cường độ chiếu sáng tỉ lệ nghịch với bình phương khoảng cách: $I = \dfrac{k}{r^2}$.
Tổng cường độ chiếu sáng tại P là:

$$I(x) = I_1 + I_2 = \frac{k}{r_1^2} + \frac{k}{r_2^2} = k\left(\frac{1}{x^2+d^2} + \frac{1}{(x-10)^2+d^2}\right)$$

c) Đúng.

Khi $d = 5$, ta có $I(x) = k\left(\dfrac{1}{x^2+25} + \dfrac{1}{(x-10)^2+25}\right)$.
Đạo hàm: $I'(x) = -2k\left(\dfrac{x}{(x^2+25)^2} + \dfrac{x-10}{((x-10)^2+25)^2}\right)$.

Tại $x=5$: $I'(5)=-2k\left(\dfrac{5}{(25+25)^2}+\dfrac{5-10}{((5-10)^2+25)^2}\right)=-2k\left(\dfrac{5}{50^2}-\dfrac{5}{50^2}\right)=0.$
Xét dấu đạo hàm hoặc so sánh giá trị: $I(5)=k(\frac{1}{50}+\frac{1}{50})=0,04k.$
$I(0)=k(\frac{1}{25}+\frac{1}{125})=0,048k.$
Vì $I(5)<I(0)$, tại $x=5$ hàm số đạt cực tiểu.

d) Đúng.
Khi $d=10$: $I(x)=k\left(\dfrac{1}{x^2+100}+\dfrac{1}{(x-10)^2+100}\right).$
So sánh giá trị tại vị trí biên và vị trí chính giữa:
Tại $x=0$: $I(0)=k\left(\dfrac{1}{100}+\dfrac{1}{200}\right)=\dfrac{3k}{200}=0,015k.$
Tại $x=5$: $I(5)=k\left(\dfrac{1}{125}+\dfrac{1}{125}\right)=\dfrac{2k}{125}=0,016k.$
Vì $I(5)>I(0)$, nên tại $x=5$ cường độ sáng đạt cực đại địa phương chứ không phải cực tiểu. (Điều này xảy ra vì $d>\frac{10}{\sqrt{2}}\approx 7,07$).

Bài 99. Hệ thống lọc nước bể bơi vô cùng quan trọng để nguồn nước được làm sạch thường xuyên và giữ vệ sinh cho người bơi. Trong quá trình vận hành lọc nước thì lượng nước trong bể sẽ thay đổi theo thời gian. Lượng nước trong bể giảm nếu hệ thống đang xả nước bẩn ra khỏi bể và tăng nếu hệ thống đang cấp thêm nước sạch cho bể. Biết rằng 1 gallon gần bằng $3,785$ lít, dung tích của bể là 1000 gallon và thời điểm 6 giờ sáng bể chứa 250 gallon nước. Hàm số $f(t)$ liên tục trên đoạn $[0;12]$ biểu thị cho tốc độ thay đổi lượng nước trong bể theo thời gian t giờ, từ thời điểm 6 giờ sáng đến 6 giờ chiều được cho bởi hàm số

$$f(t)=\begin{cases}100t, & 0\le t\le 3\\ -200t+a, & 3\le t\le 6,(a\in\mathbb{R})\\ 100t-900, & 6\le t\le 12\end{cases}.$$

Với mốc thời gian $t=0$ tại thời điểm 6 giờ sáng.

a) Tại thời điểm 9 giờ sáng, nước trong bể đang tăng với tốc độ 600 gallon/giờ.

b) Giá trị của $a=900$.

c) Tốc độ thay đổi lượng nước trong bể bằng 0 vào lúc 11 giờ trưa và 15 giờ chiều.

d) Lượng nước trong bể lớn nhất trong khoảng thời gian từ 9 giờ sáng đến 18 giờ chiều là 700 gallon nước.

Hướng dẫn giải. **a) Sai** Do $t=0$ tại thời điểm 6 giờ sáng nên tại thời điểm 9 giờ sáng thì $t=3$.
Ta có $f(3)=100\cdot 3=300$ gallon/giờ.

b) Đúng Với $t=3$, $100t=-200t+a\Leftrightarrow -600+a=300\Leftrightarrow a=900$.

c) Sai Tại 11 giờ trưa (tương đương $t=5$), tốc độ thay đổi lượng nước trong bể là $f(5)=-200\cdot 5+900=-100$ gallon/giờ.
Tại 15 giờ chiều (tương đương $t=9$), tốc độ thay đổi lượng nước trong bể là $f(9)=100\cdot 9-900=0$ gallon/giờ.

d) Đúng Từ 9 giờ sáng đến 18 giờ chiều tức là $3\le t\le 12$.
Từ $3\le t\le 9$, lượng nước đang giảm về 0.
Lượng nước trong bể bắt đầu tăng trở lại từ $9\le t\le 12$.

Lượng nước trong bể từ 15 giờ chiều đến 18 giờ chiều là

$$250 + \int_{9}^{12} (100t - 900)\mathrm{d}t = 700.$$

Bài 100. Khi bỏ qua sức cản của không khí, độ cao (mét) của một vật thể sau thời gian t giây được phóng thẳng đứng lên trên từ điểm cách mặt đất 5 mét với tốc độ ban đầu $39,2$ (m/s) là $h(t) = 5 + 39,2t - 4,9t^2$, chọn chiều dương là chiều hướng từ dưới lên. (*theo Vật lí đại cương, NXB Giáo dục Việt Nam, 2016*)

a) Vận tốc của vật sau 3 giây là $4,6$ (m/s).

b) Vật đạt độ cao lớn nhất bằng $84,3$ mét tại thời điểm $t = 4$ (giây).

c) Khoảng thời gian vật ở độ cao trên 10 mét dài hơn 7 (giây).

d) Vận tốc của vật lúc vật chạm đất xấp xỉ $-40,43$ (m/s).

Hướng dẫn giải. **a) Sai** Vận tốc của vật tại thời điểm t giây là $v(t) = h'(t) = 39,2 - 9,8t$.
Vận tốc của vật sau 3 giây là $v(3) = 9,8$ (m/s).

b) Đúng Vì $h(t)$ là hàm số bậc hai có hệ số $a = -4,9 < 0$ nên $h(t)$ đạt giá trị lớn nhất tại thời điểm $t = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{39,2}{2 \cdot 4,9} = 4$ giây.
Khi đó độ cao lớn nhất của vật là $h(4) = 83,4$ (m).

c) Đúng Vật ở độ cao trên 10 mét khi

$$h(t) > 10 \Leftrightarrow -4,9t^2 + 39,2t - 5 > 0 \Leftrightarrow \frac{28 - \sqrt{734}}{7} < t < \frac{28 + \sqrt{734}}{7}.$$

Khoảng thời gian vật ở độ cao trên 10 mét dài

$$\frac{28 + \sqrt{734}}{7} - \frac{28 - \sqrt{734}}{7} = \frac{2\sqrt{734}}{7} \approx 7,74 \text{ (giây)}.$$

d) Đúng Vật chạm đất khi độ cao bằng 0, tức là

$$h(t) = 0 \Leftrightarrow -4,9t^2 + 39,2t + 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{28 + \sqrt{834}}{7} \text{ (nhận)} \\ t = \dfrac{28 - \sqrt{834}}{7} \text{ (loại)}. \end{array}\right.$$

Khi đó vận tốc của vật là $v\left(\dfrac{28 + \sqrt{834}}{7}\right) \approx -40,43$ (m/s).

Chương VI
ĐÁP ÁN PHẦN TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN

Bài 1. (THPT-2025) Có bốn ngăn (trong một giá để sách) được đánh số thứ tự $1, 2, 3, 4$ và tám quyển sách khác nhau. Bạn An xếp hết tám quyển sách nói trên vào bốn ngăn đó sao cho mỗi ngăn có ít nhất một quyển sách và các quyển sách được xếp thẳng đứng thành một hàng ngang với gáy sách quay ra ngoài ở mỗi ngăn. Khi đã xếp xong tám quyển sách, hai cách xếp của bạn An được gọi là giống nhau nếu chúng thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau đây:

- Với từng ngăn, số lượng quyển sách ở ngăn đó là như nhau trong cả hai cách xếp.
- Với từng ngăn, thứ tự từ trái sang phải của các quyển sách được xếp là như nhau trong cả hai cách xếp.

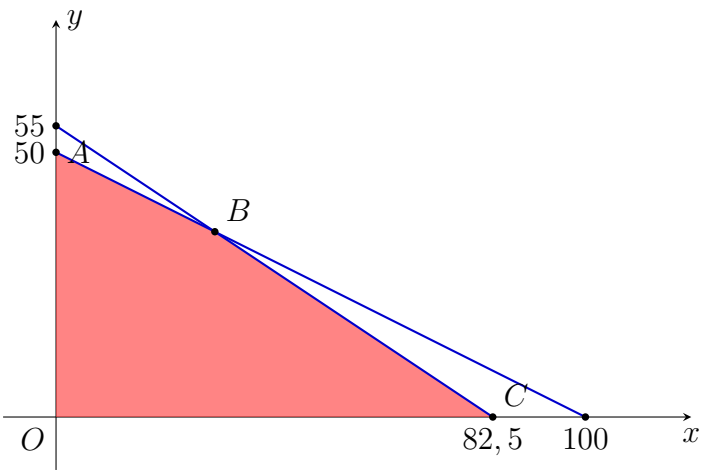
Gọi T là số cách xếp đôi một khác nhau của bạn An. Giá trị của $\dfrac{T}{400}$ bằng bao nhiêu?

Hướng dẫn giải. Số cách xếp 8 quyển sách khác nhau thành một hàng ngang có 8! cách.
Khi xếp 8 quyển sách thành một hàng ngang thì có 7 vị trí ở giữa 2 quyển sách kề nhau.
Sách 1 | Sách 2 | Sách 3 | Sách 4 | Sách 5 | Sách 6 | Sách 7 | Sách 8
Khi đó ta chọn 3 trong 7 vị trí nằm giữa đó để đặt vách ngăn (3 vách ngăn chia 8 quyển thành 4 nhóm sách, mỗi nhóm có ít nhất 1 quyển, theo thứ tự đó ta để vào 4 ngăn sách) có C_7^3 cách.
Suy ra số cách xếp là $T = 8! \cdot C_7^3$.
Vậy $\dfrac{T}{400} = \dfrac{40320 \cdot 35}{400} = 3528$.

Bài 2. (THPT-2025) Để gây quỹ từ thiện, câu lạc bộ thiện nguyện của một trường THPT tổ chức hoạt động bán hàng với hai mặt hàng là nước chanh và khoai chiên. Câu lạc bộ thiết kế hai thực đơn. Thực đơn 1 có giá 35 nghìn đồng, bao gồm hai cốc nước chanh và một túi khoai chiên. Thực đơn 2 có giá 60 nghìn đồng, bao gồm ba cốc nước chanh và hai túi khoai chiên. Biết rằng câu lạc bộ chỉ làm được không quá 165 cốc nước chanh và 100 túi khoai chiên. Số tiền lớn nhất mà câu lạc bộ có thể nhận được sau khi bán hết hàng bằng bao nhiêu nghìn đồng?

Hướng dẫn giải. Gọi x, y lần lượt là số thực đơn 1 và thực đơn 2 câu lạc bộ làm được $(x, y \in \mathbb{N})$.
Số tiền câu lạc bộ nhận được là $F(x; y) = 35x + 60y$ (nghìn đồng).

Theo bài ra ta có hệ bất phương trình: $\begin{cases} 2x+3y \le 165 \\ x+2y \le 100 \\ x, y \ge 0 \end{cases} \quad (I)$

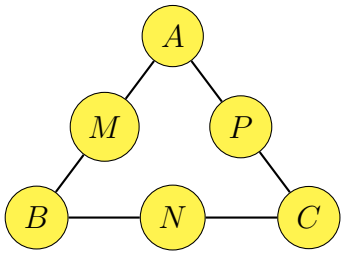


Miền nghiệm của hệ (I) là miền tứ giác $OABC$ với: $O(0;0), A(0;50), B(30;35), C(82,5;0)$.
Khi đó:

- $F(O) = 0$.
- $F(A) = 35 \cdot 0 + 60 \cdot 50 = 3000$.
- $F(B) = 35 \cdot 30 + 60 \cdot 35 = 3150$.
- $F(C) = 35 \cdot 82,5 + 60 \cdot 0 = 2887,5$.

So sánh các giá trị trên, số tiền lớn nhất mà câu lạc bộ có thể nhận được là 3150 nghìn đồng.

Bài 3. (THPT-2025) Bạn Nam tham gia cuộc thi giải một mật thư. Theo quy tắc của cuộc thi, người chơi cần chọn ra sáu số từ tập $S = \{41; 42; 43; 44; 45; 46; 47; 48; 49\}$ và xếp mỗi số vào đúng một vị trí trong sáu vị trí A, B, C, M, N, P như hình bên sao cho mỗi vị trí chỉ được xếp một số.



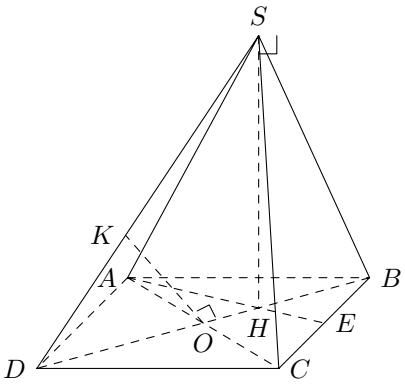
Mật thư sẽ được giải nếu các bộ ba số xuất hiện ở những bộ ba vị trí $(A, M, B); (B, N, C); (C, P, A)$ tạo thành các cấp số cộng theo thứ tự đó. Bạn Nam chọn ngẫu nhiên sáu số trong tập S và xếp ngẫu nhiên vào các vị trí được yêu cầu. Gọi xác suất để bạn Nam giải được mật thư ở lần chọn và xếp đó là a. Giá trị của $\dfrac{4}{a}$ bằng bao nhiêu?

Hướng dẫn giải. Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = A_9^6 = 60480$.
Vì mật thư sẽ được giải nếu các bộ ba số xuất hiện ở những bộ ba vị trí $(A, M, B); (B, N, C); (C, P, A)$ tạo thành các cấp số cộng theo thứ tự đó $\Rightarrow \begin{cases} A+B=2M \\ B+C=2N \\ C+A=2P \end{cases} \Rightarrow A+B+C=M+N+P$
Ta có các trường hợp sau cho bộ $\{A, B, C\}$ và tương ứng là $\{M, N, P\}$:
$41+43+47=42+44+45 \qquad 41+43+49=42+45+46$

$41+45+47=43+44+46$ $\quad$ $43+45+49=44+46+47$
$43+47+49=45+46+48$ $\quad$ $42+44+48=43+45+46$
$42+46+48=44+45+47$ $\quad$ $41+47+49=44+45+48$
Số cách xếp các bộ số A,B,C thỏa mãn ở mỗi trường hợp là 3! cách.
Ứng với mỗi cách xếp bộ số A,B,C có duy nhất một cách xếp bộ M,N,P.
Do đó, số cách xếp các bộ $(A,M,B);(B,N,C);(C,P,A)$ tạo thành các cấp số cộng theo thứ tự đó là $3!\cdot 8$.
Xác suất Nam giải được mật thư là: $a=\dfrac{3!\cdot 8}{A_9^6}=\dfrac{48}{60480}=\dfrac{1}{1260}$.
$\Rightarrow \dfrac{4}{a}=\dfrac{4}{\dfrac{1}{1260}}=5040.$

Bài 4. (THPT-2025) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông với $AB=6$. Biết rằng hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ là trọng tâm H của tam giác ABC và $SH=3\sqrt{2}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SD bằng bao nhiêu? (Không làm tròn kết quả các phép tính trung gian, chỉ làm tròn kết quả cuối cùng đến hàng phần trăm)

Hướng dẫn giải.



Gọi E là trung điểm của BC, O là giao điểm của AC và BD. Ta có AE cắt BO tại trọng tâm H.

Vì $\begin{cases} AC\perp BD \\ AC\perp SH \end{cases} \Rightarrow AC\perp (SBD)\Rightarrow AC\perp SD.$

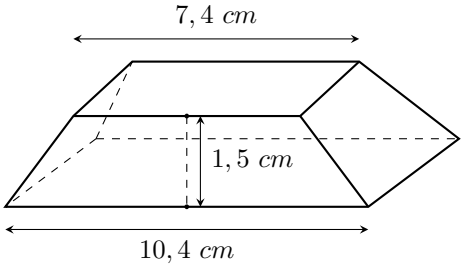
Từ O kẻ $OK\perp SD\Rightarrow OK=d(AC,SD)$. Xét hình vuông $ABCD$ có $AB=6$, ta dễ dàng tính được $BD=6\sqrt{2}\Rightarrow BO=3\sqrt{2}=OD$. Do H là trọng tâm $\triangle ABC$ nên $BH=\dfrac{2}{3}BO=2\sqrt{2}\Rightarrow DH=4\sqrt{2}$.

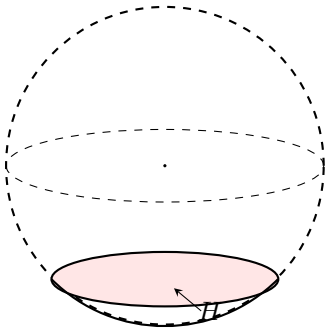
Xét $\triangle SDH$ vuông tại H, ta có: $SD^2=SH^2+DH^2=(3\sqrt{2})^2+(4\sqrt{2})^2=18+32=50\Rightarrow SD=5\sqrt{2}$.

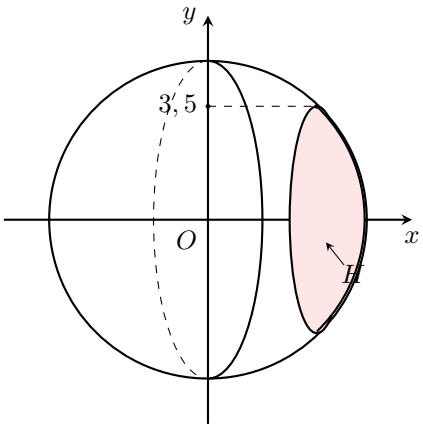
Ta dễ dàng thấy $\triangle ODK\sim\triangle SDH\Rightarrow \dfrac{OD}{OK}=\dfrac{SD}{SH}\Leftrightarrow OK=\dfrac{SH}{SD}\cdot OD=\dfrac{3\sqrt{2}}{5\sqrt{2}}\cdot 3\sqrt{2}=\dfrac{9\sqrt{2}}{5}\approx 2,55$.

Bài 5. (THPT-2025) Để đặt được một vật trang trí trên mặt bàn, người ta thiết kế một chân đế như sau: Lấy một khối gỗ có dạng khối chóp cụt tứ giác đều với độ dài hai cạnh đáy lần lượt bằng $7,4$ cm và $10,4$ cm, bề dày của khối gỗ bằng $1,5$ cm. Sau đó khoét bỏ đi một phần của khối gỗ sao cho phần đó có dạng vật thể H, ở đó H nhận được bằng cách cắt khối cầu bán kính $5,5$ cm

bởi một mặt phẳng cắt mà mặt cắt là hình tròn bán kính $3,5$ cm (xem hình dưới).







Thể tích của khối chân đế bằng bao nhiêu centimét khối (không làm tròn kết quả các phép tính trung gian, chỉ làm tròn kết quả cuối cùng đến hàng phần mười)?

Hướng dẫn giải. Thể tích khối chân đế chưa khoét là:

$$V_1 = \frac{h}{3}\left(B_1 + B_2 + \sqrt{B_1 B_2}\right) = \frac{1,5}{3}\left(10,4^2 + 7,4^2 + \sqrt{10,4^2 \cdot 7,4^2}\right) = \frac{5997}{50}\ \text{cm}^3.$$

Gọi (C) là đường tròn lớn nằm trong mặt phẳng Oxy. Khi đó, $(C): x^2+y^2 = 5,5^2 \Rightarrow y^2 = 5,5^2 - x^2$.

Bán kính mặt cắt bằng $3,5$ cm suy ra mặt cắt cắt trục Ox tại $x = \sqrt{5,5^2 - 3,5^2} = 3\sqrt{2}$.

Thể tích của khối chỏm cầu:

$$V_2 = \pi \int_{3\sqrt{2}}^{5,5} y^2 dx = \pi \int_{3\sqrt{2}}^{5,5} (5,5^2 - x^2) dx \approx 25,235\ \text{cm}^3.$$

Vậy thể tích khối chân đế là:

$$V = V_1 - V_2 = \frac{5997}{50} - 25,235 \approx 94,7\ \text{cm}^3.$$

Bài 6. (THPT-2025) Nếu một doanh nghiệp sản xuất x sản phẩm trong một tháng ($x \in \mathbb{N}^*; 1 \le x \le 4500$) thì doanh thu nhận được khi bán hết số sản phẩm là $F(x) = -0,01x^2 + 450x$ (nghìn đồng), trong khi chi phí sản xuất bình quân cho mỗi sản phẩm là $G(x) = \dfrac{30000}{x} + 340$ (nghìn đồng). Giả sử số sản phẩm sản xuất ra luôn được bán hết. Trong một tháng, doanh nghiệp đó cần sản xuất ít nhất bao nhiêu sản phẩm để lợi nhuận thu được lớn hơn 100 triệu đồng?

Hướng dẫn giải. Lợi nhuận thu được trong một tháng khi doanh nghiệp sản xuất x sản phẩm là:

$$L(x) = -0,01x^2 + 450x - x\left(\frac{30000}{x} + 340\right) = -0,01x^2 + 110x - 30000$$

Theo đề bài (100 triệu đồng = 100.000 nghìn đồng), ta có bất phương trình:

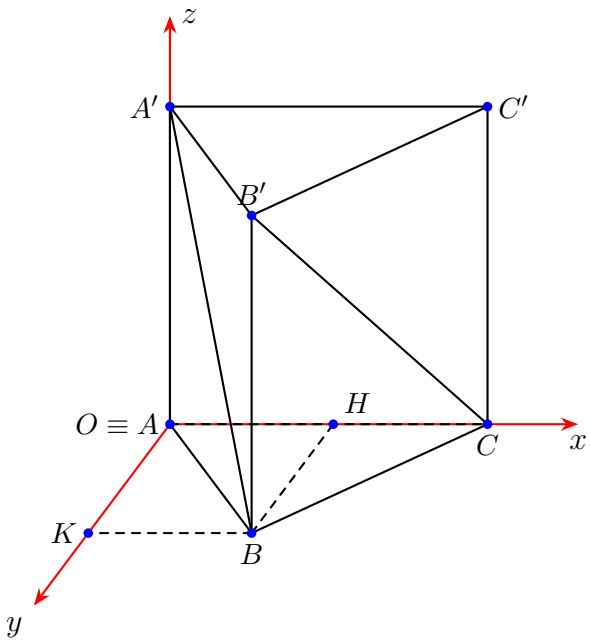
$L(x) > 100000 \Leftrightarrow -0,01x^2 + 110x - 130000 > 0 \Leftrightarrow x^2 - 11000x + 13000000 < 0 \Leftrightarrow 5500 - 500\sqrt{69} < x < 5500 + 500\sqrt{69} \Leftrightarrow 1346,6... < x < 9653,3...$

Do $x \in \mathbb{N}^*$ nên $1347 \le x \le 9653$.

Kết hợp với điều kiện đề bài ($1 \le x \le 4500$), doanh nghiệp cần sản xuất ít nhất 1347 sản phẩm.

Bài 7. (NK) Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều có cạnh bằng 1 và cạnh bên $AA' = \sqrt{2}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thăng $A'B$ và $B'C$ *(kết quả cuối cùng làm tròn đến hàng phần trăm)*

Hướng dẫn giải.



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.

Ta tìm được $A'(0;0;\sqrt{2})$, $C(1;0;0)$.

$x_B = AH = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}$.

$y_B = BH = \frac{AC\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra $B\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$.

Do đó $B'\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};1\right)$ (Do B là hình chiếu của B' lên (Oxy)).

$A'B$ đi qua điểm $B\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$ và có 1 vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{A'B} = \left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};-\sqrt{2}\right)$.

$B'C$ đi qua điểm $C(1;0;0)$ và có 1 vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{B'C} = \left(\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2};-1\right)$.

$d(A'B, B'C) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{A'B},\overrightarrow{B'C}\right]\cdot\overrightarrow{BC}\right|}{\left\|\left[\overrightarrow{A'B},\overrightarrow{B'C}\right]\right\|} \approx 0,92.$

Bài 8. (NK) Một nhà phân phối có thể thuê tối đa 3 chiếc xe tải loại A và 8 chiếc xe tải loại B để vận chuyển 100 chiếc máy giặt từ nhà máy sản xuất đến nơi tiêu thụ. Mỗi xe loại A chở được tối đa 20 máy giặt với giá cước 3 triệu đồng mỗi chuyến, mỗi xe loại B chở được tối đa 10 máy giặt với giá cước 2 triệu đồng mỗi chuyến. Nếu mỗi xe chỉ chở nhiều nhất một chuyến, số tiền cước tối thiểu *(triệu đồng)* mà nhà phân phối phải trả là bao nhiêu?

Hướng dẫn giải. Gọi x là số chuyến xe loại A được thuê. Điều kiện: $0 \le x \le 3$

Gọi y là số chuyến xe loại B được thuê. Điều kiện: $0 \le y \le 8$

Vì x, y là số chuyến và chỉ chở nhiều nhất một chuyến nên x và y cũng là số xe được thuê.

Mỗi xe loại A chở được tối đa 20 máy giặt, mỗi xe loại B chở được tối đa 10 máy giặt và tổng số máy giặt cần vận chuyển là 100.

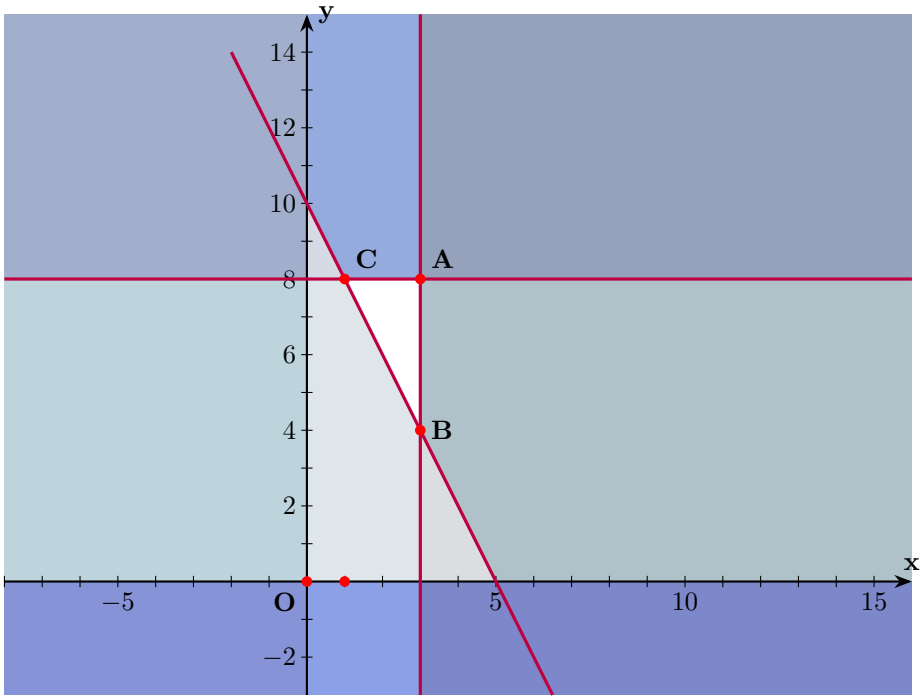
Ta thiết lập được bất phương trình $20x + 10y \geq 100 \Leftrightarrow 2x + y \geq 10$

Giá cước xe loại A: 3 triệu đồng/chuyến, giá cước xe loại B: 2 triệu đồng/chuyến.

Số tiền cước là $F(x, y) = 3x + 2y$

Bài toán trở thành: Tìm các số nguyên dương x, y thỏa mãn hệ điều kiện: $\begin{cases} 0 \leq x \leq 3 \\ 0 \leq y \leq 8 \\ 2x + y \geq 10 \end{cases}$

sao cho hàm $F(x, y) = 3x + 2y$ đạt giá trị nhỏ nhất.



Miền nghiệm của hệ bất phương trình là tam giác ABC với $A(3; 8); B(3; 4); C(1; 8)$.

$F(3; 8) = 9 + 16 = 25.$

$F(3; 4) = 9 + 8 = 17.$

$F(1; 8) = 3 + 16 = 19.$

Giá trị nhỏ nhất của hàm $F(x, y)$ là 17, đạt được tại đỉnh $B(3; 4)$.

Bài 9. (NK) Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(-4; -1; 2), B(3; 5; -6)$ và $C(a; b; c)$. Biết trung điểm cạnh AC thuộc trục tung, trung điểm cạnh BC thuộc mặt phẳng (Oxz). Tính $T = 2a + b - c$.

Hướng dẫn giải.

Gọi M là trung điểm cạnh AC. Khi đó $M(\frac{a-4}{2}; \frac{b-1}{2}; \frac{c+2}{2})$

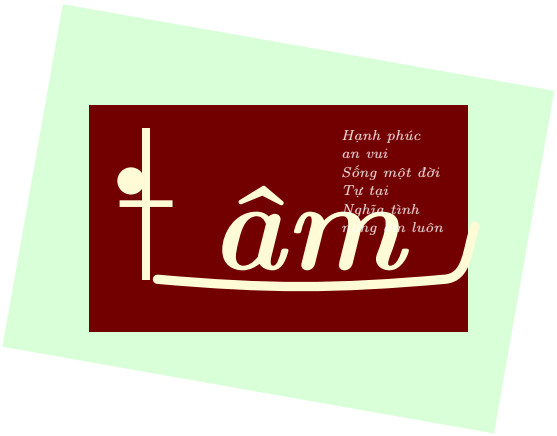
Vì $M \in Oy \Rightarrow \begin{cases} \frac{a-4}{2} = 0 \\ \frac{c+2}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ c = -2 \end{cases}$.

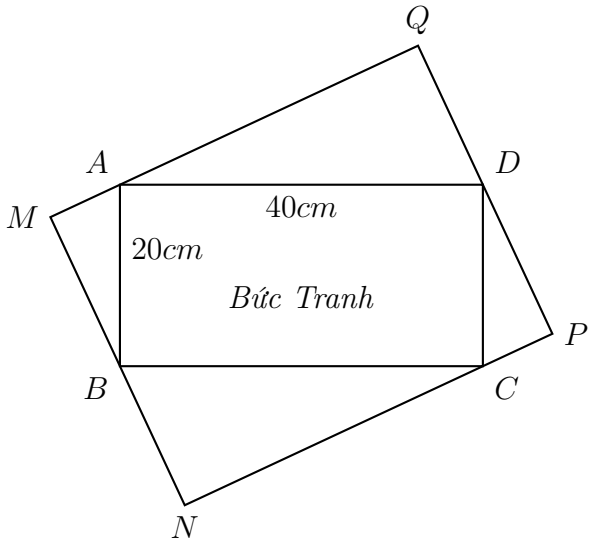
Gọi N là trung điểm của cạnh $BC \Rightarrow N(\frac{a+3}{2}; \frac{b+5}{2}; \frac{c-6}{2})$.

Vì $N \in (Oxz) \Rightarrow \dfrac{b+5}{2} = 0 \Rightarrow b = -5$.

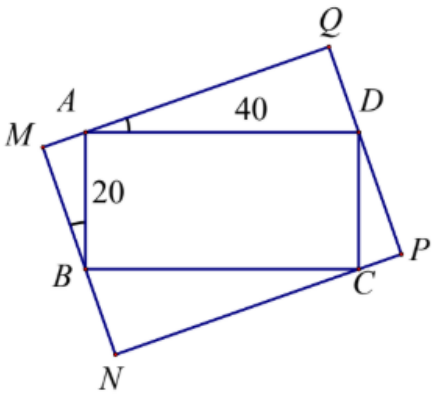
Do đó $T = 2.4 + (-5) - (-2) = 5$.

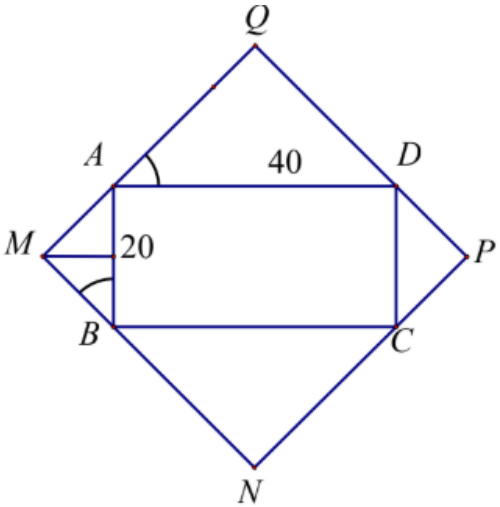
Bài 10. (NK) Bà Bích xin một "chữ Tâm" được sơn son thiếp vàng trong một hình chữ nhật $ABCD$ kích thước $20cm \times 40cm$. Bà treo bức ảnh này trên tường trong phòng khách của Bà. Để tăng điểm nhấn cho bức tranh, Bà trang trí một khung hình cách điệu hình chữ nhật $MNPQ$ sao cho các điểm A, B, C, D lần lượt thuộc các cạnh QM, MN, NP, PQ (xem hình vẽ). Lúc này, Bà cần tính toán phần diện tích chiếm chỗ của hình chữ nhật $MNPQ$ trên tường nhà sao cho cân đối nhất. Hỏi diện tích lớn nhất của hình chữ nhật $MNPQ$ là bao nhiêu centimet vuông?





Hướng dẫn giải.





Xét hai tam giác vuông ADQ, BAM có

$$\left.\begin{aligned} \widehat{QAD} + \widehat{ADQ} &= 180^\circ - \widehat{AQD} = 90^\circ \\ \widehat{QAD} + \widehat{BAM} &= 180^\circ - \widehat{BAD} = 90^\circ \end{aligned}\right\} \Rightarrow \widehat{ADQ} = \widehat{BAM} \Rightarrow \Delta MAB \sim \Delta QDA$$

Dễ dàng chứng minh các tam giác ABM, BCN, CDP, DAQ đồng dạng và $\Delta ADQ = \Delta CBN, \Delta ABM = \Delta DCP$ (vì có cạnh huyền bằng nhau).

Diện tích hình chữ nhật $MNPQ$ lớn nhất khi và chỉ khi tổng diện tích của 4 tam giác vuông ABM, BCN, CDP, DAQ lớn nhất hay $S = S_{\Delta ADQ} + S_{\Delta ABM}$ lớn nhất.

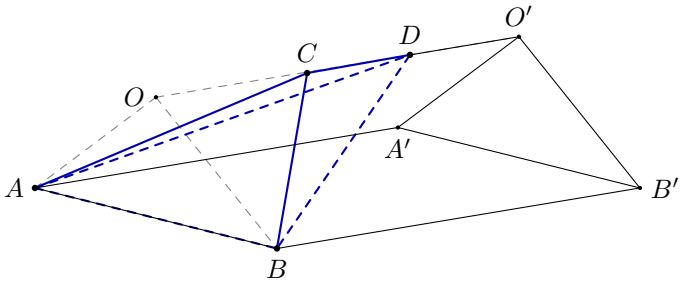
Ta có tỉ số đồng dạng: $\frac{AD}{AB} = \frac{40}{20} = 2 \Rightarrow S_{\Delta ADQ} = 4S_{\Delta ABM}$.

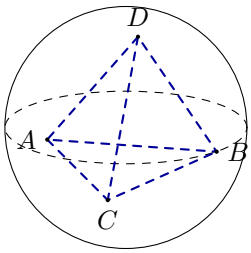
Vậy diện tích hình chữ nhật $MNPQ$ lớn nhất khi và chỉ khi $S_{\Delta ABM}$ lớn nhất.

Ta lại có $S_{\Delta ABM} = \frac{1}{2}AB \cdot d(M, AB)$ nên $S_{\Delta ABM}$ lớn nhất khi $d(M, AB)$ lớn nhất hay ΔABM vuông cân. Khi đó:

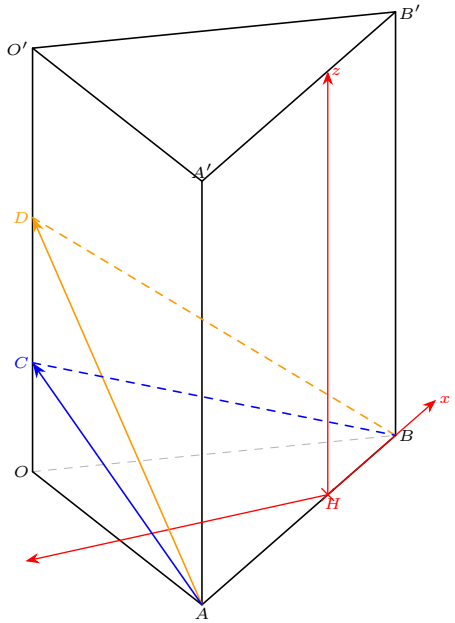
$$\begin{aligned} S_{MNPQ} &= 2(S_{\Delta ABM} + S_{\Delta ADQ}) + S_{ABCD} = 10S_{\Delta ABM} + S_{ABCD} \\ &= 10 \cdot \frac{1}{4}AB^2 + AB \cdot AD = 10 \cdot \frac{1}{4} \cdot 20^2 + 20 \cdot 40 = 1800 \text{ cm}^2. \end{aligned}$$

Bài 11. (NK) Ông An có một thanh đá thạch anh màu xanh ngọc dạng hình lăng trụ đứng $OAB.O'A'B'$, trong đó $OA = OB = 2$ dm, $\widehat{AOB} = 120^\circ$, $OO' = 4$ dm. Ông mang thanh thạch anh này đến tiệm chuyên gia công và sản xuất đồ lưu niệm yêu cầu chủ tiệm phân chia thanh đá thành ba phần bởi hai mặt phẳng (CAB) và (DAB) sao cho tam giác CAB vuông, tam giác DAB đều. Sau đó, làm một quả cầu pha lê ngoại tiếp khối thạch anh $ABCD$ (4 điểm A, B, C, D thuộc mặt cầu, xem hình minh họa).





Chủ tiệm định giá tiền hoàn thành món hàng bằng bình phương thể tích khối thạch anh $ABCD$ (dm^3) cộng với bình phương bán kính mặt cầu (dm) ngoại tiếp khối đó rồi nhân với 60 nghìn đồng ($(V_{ABCD}^2 + R^2) \cdot 60000$). Hỏi ông An phải trả bao nhiêu nghìn đồng cho món đồ lưu niệm của mình?



Ta có độ dài cạnh AB được tính theo định lý hàm số cos trong tam giác OAB:

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{OA^2 + OB^2 - 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos \widehat{AOB}} \\ &= \sqrt{2^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cos 120^\circ} = 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

Gọi H là trung điểm của AB. Do tam giác OAB cân tại O nên $OH \perp AB$. Trong tam giác vuông

OHA (vuông tại H): $OH = OA \cdot \cos 60^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$.

Thiết lập hệ trục tọa độ sao cho H là gốc tọa độ $(0;0;0)$, đường thẳng AB nằm trên trục Ox, đường thẳng OH nằm trên trục Oy và cạnh bên OO' song song với trục Oz. Khi đó tọa độ các điểm như sau: $O(0;1;0)$; $A(-\sqrt{3};0;0)$; $B(\sqrt{3};0;0)$.

Do C, D thuộc cạnh OO' nên gọi $C(0;1;m)$ và $D(0;1;n)$ với $n > m > 0$.

- Tam giác CAB vuông tại C:

$$\overrightarrow{CA} = (-\sqrt{3};-1;-m), \quad \overrightarrow{CB} = (\sqrt{3};-1;-m)$$

Tam giác vuông tại $C \Rightarrow \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \Leftrightarrow -3 + 1 + m^2 = 0 \Rightarrow m = \sqrt{2}$. Suy ra $C(0;1;\sqrt{2})$.

- Tam giác DAB đều: Cạnh tam giác đều $DA = AB = 2\sqrt{3}$.

$$DA^2 = (-\sqrt{3}-0)^2 + (0-1)^2 + (0-n)^2 = 3 + 1 + n^2 = 12 \Rightarrow n^2 = 8 \Rightarrow n = 2\sqrt{2}.$$

Suy ra $D(0;1;2\sqrt{2})$.

Gọi $I(a;b;c)$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$. Ta có hệ phương trình:

$$IA = IB = IC = ID \Rightarrow I\left(0;-3;\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$$

Từ đó tính được:

- Thể tích khối tứ diện $ABCD$: $V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]\cdot\overrightarrow{AD}\right| = \frac{\sqrt{6}}{3}$.
- Bán kính mặt cầu ngoại tiếp: $R = IA = \sqrt{(-\sqrt{3}-0)^2 + (0-(-3))^2 + \left(0-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{66}}{2}$.

Số tiền ông An phải trả là:

$$60 \cdot (V^2 + R^2) = 60 \cdot \left(\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{66}}{2}\right)^2\right) = 60 \cdot \left(\frac{2}{3} + \frac{33}{2}\right) = 1030 \text{ (nghìn đồng)}.$$

Bài 12. (NK) Một giờ hoạt động ngoài trời của lớp 1/1 trường tiểu học X, cô giáo cho 35 học sinh lớp mình nắm tay nhau xếp thành một vòng tròn để chơi trò chơi "Mèo bắt chuột". Sau khi ổn định, cô gọi tên ngẫu nhiên 6 học sinh trong lớp ra giữa vòng (3 em làm "Mèo", 3 em làm "Chuột"). Xác xuất 6 em được gọi tên không có hai em nào đứng cạnh nhau trong vòng tròn bằng a. Tính $11594a$.

Hướng dẫn giải. Ta có $n(\Omega) = C_{35}^6 = 1623160$.

Gọi A là biến cố "6 học sinh được chọn không có hai em nào đứng cạnh nhau trong vòng tròn".

Giả sử xếp 35 học sinh thành một hàng ngang, chọn 6 em sao cho không có hai em nào đứng cạnh nhau cũng như chọn ra 6 trong các "khoảng trống" tạo ra bởi 29 em còn lại.

Mà 29 học sinh sẽ tạo ra 30 "khoảng trống" nên $C_{30}^6 = 593775$ cách chọn.

Mặt khác, nếu có hai em trong 6 em được chọn đứng đầu hàng và cuối hàng thì khi xếp thành vòng tròn hai em này sẽ đứng cạnh nhau.

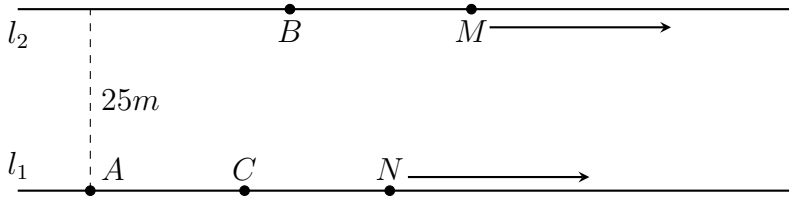
Khi đó, ta chọn ra 4 trong các "khoảng trống" giữa 29 em còn lại có $C_{28}^4 = 20475$ cách chọn.

Suy ra số phần tử thuận lợi cho biến cố A : $n(A) = 593775 - 20475 = 573300$.

Vậy xác xuất cần tìm là $a = P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{573300}{1623160} = \dfrac{4095}{11594} \Rightarrow 11594a = 4095$.

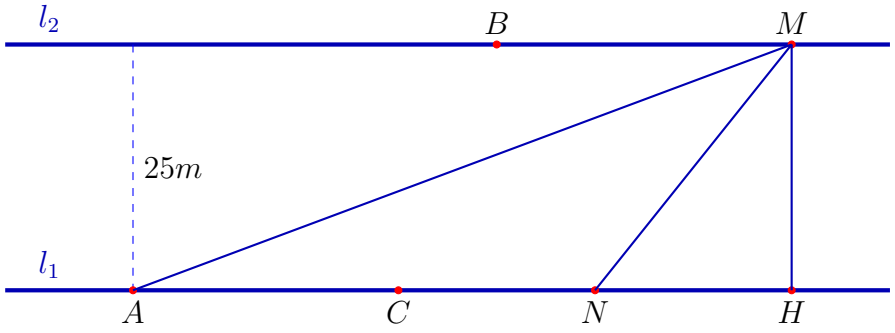
Bài 13. Hai chất điểm M, N chuyển động cùng hướng và xuất phát cùng một thời điểm trên

hai đường thẳng l_1 và l_2 song song với nhau (chất điểm M xuất phát từ điểm B, chất điểm N xuất phát từ điểm C như hình vẽ). Khoảng cách giữa hai đường thẳng l_1 và l_2 là 25 mét. Điểm A cố định trên đường thẳng l_1.



Tại thời điểm t giây ($t \geq 0$, tính từ lúc bắt đầu xuất phát), khoảng cách từ chất các điểm M và N đến A lần lượt là $d_M(t) = 56 + \frac{t}{2}$ (mét) và $d_N(t) = \frac{61t+42}{t+1}$ (mét). Tính khoảng cách (theo đơn vị mét) từ chất điểm M đến A tại thời điểm mà hai chất điểm M và N gần nhau nhất.

Hướng dẫn giải.



Gọi H là hình chiếu của M lên l_1. Ta có MN nhỏ nhất khi $N \equiv H$.

Khi đó ta có $AM^2 = AN^2 + NM^2 \Leftrightarrow \left(\frac{t+112}{2}\right)^2 = \left(\frac{61t+42}{t+1}\right)^2 + 25^2$

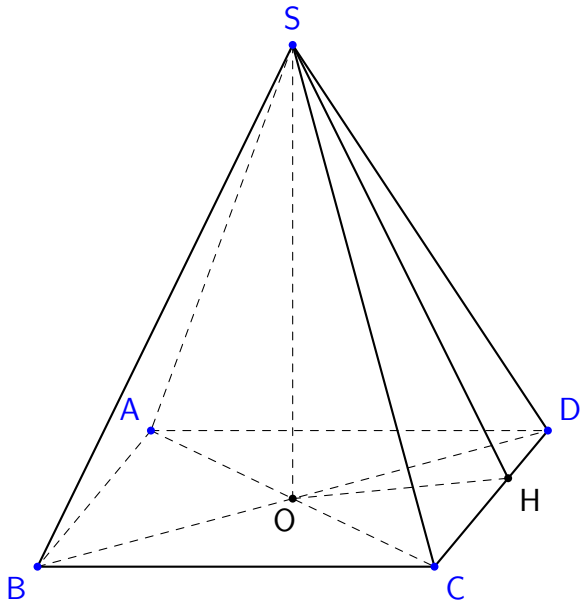
$\Leftrightarrow (t+1)^2(t+112)^2 = 4(61t+42)^2 + 4.25^2 \Leftrightarrow t^4 + 226t^3 - 4391t^2 - 184t + 2988 = 0.$

Vì $t \geq 0 \Rightarrow t = 18$. Khi đó $d_M(18) = 56 + \frac{18}{2} = 65(m)$.

Bài 14. Người ta muốn tạo ra một khối pha lê trang trí có dạng hình chóp đều với đáy là tứ giác và có diện tích toàn phần (tổng diện tích của bốn mặt bên và mặt đáy) là $100(cm^2)$. Thể tích tối đa của khối pha lê được tạo ra là bao nhiêu xen-ti-mét khối? (làm tròn kết quả đến hàng phần chục).



✍ *Hướng dẫn giải.* Ta vẽ lại được hình như sau



Gọi cạnh đáy của khối pha lê là a, độ dài các chiều cao của mặt bên là b $(a>0;b>0)$.

Chiều cao của khối chóp lúc này là $h=\sqrt{b^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\sqrt{b^2-\frac{a^2}{4}}$.

Với $b^2-\frac{a^2}{4}>0\Leftrightarrow b^2>\frac{a^2}{4}\Leftrightarrow b>\frac{a}{2}$.

Diện tích toàn phần của khối lăng trụ là $S=a^2+4\cdot\frac{1}{2}.a.b=100\Leftrightarrow a.(a+2b)=100$

$\Leftrightarrow 2b=\frac{100}{a}-a\Leftrightarrow b=\frac{100-a^2}{2a}$.

Vì $(a>0;b>0)$ nên $100-a^2>0\Leftrightarrow 0<a<10$

Nên $h=\sqrt{b^2-\frac{a^2}{4}}=\sqrt{\frac{(100-a^2)^2}{4a^2}-\frac{a^2}{4}}=\sqrt{\frac{(100-a^2)^2-a^4}{4a^2}}$

$h=\sqrt{\frac{(100-a^2-a^2)(100-a^2+a^2)}{4a^2}}=\sqrt{\frac{25.(100-2a^2)}{a^2}}$.

Ta có $100-2a^2>0\Leftrightarrow a^2<50\Leftrightarrow 0<a<5\sqrt{2}$.

Thể tích của khối pha lê là $V=\frac{1}{3}.a^2.\sqrt{\frac{25.(100-2a^2)}{a^2}}=\frac{1}{3}a^2\cdot\frac{5}{a}\sqrt{100-2a^2}=\frac{5}{3}a\sqrt{100-2a^2}$.

Vậy nên $V'(a)=\frac{5}{3}\cdot\sqrt{100-2a^2}+\frac{5}{3}a\cdot\frac{-4a}{2\sqrt{100-2a^2}}$.

$V'(a)=\frac{5}{3}\left(\sqrt{100-2a^2}+\frac{-2a^2}{\sqrt{100-2a^2}}\right)$.

$V'(a)=0\Leftrightarrow 100-2a^2=2a^2\Leftrightarrow a^2=25\Leftrightarrow a=5$ $(a>0)$.

Bảng biến thiên:

a	0		5		$\sqrt{50}$
$V'(a)$		$+$	0	$-$	
$V(a)$	0	↗	$58{,}9$	↘	0

Vậy thể tích tối đa của khối pha lê được tạo ra là khoảng $58,9(cm^3)$.

Bài 15. Cho đường tròn $(C):x^2+y^2=4$ và họ ellipse $(E_m):\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{4}=1$, với $m>2$. Gọi H

là vật thể giới hạn bởi $y = \pm 2$, có thiết diện tại y là hình tròn có bán kính $R = \dfrac{x_2 - x_1}{2}$ nội tiếp hình vuông lớn nhất của nó, với $x_1, x_2 > 0$ là hoành độ dương của (C) và (E_m). Gọi A, B là thể tích lớn nhất và nhỏ nhất của H trên đoạn $[3; 6]$. Giá trị $T = \dfrac{A + B}{\pi - 2}$ là?

✍ *Hướng dẫn giải.* Ta dễ dàng tính được $x_1 = \sqrt{4 - y^2}$ và $x_2 = \dfrac{m}{2}\sqrt{4 - y^2}$. Bán kính $R(y)$ xác định bởi

$$R(y) = \frac{1}{2}\sqrt{4 - y^2}\left(\frac{m}{2} - 1\right) = \frac{1}{4}(m - 2)\sqrt{4 - y^2}$$

Với đường tròn bán kính r bất kì, hình vuông nội tiếp của nó có đường chéo là đường kính $2r$.

Theo định lí Pythagore ta thu được cạnh tương ứng là $\sqrt{2}r$, suy ra diện tích hình vuông này là $2r^2$.

Diện tích mặt cắt ngang $A(y)$ là:

$$A(y) = (\pi - 2)r^2 = \frac{1}{16}(\pi - 2)(m - 2)^2(4 - y^2)$$

Thể tích $V(m)$ là:

$$V(m) = \int_{-2}^{2} A(y)dy = \frac{2}{3}(\pi - 2)(m - 2)^2$$

Dễ thấy đây là hàm đồng biến nên đạt cực trị tại hai đầu mút.

Vậy giá trị $T = \dfrac{V(3) - V(6)}{\pi - 2} = \dfrac{34}{3}$.

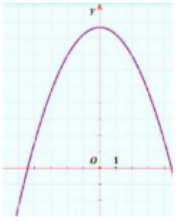
Bài 16. Một tấm kính làm mặt bàn $(H1)$ có hình dáng tam giác đều với 3 đỉnh được làm cong $(H2)$. Biết cạnh tấm tính tam giác ban đầu bằng $12dm$. Để cắt góc bàn được đẹp thì người ta cắt theo đường cong là đường Parabol $(P) : y = -\dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2 + 3\sqrt{3}$ $(H3)$ có hai nhánh tiếp giáp với hai cạnh của tam giác $(H4)$.



H1



H2



H3

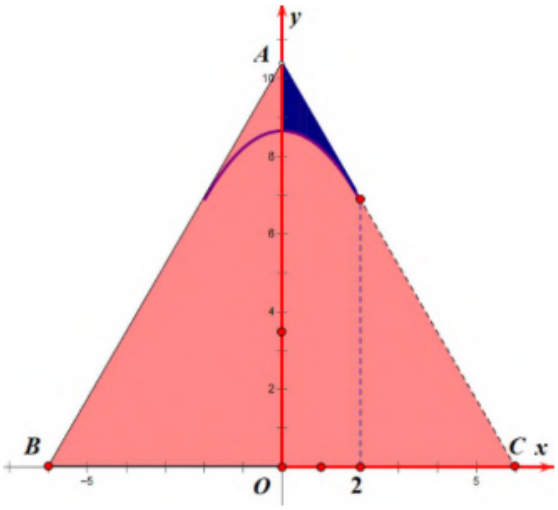


H4

Diện tích mặt kính làm mặt bàn $(H1)$ bằng $S(dm^2)$. Tính S (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

Hướng dẫn giải. Diện tích tam giác ABC bằng $S_{\Delta ABC} = 12^2.\dfrac{\sqrt{3}}{4} = 36\sqrt{3}$.

Dựng hệ trục như hình vẽ



Vì tam giác ABC đều cạnh bằng 12 nên $AO = 6\sqrt{3}$.

Phương trình đường thẳng $AC : \dfrac{x}{6} + \dfrac{y}{6\sqrt{3}} = 1 \Leftrightarrow y = -\sqrt{3}x + 6\sqrt{3}$.

Ta có phương trình hoành độ giao điểm của (P) và đường thẳng AC.

$-\dfrac{3}{4}x^2 + 5\sqrt{3} = -\sqrt{3}x + 6\sqrt{3} \Leftrightarrow -\sqrt{3}x + 6\sqrt{3} \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2 - \sqrt{3}x + \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{4}(x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2.$

Diện tích phần tô đậm giới hạn bởi $(P), (AC)$ và trục Oy trong hình bằng

$$S_1 = \int_0^2 \left[(-\sqrt{3}x + 6\sqrt{3}) - (-\frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + 5\sqrt{3})\right] dx = \int_0^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{4}x^2 - \sqrt{3}x + \sqrt{3}\right) dx = \frac{\sqrt{3}}{4}\int_0^2 (x-2)^2 dx = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Vì mặt bàn đối xứng nên diện tích kính cần tính bằng $S = S_{\Delta ABC} - 6S_1 = 36\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = 32\sqrt{3} \approx 55,4(dm^2)$.

Bài 17. Một chậu nước hình nón cụt với lòng chậu (phần có thể chứa nước) có bán kính đáy $r_1 = 5$ cm, bán kính miệng chậu $r_2 = 8$ cm, chiều cao chậu $h = 15$ cm. Ban đầu nước trong chậu chiếm $\dfrac{2}{3}$ chiều cao của chậu. Sau đó người ta thả vào chậu một quả cầu kim loại thì đo được chiều cao mực nước dâng thêm là $1,5$ cm, quả cầu chìm hoàn toàn trong nước. Tính bán kính quả cầu và làm tròn đến hàng phần trăm của cm.

Hướng dẫn giải. Chiều cao nước ban đầu: $h_0 = \dfrac{2}{3} \cdot 15 = 10$ cm.

Khi thả quả cầu vào chậu, mực nước dâng lên thành: $h_1 = h_0 + 1,5 = 11,5$ cm.

Bán kính mặt nước ở độ cao h trong chậu: $r(h) = 5 + \dfrac{8-5}{15}h = 5 + \dfrac{h}{5} \Rightarrow \begin{cases} r(10) = 7 \\ r(11,5) = 7,3 \end{cases}$.

Thể tích nón cụt đến độ cao h là $V(h) = \dfrac{\pi h}{3}\left[r_1^2 + r_1 \cdot r(h) + r(h)^2\right]$, với $r_1 = 5$.

Ta có: $V(10) = \dfrac{10\pi}{3}(25 + 35 + 49) = \dfrac{1090\pi}{3}$.

$V(11,5) = \dfrac{11,5\pi}{3}(25 + 36,5 + 53,29) = \dfrac{1320,085\pi}{3}$.

Do đó: $V_{\text{sphere}} = V(11,5) - V(10) \approx 240,95$ cm^3 (gán vào biến A).

Thể tích nước tăng thêm chính là thể tích quả cầu: $\dfrac{4}{3}\pi R^3 = A \Rightarrow R \approx 3,86$ cm.

Bài 18. (Thầy Ái - TDM) Để chuẩn bị tiền mừng tuổi cho tất cả 50 (con số giả sử thôi nhé chứ thật thì đông hơn rất nhiều) em học sinh offline quê hương Thuận Thành nhân dịp tết nguyên đán sắp tới, thầy Ái đã chuẩn bị một số tiền là 5 200 000 đồng để đổi ra thành 60 tờ tiền gồm các mệnh giá 20 nghìn, 50 nghìn, 100 nghìn, 200 nghìn. Biết rằng mỗi mệnh giá đều có số tờ lớn hơn 1 và chia hết cho 10. Sau đó thầy Ái bỏ mỗi tờ vào một phong lì xì nhìn bên ngoài giống như nhau. Biết rằng khi mừng tuổi thì thầy Ái sẽ cho các em học sinh chọn ngẫu nhiên mỗi em 1 phong lì xì. Gọi T là xác suất để thầy Ái còn lại số tiền là 1 800 000 đồng. Hãy tính $10^9 \cdot T$ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Hướng dẫn giải. Gọi x, y, z, t lần lượt là số tờ tiền các mệnh giá 20 nghìn, 50 nghìn, 100 nghìn, 200 nghìn.

Theo đề bài, ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x + y + z + t = 60 \\ 20x + 50y + 100z + 200t = 5200 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z + t = 60 \\ 2x + 5y + 10z + 20t = 52 \end{cases}$

Với $x, y, z, t \in \{10, 20, 30, 40, 50\}$.

Thay $t = 60 - x - y - z$ vào phương trình thứ hai:

$2x + 5y + 10z + 20(60 - x - y - z) = 520 \Leftrightarrow 18x + 15y + 10z = 680$. Vì x, y, z là bội của 10, thử các giá trị ta tìm được bộ duy nhất thỏa mãn là: $x = 10, y = 20, z = 20 \Rightarrow t = 10$.

Vậy có 10 tờ 20k, 20 tờ 50k, 20 tờ 100k và 10 tờ 200k.

Tổng số phong lì xì là 60. Thầy Ái phát 50 phong, còn lại 10 phong.

Để số tiền còn lại là 1 800 000 đồng, gọi x', y', z', t' là số tờ tiền còn lại của mỗi loại ($0 \le x' \le 10, 0 \le y' \le 20, 0 \le z' \le 20, 0 \le t' \le 10$). Ta có: $\begin{cases} x' + y' + z' + t' = 10 \\ 20x' + 50y' + 100z' + 200t' = 1800 \end{cases} \Rightarrow$ $18x' + 15y' + 10z' = 200 - 20t'$.

Giải phương trình nghiệm nguyên với điều kiện tổng bằng 10, ta tìm được bộ duy nhất là: $x' = 0, y' = 0, z' = 2, t' = 8$.

Số cách chọn ra 10 phong lì xì còn lại từ 60 phong là $n(\Omega) = C_{60}^{10}$. Số cách chọn 10 phong thỏa mãn yêu cầu là: $n(A) = C_{10}^{0} \cdot C_{20}^{0} \cdot C_{20}^{2} \cdot C_{10}^{8} = 190 \cdot 45 = 8550$.

Xác suất $T = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{8550}{C_{60}^{10}} \approx 1,134042 \cdot 10^{-7}$.

Vậy $10^9 \cdot T \approx 113,4 \Rightarrow$ làm tròn đến hàng đơn vị là 113.

Bài 19. Một đội CSGT đường thủy sử dụng một chiếc ca nô chuyên dụng để tuần tra trên một đoạn sông dài 60 km. Chuyến tuần tra bao gồm đi ngược dòng từ vị trí xuất phát A đến B dài 60 km, sau đó ngay lập tức quay về xuôi dòng từ B về lại A. Lượng xăng tiêu thụ của động cơ (tính bằng lít) được xác định theo công thức: $L = k \cdot v^2 \cdot t$ trong đó k là một hằng số phụ thuộc

vào đặc tính của động cơ, v là tốc độ của động cơ (tốc độ của ca nô so với mặt nước) có đơn vị là km/h và t là thời gian động cơ hoạt động tính bằng giờ. Biết rằng vận tốc của dòng nước trên cả đoạn sông là 5 km/h. Để xác định hằng số k thì các kỹ thuật viên đã chạy thử ca nô trong điều kiện mặt nước yên tĩnh. Kết quả cho thấy động cơ tiêu thụ 10 lít xăng mỗi giờ nếu chạy với tốc độ ổn định là 20 km/h. Hỏi để hoàn thành cả chuyến tuần tra với lượng xăng tiêu thụ ít nhất thì người lái ca nô phải cài đặt tốc độ v của ca nô bằng bao nhiêu km/h? (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

Hướng dẫn giải. Xác định hằng số k: Trong điều kiện nước yên tĩnh, với $v = 20$ km/h và $t = 1$ giờ, ca nô tiêu thụ $L = 10$ lít. Ta có: $10 = k \cdot 20^2 \cdot 1 \Rightarrow k = \dfrac{10}{400} = \dfrac{1}{40}$.

Gọi v là tốc độ của ca nô so với mặt nước ($v > 5$ km/h). - Khi đi ngược dòng (A đến B): Vận tốc thực tế là $v - 5$. Thời gian đi là $t_1 = \dfrac{60}{v-5}$. Lượng xăng tiêu thụ: $L_1 = k \cdot v^2 \cdot t_1 = \dfrac{1}{40} \cdot v^2 \cdot \dfrac{60}{v-5} = \dfrac{1,5v^2}{v-5}$. - Khi đi xuôi dòng ($B$ về A): Vận tốc thực tế là $v + 5$. Thời gian đi là $t_2 = \dfrac{60}{v+5}$. Lượng xăng tiêu thụ: $L_2 = k \cdot v^2 \cdot t_2 = \dfrac{1}{40} \cdot v^2 \cdot \dfrac{60}{v+5} = \dfrac{1,5v^2}{v+5}$.

Tổng lượng xăng tiêu thụ cho cả chuyến đi là:

$$f(v) = L_1 + L_2 = 1,5v^2 \left(\frac{1}{v-5} + \frac{1}{v+5}\right) = 1,5v^2 \left(\frac{2v}{v^2-25}\right) = \frac{3v^3}{v^2-25} \text{ (với } v > 5)$$

Xét hàm số $f(v) = \dfrac{3v^3}{v^2-25}$ trên khoảng $(5; +\infty)$:

$$f'(v) = \frac{9v^2(v^2-25) - 3v^3(2v)}{(v^2-25)^2} = \frac{9v^4 - 225v^2 - 6v^4}{(v^2-25)^2} = \frac{3v^4 - 225v^2}{(v^2-25)^2} = \frac{3v^2(v^2-75)}{(v^2-25)^2}$$

Cho $f'(v) = 0 \Leftrightarrow v^2 - 75 = 0 \Rightarrow v = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$ (do $v > 5$).

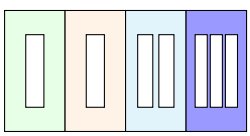
Bảng biến thiên:

v	5		$5\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(v)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(v)$	‖ $+\infty$	↘	$f(5\sqrt{3})$	↗	$+\infty$

Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $v = 5\sqrt{3} \approx 8,66$.

Vậy để lượng xăng tiêu thụ ít nhất, người lái ca nô phải cài đặt tốc độ $v \approx 8,66$ km/h.

Bài 20. Xếp ngẫu nhiên 7 cuốn sách khác nhau, trong đó có một cuốn là sách Toán vào một giá sách có 4 ngăn. Biết rằng sau khi xếp, mỗi ngăn đều có ít nhất một cuốn sách. Gọi A là biến cố "trong 4 ngăn sách, có đúng một ngăn chứa số lượng sách nhiều hơn hẳn các ngăn còn lại" và B là biến cố "cuốn sách Toán học nằm ở ngăn có nhiều sách nhất đó". Tính $P(B|A)$ (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



✍ *Hướng dẫn giải.* Xét các bộ số (n_1, n_2, n_3, n_4) là số lượng sách trong mỗi ngăn sao cho $\sum n_i = 7$ và $n_i \geq 1$. Các bộ số có thể xảy ra là:

- Trường hợp 1: Có dạng $\{4;1;1;1\}$. Số cách phân bố sách vào 4 ngăn là: $C_4^1 \cdot \frac{7!}{4!\cdot1!\cdot1!\cdot1!} = 840$ cách. Trong trường hợp này, ngăn nhiều sách nhất có 4 cuốn. Số cách để sách Toán nằm ở ngăn này là: $C_4^1 \cdot \frac{6!}{3!\cdot1!\cdot1!\cdot1!} = 480$ cách.
- Trường hợp 2: Có dạng $\{3;2;1;1\}$. Số cách phân bố sách vào 4 ngăn là: $\frac{4!}{2!} \cdot \frac{7!}{3!\cdot2!\cdot1!\cdot1!} = 12 \cdot 420 = 5040$ cách. Trong trường hợp này, ngăn nhiều sách nhất có 3 cuốn. Số cách để sách Toán nằm ở ngăn này là: $4 \cdot 3 \cdot \frac{6!}{2!\cdot2!\cdot1!\cdot1!} = 12 \cdot 180 = 2160$ cách.
- Trường hợp 3: Có dạng $\{2;2;2;1\}$. Ở trường hợp này không có duy nhất một ngăn có số sách nhiều hơn hẳn các ngăn còn lại (vi phạm điều kiện biến cố A).

Biến cố A xảy ra ở Trường hợp 1 và Trường hợp 2.

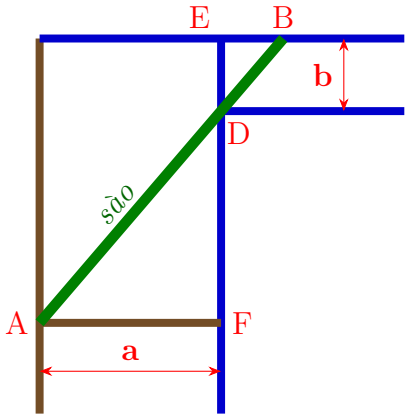
Số phần tử của biến cố A là: $n(A) = 840 + 5040 = 5880$.

Số phần tử của biến cố $A \cap B$ (sách Toán nằm ở ngăn nhiều nhất trong các trường hợp của A) là: $n(A \cap B) = 480 + 2160 = 2640$.

Xác suất có điều kiện cần tìm là:

$P(B|A) = \frac{n(A\cap B)}{n(A)} = \frac{2640}{5880} = \frac{22}{49} \approx 0,4489...$ Làm tròn đến hàng phần trăm, ta được kết quả: $P(B|A) \approx 0,45$.

Bài 21. Để chặn đường hành lang hình chữ L, người ta dùng một que sào thẳng dài đặt kín những điểm chạm với hành lang (như hình vẽ). Biết $a = 24$ và $b = 3$. Biết chiều dài tối thiểu của que sào thỏa mãn điều kiện trên là l. Tính giá trị của l^2.



✍ *Hướng dẫn giải.* Đặt các điểm như hình vẽ.

Đặt $DF = x, x > 0$, ta có $\triangle ADF$ đồng dạng với $\triangle BDE$ nên: $\frac{EB}{ED} = \frac{AF}{DF} \Rightarrow EB = \frac{ab}{x}$.

Gọi l là chiều dài của que sào, ta có: $l^2 = AB^2 = (x+b)^2 + \left(a + \frac{ab}{x}\right)^2 = f(x)$.

Đạo hàm hàm số $f(x)$:

$f'(x) = 2(x+b) - 2\frac{ab}{x^2}\left(a + \frac{ab}{x}\right) = 2(x+b)\left(1 - \frac{a^2b}{x^3}\right)$;

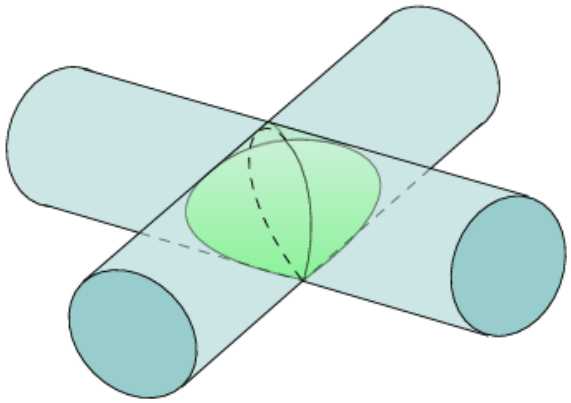
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{a^2b} = \sqrt[3]{24^2 \cdot 3} = 12$.

Xét bảng biến thiên:

x	0		12		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1125	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy giá trị nhỏ nhất của que sào là $l = \sqrt{1125}$. Giá trị $l^2 = 1125$.

Bài 22. Cho hai khối trụ có bán kính đáy bằng 3 và có trục là hai đường thẳng cắt nhau và vuông góc với nhau (xem hình vẽ). Gọi (H) là phần giao nhau của hai khối trụ đó. Tính thể tích của (H).



Hướng dẫn giải.

Mặt phẳng vuông góc với tia Ox tại điểm có hoành độ x, cắt hình (H) theo thiết diện là một hình vuông có cạnh AB.

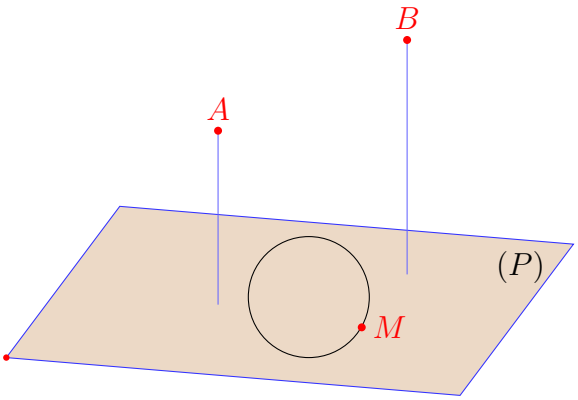
Ta có $\left(\dfrac{1}{2}AB\right)^2 = R^2 - x^2 = 9 - x^2 \Rightarrow AB^2 = 36 - 4x^2$.

Vậy nên diện tích thiết diện là $S(x) = AB^2 = 36 - 4x^2$.

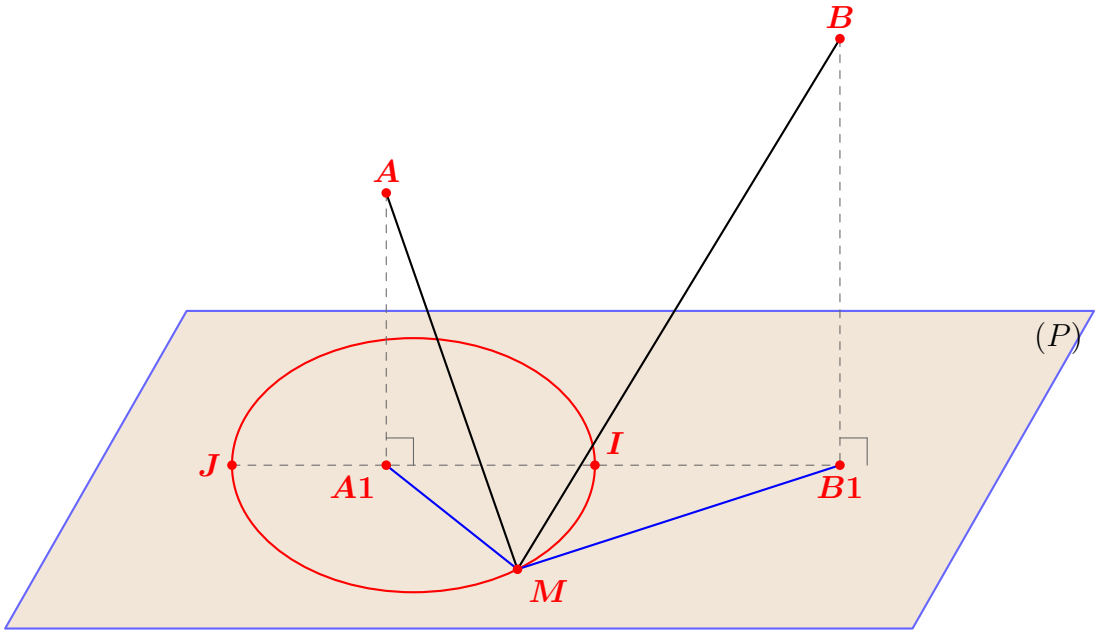
Thể tích của (H) là $V = 2\displaystyle\int_0^3 S(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^3 (36 - 4x^2)\,\mathrm{d}x = 144$ (đvtt).

Bài 23. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$ (đơn vị độ dài trên mỗi trục tính là mét), một vườn hoa nằm trên mặt phẳng $(P) : 2x + 2y - z - 12 = 0$. Có hai bóng đèn chiếu sáng cố định được đặt tại các điểm $A(40; -40; 12)$, $B(-40; 50; 38)$. Để đảm bảo kỹ thuật chiếu sáng, các kỹ sư muốn thiết kế trên mặt vườn một đường ray để lắp đặt một đèn chiếu sáng M di động trên đường ray ấy. Yêu cầu kỹ thuật đặt ra là góc tạo bởi MA với mặt vườn và góc tạo bởi MB với mặt vườn

phải luôn bằng nhau. Độ dài đường ray là bao nhiêu mét (*kết quả làm tròn đến hàng đơn vị*)?



✍ *Hướng dẫn giải.*



Gọi A_1, B_1 lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B lên mặt phẳng (P).
Khi đó yêu cầu bài toán đặt ra $\widehat{AMA_1} = \widehat{BMB_1}$.
Ta có $\widehat{AMA_1} = \widehat{BMB_1} \Rightarrow \tan\widehat{AMA_1} = \tan\widehat{BMB_1} \Rightarrow \dfrac{AA_1}{MA_1} = \dfrac{BB_1}{MB_1}$

$$\Rightarrow \frac{MA_1}{MB_1} = \frac{AA_1}{BB_1} = \frac{\mathrm{d}(A,(P))}{\mathrm{d}(B,(P))} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}.$$

Xét điểm I, J thỏa $\begin{cases} \overrightarrow{IA_1} = -\dfrac{4}{5}\overrightarrow{IB_1} \\ \overrightarrow{JA_1} = \dfrac{4}{5}\overrightarrow{JB_1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I, J \in (P) \\ \widehat{IMJ} = 90^\circ. \end{cases}$

Suy ra M thuộc đường tròn đường kính IJ.

Mặt khác ta có $\begin{cases} AA_1 = 8 \\ BB_1 = 10 \\ AB = \sqrt{15176} \end{cases} \Rightarrow A_1B_1 = \sqrt{15172} \Rightarrow IJ = \dfrac{40\sqrt{15172}}{9}.$

Vậy điểm M chuyển động trên đường tròn đường kính bằng $\dfrac{40\sqrt{15172}}{9}$.

Vậy độ dài của đường ray là $L = \pi \cdot IJ = \pi \cdot \dfrac{40\sqrt{15172}}{9} \approx 1720$ (m).

Bài 24. Trong dịp tết Nam và Minh chơi trò ba cây bằng bộ bài lơ khơ gồm 36 lá (mỗi người nhận được 3 lá bài trong đó không có các quân 10, J, Q, K sau đó cộng điểm trên 3 quân bài lại người nào lớn điểm hơn sẽ thắng, trong trường hợp 2 người bằng điểm thì sẽ xét chất trên các lá bài theo thứ tự từ lớn đến bé Rô, cơ, bích, tép). Người nào thắng sẽ được 3 chiếc kẹo của người còn lại. Hiện tại trong ván bài đầu tiên Nam được 10 điểm với các quân sau 2 tép, 7 rô, Át cơ. Khi đó xác suất Minh có thể thắng trong ván bài trên, chú ý Át rô là quân bài có hiệu lực mạnh nhất bộ bài (các quân Át còn lại đều tính như là số một) có dạng $\frac{a}{b}$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $a+b$.

Hướng dẫn giải. Do có 36 lá bài, Nam cầm 3 lá vì vậy còn 33 lá bài. Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = C_{33}^3 = 5456$.

Để thắng được Nam, Minh cần phải đạt 10 điểm và trong đó có một quân bài chất rô lớn hơn 7. Do Át rô mạnh nhất nên ta xét thành 2 trường hợp:

Trường hợp 1. Minh có Át rô. Như vậy để thắng được Nam, Minh cần sở hữu 2 lá bài còn lại sao cho tổng điểm là 10 (tổng 3 lá chia 10 dư 0).

$A = \{2$ bích hoặc 2 cơ hoặc 2 rô và 7 bích hoặc 7 cơ hoặc 7 tép$\} \Rightarrow n_{A1} = 3 \cdot 3 = 9$.

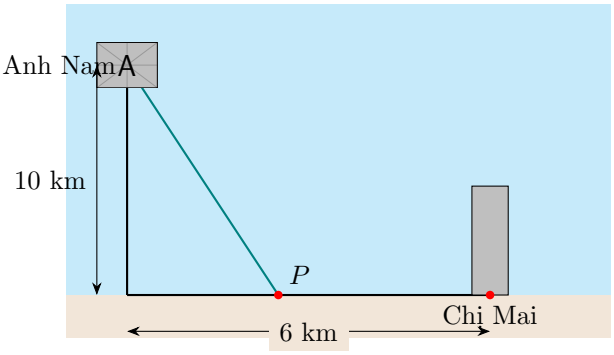
Trường hợp 2. Minh không có Át rô. Như vậy Minh bắt buộc phải có 8 rô hoặc 9 rô trong 3 lá bài của mình để thắng chất 7 rô của Nam.

Trường hợp 2.1: Minh có 8 rô. Như vậy để thắng được Nam, Minh cần sở hữu 2 lá bài còn lại sao cho tổng điểm đạt 10. $A = \{8$ bích hoặc 8 cơ hoặc 8 tép và 4 bích hoặc 4 cơ hoặc 4 tép hoặc 4 rô$\} \Rightarrow n_{A2} = 3 \cdot 4 = 12$.

Trường hợp 2.2: Minh có 9 rô. Như vậy để thắng được Nam, Minh cần sở hữu 2 lá bài còn lại sao cho tổng điểm đạt 10. $A = \{9$ bích hoặc 9 cơ hoặc 9 tép và 2 bích hoặc 2 cơ hoặc 2 rô$\} \Rightarrow n_{A3} = 3 \cdot 3 = 9$.

Tổng số kết quả thuận lợi cho biến cố Minh thắng là: $n(A) = 9 + 12 + 9 = 30$. Xác suất để Minh thắng Nam là: $P_A = \frac{30}{5456} = \frac{15}{2728}$. Suy ra $a = 15, b = 2728$. Vậy $a + b = 15 + 2728 = 2743$.

Bài 25. Anh Nam làm việc tại một giàn khoan cách bờ biển 10 km. Chị Mai, bạn thân của anh Nam, làm việc tại một cơ quan trên bờ biển cách nơi làm việc của anh Nam 6 km theo phương ngang. Thứ Bảy tuần sau anh Nam được nghỉ phép nên hai người dự định gặp nhau tại một địa điểm P trên bờ biển. Biết rằng anh Nam sẽ di chuyển vào bờ biển bằng thuyền với vận tốc 15 km/h, chị Mai đi bộ với vận tốc 5 km/h và hai người dự định cùng xuất phát rồi đến nơi cùng lúc. Giả thiết đường bờ biển là đường thẳng và thuyền chở anh Nam cũng di chuyển theo đường thẳng. Hỏi địa điểm họ dự định gặp nhau cách cơ quan của chị Mai bao nhiêu kilômét? (Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



✍ *Hướng dẫn giải.* Gọi O là hình chiếu vuông góc từ vị trí giàn khoan của anh Nam xuống đường bờ biển. Theo đề bài, ta có $NO = 10$ km và $OM = 6$ km.
Gọi x là khoảng cách từ điểm gặp nhau P đến cơ quan của chị Mai ($0 \le x \le 6$, đơn vị: km). Khi đó:

- Khoảng cách chị Mai di chuyển là $MP = x$ (km).
- Khoảng cách anh Nam di chuyển trên bờ biển từ O đến P là $OP = 6 - x$ (km).
- Quãng đường anh Nam đi bằng thuyền là $NP = \sqrt{NO^2 + OP^2} = \sqrt{10^2 + (6-x)^2}$ (km).

Thời gian chị Mai đi đến P là: $t_M = \dfrac{x}{5}$ (giờ).
Thời gian anh Nam đi đến P là: $t_N = \dfrac{\sqrt{100 + (6-x)^2}}{15}$ (giờ).
Vì hai người cùng xuất phát và đến nơi cùng lúc nên ta có phương trình:

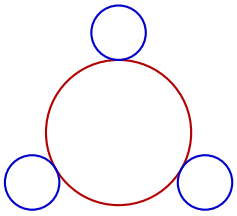
$$\begin{aligned}
&\frac{\sqrt{100 + (6-x)^2}}{15} = \frac{x}{5}\\
\Leftrightarrow &\sqrt{100 + (6-x)^2} = 3x\\
\Leftrightarrow &100 + 36 - 12x + x^2 = 9x^2 \quad (\text{với } x \ge 0)\\
\Leftrightarrow &8x^2 + 12x - 136 = 0\\
\Leftrightarrow &2x^2 + 3x - 34 = 0
\end{aligned}$$

Giải phương trình bậc hai trên, ta chọn nghiệm dương:

$$x = \frac{-3 + \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-34)}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 + \sqrt{281}}{4} \approx 3,44 \text{ (km)}.$$

Vậy địa điểm họ dự định gặp nhau cách cơ quan của chị Mai khoảng $3,44$ km.

Bài 26. Cho tập $X = \{1, 2, 3, \ldots, 12\}$. Chọn ngẫu nhiên 4 số phân biệt từ tập X rồi đặt 1 số vào vòng tròn lớn ở chính giữa, đặt 3 số còn lại vào ba vòng tròn nhỏ xung quanh (ba vòng tròn nhỏ không phân biệt vị trí). Gọi P là xác suất để tổng các số tự nhiên trên hai vòng tròn nhỏ bất kì luôn nhỏ hơn số ở vòng tròn lớn chính giữa đồng thời tổng cả ba số trên ba vòng tròn nhỏ luôn lớn hơn số ở vòng tròn lớn. Tính giá trị của $1980P$.



✍ *Hướng dẫn giải.*

- Bước 1: Chọn 4 số phân biệt từ tập X. Số cách chọn là $C_{12}^4 = 495$.
- Bước 2: Với mỗi bộ 4 số, có 4 cách chọn 1 số để đặt vào vòng tròn lớn.
- Bước 3: 3 số còn lại đặt vào 3 vòng tròn nhỏ. Vì 3 vòng tròn này không phân biệt vị trí nên chỉ có 1 cách đặt duy nhất.

Vậy $n(\Omega) = C_{12}^4 \times 4 = 495 \times 4 = 1980$.

Gọi x là số ở vòng tròn lớn và a, b, c là 3 số ở vòng tròn nhỏ ($a, b, c \in X \setminus \{x\}$).

Giả sử $1 \le a < b < c \le 12$. Điều kiện bài toán tương đương với:

$$\begin{cases} a+b<x \\ a+c<x \\ b+c<x \\ a+b+c>x \end{cases} \iff b+c<x<a+b+c$$

Do $x \in \mathbb{Z}$, điều kiện này có nghĩa là x phải nằm giữa tổng của hai số lớn nhất và tổng của cả ba số.

Các bộ số thỏa mãn ($b+c<x<a+b+c$ với $x \le 12$):

- **Nếu** $a=1$**:** $b+c<x<b+c+1$. Không có số nguyên x nào thỏa mãn.
- **Nếu** $a=2$**:** $b+c<x<b+c+2 \Rightarrow x=b+c+1$.
  Điều kiện $x \le 12 \Rightarrow b+c \le 11$. Với $2<b<c$:
  - $b=3 \implies c \in \{4,5,6,7,8\}$ (5 bộ).
  - $b=4 \implies c \in \{5,6,7\}$ (3 bộ).
  - $b=5 \implies c \in \{6\}$ (1 bộ).

  Tổng cộng trường hợp $a=2$ có 9 bộ.
- Nếu $a=3$: $b+c<x<b+c+3 \Rightarrow x \in \{b+c+1, b+c+2\}$.
  Điều kiện $x \le 12$ và $3<b<c$:
  - $b=4, c=5 \implies 9<x<12 \Rightarrow x \in \{10,11\}$ (2 bộ).
  - $b=4, c=6 \implies 10<x<13 \Rightarrow x \in \{11,12\}$ (2 bộ).
  - $b=4, c=7 \implies 11<x<14 \Rightarrow x=12$ (1 bộ).
  - $b=5, c=6 \implies 11<x<14 \Rightarrow x=12$ (1 bộ).

  Tổng cộng trường hợp $a=3$ có 6 bộ.
- **Nếu** $a=4$**:** $b+c<x<b+c+4$. Điều kiện $x \le 12$ và $4<b<c$:
  - $b=5, c=6 \implies 11<x<15 \Rightarrow x=12$ (1 bộ).

  Tổng cộng trường hợp $a=4$ có 1 bộ.
- Nếu $a \ge 5$: $b \ge 6, c \ge 7 \implies b+c \ge 13 \implies x>13$ (loại vì $x \le 12$).

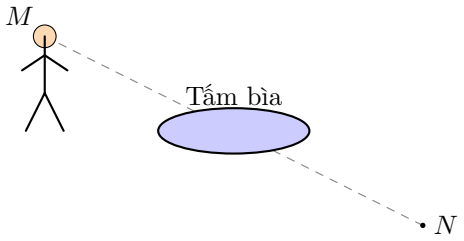
Số kết quả thuận lợi $n(A)=9+6+1=16$.

Xác suất $P=\dfrac{16}{1980}$.

Vậy giá trị của $1980P = 1980 \times \dfrac{16}{1980} = 16$.

Bài 27. Trong không gian $Oxyz$, mắt một người quan sát đặt tại điểm $M(1;2;3)$ và vật cần quan sát đặt tại điểm $N(3;6;-12)$. Một tấm bìa cứng có dạng hình tròn có tâm tại $K\left(\dfrac{14}{5};0;0\right)$ và bán kính $R=2$ thuộc mặt phẳng (Oxy) bắt đầu xuất phát thẳng theo hướng vectơ $\vec{j}=(0;1;0)$ với tốc độ không đổi $v=5$ (cm/s). Tính khoảng thời gian mà trong quá trình di chuyển tấm bìa đã che khuất tầm nhìn của người quan sát. Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm (lấy đơn vị trên

mỗi trục tọa độ là 1 cm).



Hướng dẫn giải. Để tấm bìa che khuất tầm nhìn từ M đến N, đoạn thẳng MN phải cắt tấm bìa. Trước tiên, ta tìm giao điểm I của đường thẳng MN với mặt phẳng (Oxy).

Vectơ chỉ phương của đường thẳng MN là $\overrightarrow{MN} = (2; 4; -15)$.
Phương trình tham số của đường thẳng MN là:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 4t \\ z = 3 - 15t \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

Điểm I thuộc mặt phẳng (Oxy) nên có cao độ $z = 0$:

$$3 - 15t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{5}.$$

Thay $t = \dfrac{1}{5}$ vào phương trình đường thẳng MN, ta được tọa độ điểm $I(1,4; 2,8; 0)$.

Tại thời điểm T (giây), tâm của tấm bìa di chuyển từ $K(2,8; 0; 0)$ theo hướng $\vec{j} = (0; 1; 0)$ với vận tốc $v = 5$ cm/s sẽ có tọa độ là:

$$K_T(2,8; 5T; 0).$$

Tấm bìa che khuất tầm nhìn khi và chỉ khi khoảng cách $IK_T \le R = 2$:

$$\begin{aligned} & IK_T^2 \le 2^2 \\ \Leftrightarrow & (2,8-1,4)^2 + (5T - 2,8)^2 \le 4 \\ \Leftrightarrow & 1,96 + (5T - 2,8)^2 \le 4 \\ \Leftrightarrow & (5T - 2,8)^2 \le 2,04 \\ \Leftrightarrow & -\sqrt{2,04} \le 5T - 2,8 \le \sqrt{2,04} \\ \Leftrightarrow & \frac{2,8 - \sqrt{2,04}}{5} \le T \le \frac{2,8 + \sqrt{2,04}}{5}. \end{aligned}$$

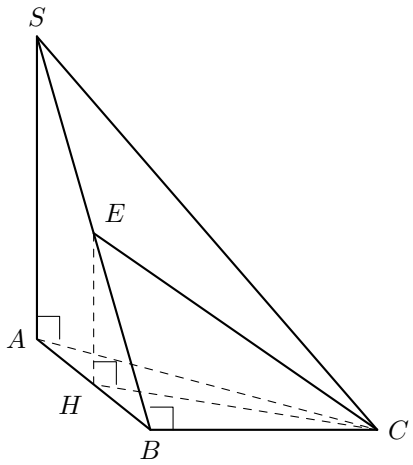
Khoảng thời gian ΔT tấm bìa che khuất tầm nhìn là:

$$\Delta T = \frac{2,8 + \sqrt{2,04}}{5} - \frac{2,8 - \sqrt{2,04}}{5} = \frac{2\sqrt{2,04}}{5} \approx 0,5713.$$

Vậy khoảng thời gian cần tìm là khoảng $0,57$ giây.

Bài 28. Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $BC = 3$, $SA \perp (ABC)$ và $SB = 6$. Gọi E là trung điểm của cạnh SB. Biết góc giữa hai đường thẳng SA và CE bằng $60°$.

Tính thể tích của khối chóp đã cho.



Hướng dẫn giải. Gọi H là trung điểm của AB. Trong tam giác SAB, vì E là trung điểm SB nên EH là đường trung bình.

Suy ra $EH // SA$ và $EH = \dfrac{1}{2}SA$.

Vì $SA \perp (ABC)$ nên $EH \perp (ABC) \Rightarrow EH \perp HC$.

Góc giữa hai đường thẳng SA và CE bằng góc giữa EH và CE.

Trong tam giác EHC vuông tại H, ta có $\angle CEH = 60^\circ$.

Đặt $SA = h$ và $AB = c$ $(h, c > 0)$.

- Xét tam giác SAB vuông tại A: $SA^2 + AB^2 = SB^2 \Leftrightarrow h^2 + c^2 = 6^2 = 36$ (1)
- Xét tam giác EHC vuông tại H: $CH = EH \cdot \tan 60^\circ = \dfrac{h\sqrt{3}}{2}$.
- Xét tam giác ABC vuông tại B: $HB = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{c}{2}$.

  Tam giác HBC vuông tại B (do $AB \perp BC$), ta có:

$$CH^2 = HB^2 + BC^2 \Leftrightarrow \left(\frac{h\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + 3^2 \Leftrightarrow \frac{3h^2}{4} = \frac{c^2}{4} + 9 \Leftrightarrow 3h^2 - c^2 = 36 (2)$$

Từ (1) và (2), cộng vế theo vế ta được:

$$4h^2 = 72 \Rightarrow h^2 = 18 \Rightarrow h = 3\sqrt{2}.$$

Thay vào (1) suy ra: $c^2 = 36 - 18 = 18 \Rightarrow c = 3\sqrt{2}$.

Diện tích đáy ABC là: $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB \cdot BC = \dfrac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot 3 = \dfrac{9\sqrt{2}}{2}$.

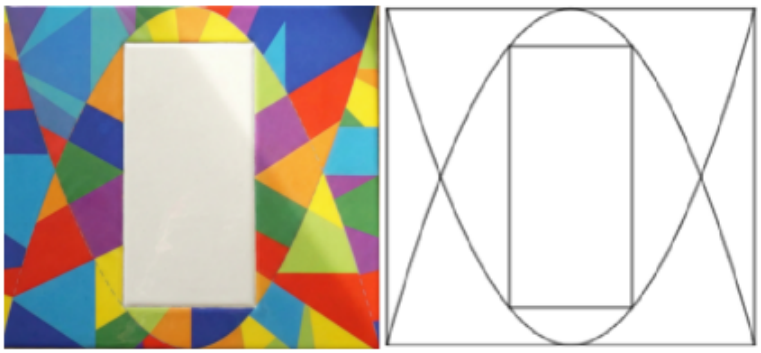
Thể tích khối chóp $S.ABC$ là:

$$V = \frac{1}{3}S_{ABC} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot \frac{9\sqrt{2}}{2} \cdot 3\sqrt{2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{9 \cdot 2 \cdot 3}{2} = 9.$$

Vậy thể tích khối chóp đã cho bằng 9.

Bài 29. Một cơ sở sản xuất dự định làm các viên gạch men hình vuông cạnh 60 cm. Bề mặt viên gạch được trang trí bởi một họa tiết hình chữ nhật màu trắng có tâm trùng với tâm viên gạch. Các đỉnh của hình chữ nhật này nằm trên hai đường parabol đối xứng nhau qua tâm viên gạch. Biết rằng mỗi đường parabol có đỉnh tại trung điểm một cạnh của viên gạch và đi qua hai đầu mút của cạnh đối diện (như hình vẽ mô phỏng). Cho biết chi phí nguyên liệu phần men trắng là 80 nghìn đồng/m^2, còn phần men màu bao quanh là 200 nghìn đồng/m^2. Hỏi chi phí nguyên

liệu thấp nhất để sản xuất một viên gạch là bao nhiêu nghìn đồng? (Kết quả làm tròn đến hàng phần mười).



Hướng dẫn giải. Chọn hệ trục tọa độ Oxy với gốc O là tâm viên gạch như hình vẽ. Đổi 60 cm $= 0,6$ m.

Viên gạch là hình vuông giới hạn bởi các đường $x = \pm 0,3$ và $y = \pm 0,3$.

- Parabol (P_1) có đỉnh $V(0;0,3)$ và đi qua điểm $(0,3;-0,3)$.
  Phương trình $(P_1): y = ax^2 + 0,3$. Thay điểm $(0,3;-0,3)$ vào ta được:
  $-0,3 = a(0,3)^2 + 0,3 \Rightarrow 0,09a = -0,6 \Rightarrow a = -\dfrac{20}{3}$. Vậy $(P_1): y = -\dfrac{20}{3}x^2 + 0,3$.
- Parabol (P_2) đối xứng với (P_1) qua O nên có phương trình $(P_2): y = \dfrac{20}{3}x^2 - 0,3$.

Gọi các đỉnh của hình chữ nhật trắng nằm trên (P_1) là $(x;y)$ và $(-x;y)$ với $0 < x < 0,3$.

Khi đó chiều rộng hình chữ nhật là $2x$, chiều cao là $2y = 2\left(-\dfrac{20}{3}x^2 + 0,3\right)$.

Diện tích phần màu trắng là: $S_t(x) = 2x \cdot 2\left(-\dfrac{20}{3}x^2 + 0,3\right) = -\dfrac{80}{3}x^3 + 1,2x$.

Tổng chi phí sản xuất một viên gạch là:

$$T = 80 \cdot S_t + 200 \cdot (0,6^2 - S_t) = 200 \cdot 0,36 - 120 \cdot S_t = 72 - 120 \cdot S_t.$$

Để chi phí T thấp nhất thì S_t phải lớn nhất.

Xét hàm số $f(x) = -\dfrac{80}{3}x^3 + 1,2x$ trên khoảng $(0;0,3)$:

$$f'(x) = -80x^2 + 1,2; \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0,015 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{6}}{20} \approx 0,122.$$

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$:

x	0		$\frac{\sqrt{6}}{20}$		0		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$			
$f(x)$	0	↗	$\frac{\sqrt{6}}{25}$	↘	0		

Dựa vào bảng biến thiên, diện tích lớn nhất là $S_{t\max} = f\left(\dfrac{\sqrt{6}}{20}\right) = \dfrac{\sqrt{6}}{25} \approx 0,098$ m^2.

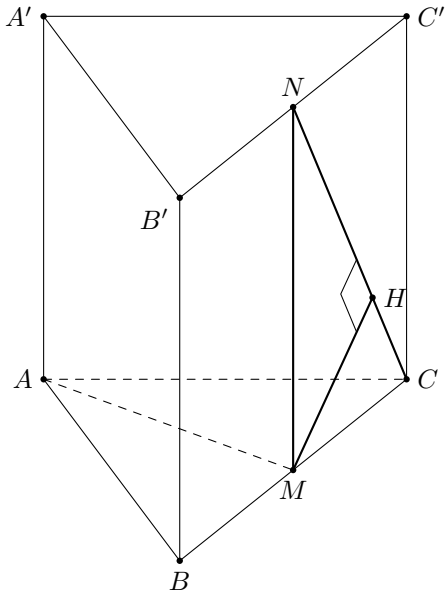
Chi phí thấp nhất tương ứng là:

$$T_{\min} = 72 - 120 \cdot \frac{\sqrt{6}}{25} = 72 - 4,8\sqrt{6} \approx 60,242.$$

Làm tròn đến hàng phần mười, ta được $60,2$ nghìn đồng.

Bài 30. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng $2\sqrt{3}$, cạnh bên $AA'=3$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của $BC,B'C'$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và CN.

Hướng dẫn giải.



Trong mặt phẳng $(BCC'B')$, từ M kẻ $MH\perp CN$.

Ta có ABC là tam giác đều nên $AM\perp BC$.

Vì lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đứng nên $BB'\perp(ABC)\Rightarrow BB'\perp AM$.

Suy ra $AM\perp(BCC'B')\Rightarrow AM\perp MH$.

Do đó MH là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng AM và CN.

Vậy $\mathrm{d}(AM,CN)=MH$.

Ta thấy $MN//BB'$ nên $MN\perp MC$, do đó tam giác MNC là tam giác vuông tại M có MH là đường cao ứng với cạnh huyền.

Ta có:

- $MN=AA'=3$.
- $MC=\dfrac{1}{2}BC=\dfrac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$.

Khi đó:

$$MH=\frac{MN\cdot MC}{\sqrt{MN^2+MC^2}}=\frac{3\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3^2+(\sqrt{3})^2}}=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{12}}=\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\frac{3}{2}.$$

Vậy $\mathrm{d}(AM,CN)=\dfrac{3}{2}=1,5$.

Bài 31. Xét một bảng ô vuông kích thước 3×3. Mỗi ô được điền ngẫu nhiên và độc lập một giá trị từ tập $\{-1;0;1\}$. Biết rằng tổng các số trên mỗi hàng đều bằng 0, gọi p là xác suất để tổng các số trên mỗi cột cũng đều bằng 0. Tính giá trị của $3430p$.

Hướng dẫn giải. Gọi các ô trong bảng là a_{ij} với $i,j\in\{1,2,3\}$.

Theo giả thiết, tổng các số trên mỗi hàng đều bằng 0 nên $a_{i1}+a_{i2}+a_{i3}=0$ với mọi $i\in\{1,2,3\}$.

- Các bộ ba số (a,b,c) thuộc tập $\{-1;0;1\}$ có tổng bằng 0 là:

☆ Bộ $\{0;0;0\}$ có 1 cách sắp xếp: $(0,0,0)$.

☆ Bộ $\{-1;0;1\}$ có $3! = 6$ cách sắp xếp: $(1,-1,0), (1,0,-1), (0,1,-1), (-1,1,0), (-1,0,1), (0,-1,1)$

◈ Như vậy, mỗi hàng có $1+6=7$ cách điền để tổng bằng 0.

Vì bảng có 3 hàng và việc điền các hàng là độc lập, nên số phần tử của không gian mẫu là:

$$n(\Omega) = 7 \times 7 \times 7 = 343.$$

Gọi biến cố A là "Tổng các số trên mỗi cột cũng đều bằng 0".
Đặt R_1, R_2, R_3 lần lượt là các vectơ hàng của bảng. Biến cố A xảy ra khi $R_1 + R_2 + R_3 = \vec{0}$.
Gọi S là tập hợp 7 vectơ hàng có tổng các thành phần bằng 0. Ta đếm số bộ $(R_1, R_2, R_3) \in S^3$ sao cho $R_1 + R_2 + R_3 = \vec{0}$:

◈ Trường hợp 1: Cả ba hàng đều là $(0,0,0)$. Có 1 cách: $((0,0,0),(0,0,0),(0,0,0))$.

◈ Trường hợp 2: Có đúng một hàng là $(0,0,0)$. Giả sử $R_1 = (0,0,0)$, khi đó $R_2 + R_3 = \vec{0} \Rightarrow R_3 = -R_2$. Với mỗi vectơ $R_2 \neq (0,0,0)$ trong S (có 6 vectơ), luôn tồn tại duy nhất một vectơ $R_3 = -R_2$ cũng thuộc S và khác $(0,0,0)$. Số cách chọn cho trường hợp này là: $3 \times 6 = 18$ cách (số 3 là số cách chọn vị trí cho hàng $(0,0,0)$).

◈ Trường hợp 3: Không có hàng nào là $(0,0,0)$. Giả sử $R_1 = (1,-1,0)$, các cặp (R_2, R_3) không chứa $(0,0,0)$ sao cho $R_2 + R_3 = (-1,1,0)$ là: $\{(0,1,-1);(-1,0,1)\}$ và $\{(-1,0,1);(0,1,-1)\}$. Có 2 cách cho mỗi R_1. Vì có 6 lựa chọn cho $R_1 \neq (0,0,0)$, số cách là: $6 \times 2 = 12$ cách.

Tổng số kết quả thuận lợi cho biến cố A là:

$$n(A) = 1 + 18 + 12 = 31.$$

Xác suất biến cố A là: $p = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{31}{343}$.
Vậy giá trị của $3430p = 3430 \cdot \dfrac{31}{343} = 310$.

Bài 32. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 4 \end{cases}$ và điểm $A(0;6;4)$.
Gọi (P) là mặt phẳng thay đổi luôn chứa đường thẳng d. Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm A lên mặt phẳng (P). Tính khoảng cách lớn nhất từ gốc tọa độ O đến điểm H.

Hướng dẫn giải. Đường thẳng d đi qua điểm $K(0;0;4)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}_d = (1;0;0)$.
Ta có vectơ $\overrightarrow{KA} = (0;6;0)$. Nhận thấy $\overrightarrow{KA} \cdot \vec{u}_d = 0 \cdot 1 + 6 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0 \Rightarrow AK \perp d$.
Do đó, K chính là hình chiếu vuông góc của A lên đường thẳng d.
Vì đường thẳng $d \subset (P)$ và H là hình chiếu của A lên (P) nên $AH \perp (P)$. Suy ra $AH \perp HK$ (vì $K \in d \subset (P)$).
Mặt khác, mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{u}_d = (1;0;0)$ nên vectơ pháp tuyến $\vec{n}_P$ của (P) phải vuông góc với $\vec{u}_d$, dẫn đến thành phần hoành độ của $\vec{n}_P$ bằng 0.
Do điểm A có hoành độ bằng 0 nên hình chiếu H của A lên (P) cũng phải có hoành độ $x_H = 0$.
Như vậy, điểm H luôn nằm trong mặt phẳng tọa độ (Oyz).
Trong mặt phẳng (Oyz), vì $\angle AHK = 90^\circ$ nên điểm H luôn nằm trên đường tròn đường kính AK.
Đường tròn này có:

◈ Tâm I là trung điểm của $AK \Rightarrow I(0;3;4)$.

◈ Bán kính $R = \dfrac{AK}{2} = \dfrac{\sqrt{0^2+6^2+0^2}}{2} = 3$.

Khoảng cách từ gốc tọa độ $O(0;0;0)$ đến điểm H đạt giá trị lớn nhất khi H là giao điểm của tia OI với đường tròn.
Ta có $OI = \sqrt{0^2+3^2+4^2} = 5$.
Khoảng cách lớn nhất từ O đến H là: $OH_{\max} = OI + R = 5 + 3 = 8$.

Bài 33. Xét các cấp số cộng (a_n) có số hạng đầu tiên a_1 và công sai d đều là các số nguyên dương và thỏa mãn $2^{a_8} = 2^{27}a_8$. Tìm giá trị nhỏ nhất của a_3.

Hướng dẫn giải. Từ giả thiết $2^{a_8} = 2^{27}a_8$, ta có phương trình: $\dfrac{2^{a_8}}{a_8} = 2^{27}$ Xét hàm số $f(x) = \dfrac{2^x}{x}$ với x là số nguyên dương.

- Với $x = 1$, $f(1) = 2 \neq 2^{27}$.
- Với $x = 2$, $f(2) = 2 \neq 2^{27}$.
- Với $x \geq 2$, xét tỷ số $\dfrac{f(x+1)}{f(x)} = \dfrac{2^{x+1}}{x+1} \cdot \dfrac{x}{2^x} = \dfrac{2x}{x+1} > 1$ (do $x \geq 2 \Rightarrow 2x > x+1$).
- Do đó hàm số $f(x)$ đồng biến khi $x \geq 2$.

Nhận thấy $f(32) = \dfrac{2^{32}}{32} = \dfrac{2^{32}}{2^5} = 2^{27}$.
Vì $f(x)$ đồng biến trên $[2;+\infty)$ nên $a_8 = 32$ là nghiệm nguyên duy nhất của phương trình.

Theo công thức số hạng tổng quát của cấp số cộng: $a_8 = a_1 + 7d = 32$ Vì a_1, d là các số nguyên dương nên ta có điều kiện $7d < 32 \Rightarrow d \leq 4$.
Ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của $a_3 = a_1 + 2d$.
Từ $a_1 + 7d = 32 \Rightarrow a_1 = 32 - 7d$. Thay vào biểu thức của a_3:

$$a_3 = (32 - 7d) + 2d = 32 - 5d$$

Để a_3 nhỏ nhất thì d phải lớn nhất.
Với $d \in \mathbb{Z}^+$ và $d \leq 4$, giá trị lớn nhất của d là $d = 4$.
Khi đó, $a_1 = 32 - 7(4) = 4$ (thỏa mãn nguyên dương).
Giá trị nhỏ nhất của a_3 là:$a_3 = 32 - 5(4) = 12$. Vậy giá trị nhỏ nhất của a_3 bằng 12.

Bài 34. Tiến hành xếp 3 cô gái $(G_1; G_2; G_3)$ và 6 chàng trai vào 9 chiếc ghế hàng ngang sao cho ba cô gái ngồi theo đúng thứ tự $G_1; G_2; G_3$ từ trái sang phải (không nhất thiết phải ngồi kề nhau). Giữa cô gái thứ nhất (G_1) và cô gái thứ hai (G_2) có ít nhất một chàng trai, giữa cô gái thứ hai (G_2) và cô gái thứ ba (G_3) có tối đa hai chàng trai. Gọi T là số cách xếp thỏa mãn. Tính $\dfrac{T}{80}$.

Hướng dẫn giải.

- Bước 1: Xếp 6 chàng trai vào hàng ngang trước, có $6! = 720$ cách xếp.
- Bước 2: Tìm số cách đặt các cô gái vào các vị trí tương đối so với các chàng trai. Gọi x_1, x_2, x_3, x_4 lần lượt là số lượng chàng trai ở các vị trí: bên trái G_1, giữa G_1 và G_2, giữa G_2 và G_3, và bên phải G_3. Ta có phương trình tổng số chàng trai:

  $$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6 \quad \text{với } x_i \in \mathbb{N}$$

  Theo giả thiết bài toán, ta có các điều kiện:
  - $x_1 \geq 0, x_4 \geq 0$.
  - Giữa G_1, G_2 có ít nhất 1 chàng trai: $x_2 \geq 1$.
  - Giữa G_2, G_3 có tối đa 2 chàng trai: $0 \leq x_3 \leq 2$.

  Đặt $x_2' = x_2 - 1$ $(x_2' \geq 0)$, phương trình trở thành: $x_1 + x_2' + x_3 + x_4 = 5$. Ta đếm số nghiệm

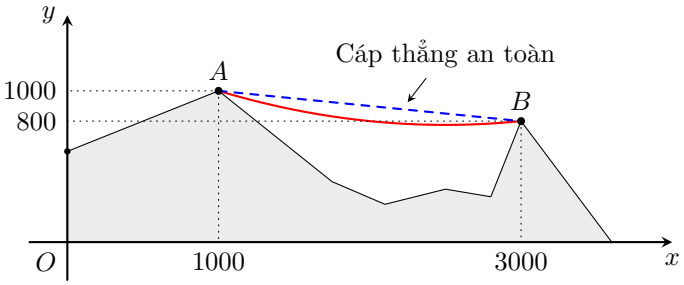
nguyên không âm của phương trình này theo các trường hợp của x_3:

- ☆ Trường hợp $x_3 = 0$: Phương trình $x_1 + x_2' + x_4 = 5$ có $C_{5+3-1}^{3-1} = C_7^2 = 21$ nghiệm.
- ☆ Trường hợp $x_3 = 1$: Phương trình $x_1 + x_2' + x_4 = 4$ có $C_{4+3-1}^{3-1} = C_6^2 = 15$ nghiệm.
- ☆ Trường hợp $x_3 = 2$: Phương trình $x_1 + x_2' + x_4 = 3$ có $C_{3+3-1}^{3-1} = C_5^2 = 10$ nghiệm.

Tổng số cách chọn vị trí cho 3 cô gái là: $21 + 15 + 10 = 46$ cách. Vì thứ tự của các cô gái đã được cố định là G_1, G_2, G_3 nên mỗi bộ vị trí chỉ có duy nhất 1 cách xếp.

- ◈ Vậy tổng số cách xếp thỏa mãn là: $T = 46 \cdot 6! = 46 \cdot 720 = 33120$ cách.
- ◈ Giá trị cần tìm là: $\dfrac{T}{80} = \dfrac{33120}{80} = 414$.

Bài 35. Hình vẽ dưới đây mô tả mặt cắt ngang của một khu du lịch sinh thái kết nối hai đỉnh núi tại A và B bằng một cầu treo có hình dạng là một đường cong parabol. Trong hệ trục Oxy, trục Ox biểu thị khoảng cách theo phương ngang, Oy biểu thị độ cao so với mực nước biển. Khoảng cách theo phương ngang giữa hai ngọn núi A và B bằng 2000 m và chiều cao ngọn núi tại B là 800 m so với mực nước biển. Biết rằng, đỉnh núi tại A có độ cao là 1000 m so với mực nước biển, cách Oy một khoảng 1000 m và độ dốc lớn nhất của cầu treo tại đó có độ lớn bằng $0,3$. Để đảm bảo an toàn, người ta lắp đặt thêm một sợi cáp an toàn căng thẳng nối trực tiếp hai đỉnh A và B. Xác định khoảng cách lớn nhất giữa cáp an toàn và cầu treo theo phương thẳng đứng theo đơn vị mét?



Hướng dẫn giải. Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ (đơn vị trên các trục là mét).
Theo giả thiết:

- ◈ Đỉnh núi A có tọa độ $A(1000; 1000)$.
- ◈ Khoảng cách ngang $AB = 2000$ m nên hoành độ điểm B là $x_B = 1000 + 2000 = 3000$.
- ◈ Độ cao tại B là 800 m nên tọa độ điểm $B(3000; 800)$.

Giả sử phương trình của cầu treo parabol là $(P) : y = ax^2 + bx + c$ với $a > 0$.
Độ dốc của cầu treo tại một điểm là giá trị đạo hàm $y' = 2ax + b$ tại điểm đó.
Vì độ dốc tại A có độ lớn bằng $0,3$ và cầu treo trũng xuống từ A đến B nên $y'(1000) = -0,3$.
Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} a(1000)^2 + b(1000) + c = 1000 \quad (1) \\ a(3000)^2 + b(3000) + c = 800 \quad (2) \\ 2a(1000) + b = -0,3 \quad (3) \end{cases}$$

Từ (3) suy ra $b = -0,3 - 2000a$. Thế vào (1) và (2):

$$\begin{cases} 10^6 a + 1000(-0,3 - 2000a) + c = 1000 \\ 9 \cdot 10^6 a + 3000(-0,3 - 2000a) + c = 800 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -10^6 a + c = 1300 \\ 3 \cdot 10^6 a + c = 1700 \end{cases}$$

Giải hệ này ta được $a = 10^{-4}$ và $c = 1400$. Thay lại tìm được $b = -0,5$.
Vậy phương trình của cầu treo là $y_P = 10^{-4}x^2 - 0,5x + 1400$.

Phương trình đường thẳng AB (cáp an toàn) đi qua $A(1000;1000)$ và $B(3000;800)$: Hệ số góc $k=\dfrac{800-1000}{3000-1000}=-0,1$.
Phương trình cáp an toàn: $y_d=-0,1(x-1000)+1000=-0,1x+1100$.

Khoảng cách thẳng đứng giữa cáp và cầu treo là:

$$d(x)=y_d-y_P=(-0,1x+1100)-(10^{-4}x^2-0,5x+1400)=-10^{-4}x^2+0,4x-300.$$

Hàm số $d(x)$ đạt giá trị lớn nhất tại đỉnh của parabol này:

$$x_0=\frac{-0,4}{2\cdot(-10^{-4})}=2000 \text{ m}.$$

Giá trị khoảng cách lớn nhất là:

$$d(2000)=-10^{-4}\cdot(2000)^2+0,4\cdot 2000-300=-400+800-300=100 \text{ m}.$$

Vậy khoảng cách lớn nhất giữa cáp an toàn và cầu treo theo phương thẳng đứng là 100 mét.

Bài 36. Phần trắc nghiệm đúng sai của đề thi THPT Quốc Gia gồm có 04 câu hỏi. Mỗi câu hỏi sẽ gồm 04 ý trắc nghiệm đúng sai a), b), c), d) và mỗi ý chỉ gồm hai lựa chọn là **đúng** hoặc **sai**. Quy tắc tính điểm của một câu hỏi đúng sai này như sau:

- Đúng 01 ý trong 04 ý được $0,1$ điểm.
- Đúng 02 ý trong 04 ý được $0,25$ điểm.
- Đúng 03 ý trong 04 ý được $0,5$ điểm.
- Đúng cả 04 ý được 1 điểm.
- Không đúng ý nào trong cả 04 ý thì không được điểm.

Một học sinh khoanh bừa ngẫu nhiên tất cả các ý của 4 câu hỏi. Biết rằng kết quả cuối cùng học sinh này đạt được tổng điểm là $2,5$ điểm. Tính xác suất để trong 4 câu hỏi đó có đúng 2 câu học sinh trả lời đúng hoàn toàn (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Hướng dẫn giải. Mỗi câu hỏi có 4 ý, mỗi ý có 2 lựa chọn nên tổng số cách trả lời cho mỗi câu là $2^4=16$ cách.
Số cách để đạt được các mức điểm trong một câu hỏi cụ thể là:

- Để đạt 1 điểm (đúng cả 4 ý): Có $C_4^4=1$ cách.
- Để đạt $0,5$ điểm (đúng 3 ý): Có $C_4^3=4$ cách.
- Để đạt $0,25$ điểm (đúng 2 ý): Có $C_4^2=6$ cách.
- Để đạt $0,1$ điểm (đúng 1 ý): Có $C_4^1=4$ cách.
- Để đạt 0 điểm (đúng 0 ý): Có $C_4^0=1$ cách.

Gọi x_i là số điểm đạt được ở câu thứ i $(i=1,2,3,4)$. Theo đề bài, ta có phương trình:

$$x_1+x_2+x_3+x_4=2,5 \text{ với } x_i\in\{0;0,1;0,25;0,5;1\}$$

Các bộ điểm $\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$ có tổng bằng $2,5$ bao gồm các trường hợp sau:

1. Bộ điểm $\{1;1;0,5;0\}$: Có $\dfrac{4!}{2!1!1!}=12$ hoán vị. Số cách chọn tương ứng: $12\times(1^2\times4^1\times1^1)=48$ cách.
2. Bộ điểm $\{1;1;0,25;0,25\}$: Có $\dfrac{4!}{2!2!}=6$ hoán vị. Số cách chọn tương ứng: $6\times(1^2\times6^2)=216$ cách.

③ Bộ điểm $\{1; 0,5; 0,5; 0,5\}$: Có $\dfrac{4!}{1!3!} = 4$ hoán vị. Số cách chọn tương ứng: $4 \times (1^1 \times 4^3) = 256$ cách.

(Lưu ý: Các trường hợp có điểm $0,1$ *không thể tạo ra tổng* $2,5$ *vì phần thập phân lẻ* $0,1$ *không thể bù trừ để ra* $0,5$ *hoặc số nguyên với tối đa 4 câu hỏi).*
Tổng số kết quả thuận lợi cho việc học sinh đạt $2,5$ điểm là:

$$n(\Omega) = 48 + 216 + 256 = 520 \text{ cách.}$$

Gọi biến cố A: "Học sinh có đúng 2 câu trả lời đúng hoàn toàn (đạt 1 điểm)".
Biến cố A xảy ra ở trường hợp (1) và trường hợp (2). Số cách thuận lợi cho A là:

$$n(A) = 48 + 216 = 264 \text{ cách.}$$

Xác suất cần tính là:

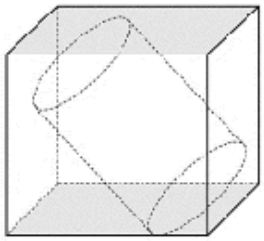
$$P(A) = \frac{264}{520} = \frac{33}{65} \approx 0,50769.$$

Làm tròn đến hàng phần trăm, ta được kết quả $P(A) \approx 0,51$.

Bài 37. Trong câu chuyện "Ăn khế trả vàng", người anh sau khi dụ được người em chuyển nhượng lại mái nhà tranh nghèo cùng cây khế đã được gặp con chim khổng lồ như những gì người em kể lại. Chim khổng lồ ăn khế xong liền cam kết trả vàng cho người anh như sau:

- Chim sẽ đưa người anh đến hòn đảo nhỏ có nhiều vàng bạc đá quý.
- Người anh phải tự thiết kế một vật đựng hình trụ tròn có thể đặt vừa trong một chiếc rương hình lập phương cạnh bằng 60 cm (bỏ qua độ dày của chiếc rương và vật đựng).





Vốn tham lam, người anh cho rằng cần tạo ra một vật đựng hình trụ có trục nằm dọc theo đường chéo lớn của hình lập phương (chiếc rương) thì sẽ có sức chứa lớn hơn cả. Anh ta làm theo hướng này nên đã tạo ra vật đựng hình trụ có thể tích lớn nhất V_1; tuy nhiên trong thực tế vật đựng có thể tích lớn nhất như chim yêu cầu là V_2 lớn hơn V_1. Tính mức độ chênh lệch thể tích $V_2 - V_1$ trong hai khối trụ này theo đơn vị lít (làm tròn đến hàng đơn vị).

Hướng dẫn giải. Đổi cạnh hình lập phương $a = 60$ cm $= 6$ dm. Khi đó đơn vị thể tích dm^3 tương ứng với lít.

Khối trụ có thể tích lớn nhất đặt vừa trong hình lập phương khi trục của nó song song với một cạnh của hình lập phương.

- Khi đó, đường kính đáy của hình trụ bằng cạnh hình lập phương: $2R = a \Rightarrow R = \dfrac{a}{2} = 3$ dm.
- Chiều cao của hình trụ bằng cạnh hình lập phương: $H = a = 6$ dm.

Thể tích $V_2 = \pi R^2 H = \pi \cdot 3^2 \cdot 6 = 54\pi \approx 169,65$ (lít).

Xét hình trụ có bán kính r và chiều cao h có trục nằm trên đường chéo lớn của hình lập phương. Điều kiện để hình trụ này nằm trọn trong hình lập phương là: $h + 2\sqrt{2}r \le a\sqrt{3} \Rightarrow h = a\sqrt{3} - 2\sqrt{2}r$

Thể tích khối trụ $V = \pi r^2 h = \pi r^2(a\sqrt{3} - 2\sqrt{2}r) = \pi(a\sqrt{3}r^2 - 2\sqrt{2}r^3)$.

Xét hàm số $f(r) = a\sqrt{3}r^2 - 2\sqrt{2}r^3$ với $r > 0$.

$f'(r) = 2a\sqrt{3}r - 6\sqrt{2}r^2$

$f'(r) = 0 \Leftrightarrow r = \dfrac{2a\sqrt{3}}{6\sqrt{2}} = \dfrac{a}{\sqrt{6}}$.

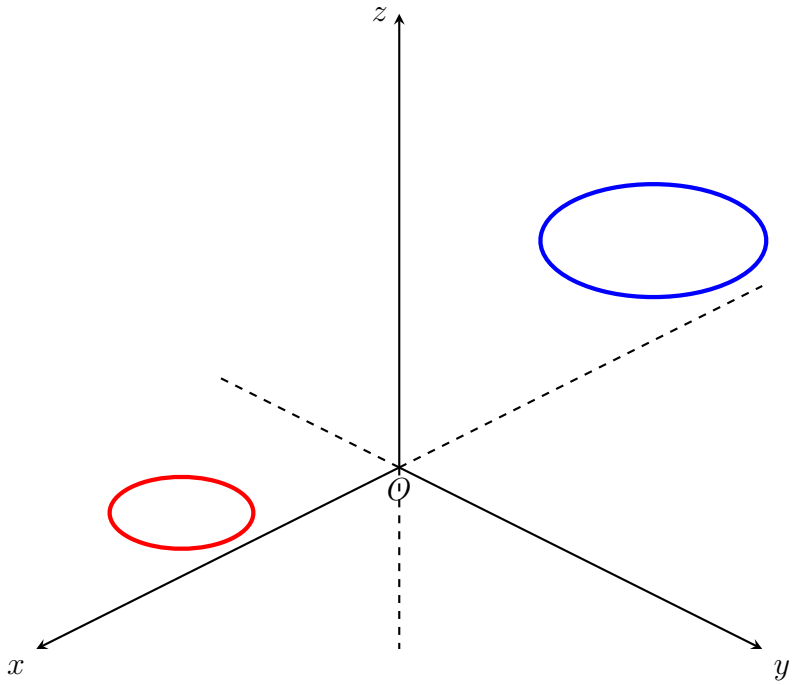
Khi đó $h = a\sqrt{3} - 2\sqrt{2} \cdot \dfrac{a}{\sqrt{6}} = a\sqrt{3} - \dfrac{2a}{\sqrt{3}} = \dfrac{3a - 2a}{\sqrt{3}} = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

Thể tích lớn nhất $V_1 = \pi \left(\dfrac{a}{\sqrt{6}}\right)^2 \cdot \dfrac{a}{\sqrt{3}} = \dfrac{\pi a^3}{6\sqrt{3}}$.

Với $a = 6$ dm, ta có $V_1 = \dfrac{\pi \cdot 6^3}{6\sqrt{3}} = \dfrac{36\pi}{\sqrt{3}} = 12\sqrt{3}\pi \approx 65,30$ (lít).

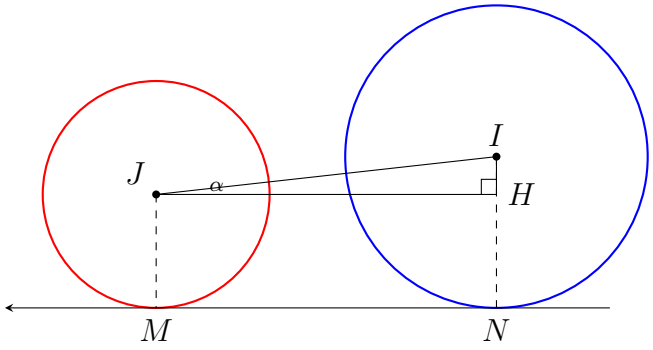
Chênh lệch: $V_2 - V_1 = 54\pi - 12\sqrt{3}\pi = \pi(54 - 12\sqrt{3}) \approx 104,35$ (lít). Làm tròn đến hàng đơn vị, ta được kết quả là 104 lít.

Bài 38. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai viên bi xanh và đỏ ban đầu dạng hai mặt cầu lần lượt có phương trình là $(S_{\text{đỏ}}) : (x-10)^2+y^2+(z-3)^2 = 9$ và $(S_{\text{xanh}}) : (x+12)^2+y^2+(z-4)^2 = 16$. Biết mặt đất trùng với mặt phẳng Oxy và hai mặt cầu này tiếp xúc với mặt phẳng Oxy với điểm tiếp xúc nằm trên trục Ox. Truyền cho hai viên bi đỏ và xanh lần lượt các tốc độ không đổi $v_{\text{đỏ}} = 5$ (m/s) và $v_{\text{xanh}} = 3$ (m/s) thì hai viên bi lăn thẳng về phía nhau dọc theo trục Ox (điểm tiếp xúc luôn nằm trên Ox). Sau khoảng thời gian bằng bao nhiêu giây thì hai viên bi va chạm lần đầu tiên (Đơn vị trên hệ trục tọa độ là mét và kết quả làm tròn đến hàng phần chục).



Hướng dẫn giải. Gọi M, N lần lượt là vị trí tiếp xúc ban đầu của bi đỏ và bi xanh với trục Ox.

- Mặt cầu $(S_{\text{đỏ}}) : (x-10)^2 + y^2 + (z-3)^2 = 9$ có tâm $J(10;0;3)$ và bán kính $R_{\text{đỏ}} = 3$.
- Mặt cầu $(S_{\text{xanh}}) : (x+12)^2 + y^2 + (z-4)^2 = 16$ có tâm $I(-12;0;4)$ và bán kính $R_{\text{xanh}} = 4$.



Khi hai viên bi va chạm nhau tức là hai mặt cầu này sẽ tiếp xúc với nhau và bán kính hai mặt cầu này hơn kém nhau 1 m.

Gọi H là hình chiếu của J trên IN và $\widehat{IJH} = \alpha$. Ta có $IH = 4 - 3 = 1$ và $IJ = 3 + 4 = 7 \Rightarrow MN = JH = 7 \cdot \cos\alpha = \sqrt{7^2 - 1^2} = 4\sqrt{3}$.

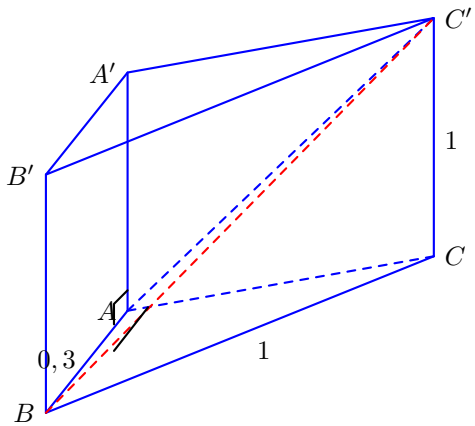
Vì M chuyển động theo phương ngược chiều trục Ox nên có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = k \cdot \vec{i} = (k; 0; 0)$ với $k < 0$. Lại có vận tốc 5 (m/s) nên $\sqrt{k^2} = 5 \Rightarrow k = -5$. Suy ra phương trình chuyển động của điểm M là $\begin{cases} x = 10 - 5t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow M(10 - 5t; 0; 0)$.

Tương tự, phương trình chuyển động của điểm N cùng chiều trục Ox với vận tốc 3 (m/s) nên $N(-12 + 3t; 0; 0)$. Ta có:

$$\begin{aligned} MN = 4\sqrt{3} &\Leftrightarrow |10 - 5t - (-12 + 3t)| = 4\sqrt{3} \\ &\Leftrightarrow |22 - 8t| = 4\sqrt{3} \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 8t - 22 = 4\sqrt{3} \\ 8t - 22 = -4\sqrt{3} \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \approx 3,61 \text{ (loại)} \\ t \approx 1,88 \text{ (nhận vì giây đầu tiên)} \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy sau khoảng $1,88$ giây thì hai viên bi va chạm lần đầu tiên.

~~Bài 38.~~ Một tấm cầu dốc kê bậc thềm làm bằng kim loại như hình vẽ. Biết chiều cao tối đa của cầu dốc là 0,3 m và bề mặt cầu là hình vuông có cạnh bằng 1 m. Hãy tính góc hợp bởi đường chéo bề mặt cầu dốc với mặt sàn nhà theo đơn vị độ (làm tròn kết quả đến hàng phần chục).



Hướng dẫn giải. Lật đứng bệ lên ta được khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$. Với:

- Dáy ABC là tam giác vuông tại A và $AB = 0{,}3$ m; $BC = 1$ m.
- Mặt bên $(BCC'B')$ là mặt cầu dốc và là hình vuông có cạnh bằng 1 m nên $CC' = 1$ m.
- Mặt bên $(ACC'A')$ là mặt sàn nhà.

Khi đó BC' là đường chéo bề mặt cầu dốc và AC' là hình chiếu của BC' lên mặt phẳng sàn nhà $(ACC'A')$.
Suy ra góc giữa đường chéo bề mặt cầu dốc và mặt sàn nhà là góc $\widehat{BC'A}$.
Trong tam giác vuông BCC' (vuông tại C do tính chất lăng trụ đứng), ta có:

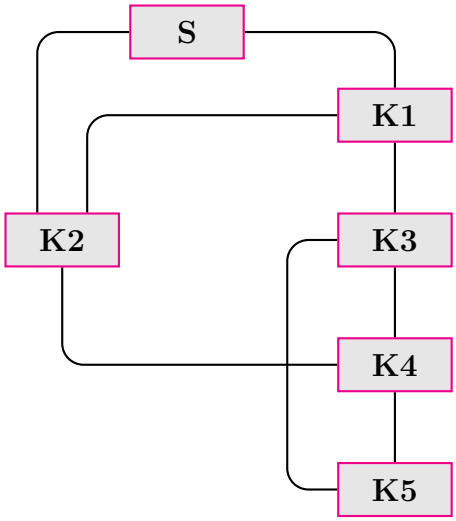
$$BC' = \sqrt{BC^2 + CC'^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}\ (\text{m}).$$

Vì $AB \perp (ACC'A')$ nên tam giác ABC' vuông tại A.
Xét tam giác vuông ABC', ta có:

$$\sin \widehat{BC'A} = \frac{AB}{BC'} = \frac{0{,}3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{20}.$$

Suy ra $\widehat{BC'A} \approx 12{,}2°$.
Vậy góc hợp bởi đường chéo bề mặt cầu dốc với mặt sàn nhà xấp xỉ $12{,}2°$.

Bài 40. Một máy bay không người lái (drone) được dùng để phun thuốc diệt côn trùng trên các khu vực cánh đồng được kết nối với nhau. Mỗi khu vực là một đỉnh và các lối đi giữa các khu vực là các cạnh. Drone cần bay qua tất cả các lối đi để phun thuốc đều khắp, bắt đầu và kết thúc tại điểm sạc. Trên hình vẽ mô tả, drone bắt đầu tại điểm sạc S đi đến các khu vực được kí hiệu $K1, K2, K3, K4, K5$. Có bao nhiêu lộ trình để drone bay qua tất cả các lối đi đúng một lần và quay về điểm sạc S?



Hướng dẫn giải.

Tính bậc của các đỉnh (số lượng lối đi kết nối trực tiếp với mỗi khu vực):

- $\deg(S) = 2$ (nối với $K1, K2$).
- $\deg(K1) = 3$ (nối với $S, K2, K3$).
- $\deg(K2) = 5$ (nối với $S, K1, K3, K4, K5$).
- $\deg(K3) = 3$ (nối với $K1, K2, K4$).
- $\deg(K4) = 3$ (nối với $K3, K2, K5$).
- $\deg(K5) = 2$ (nối với $K4, K2$).

Có bốn đỉnh có bậc lẻ là $K1, K2, K3, K4$.

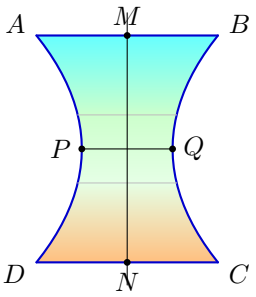
Theo lý thuyết đồ thị, một chu trình đóng đi qua mỗi cạnh đúng một lần (lộ trình Euler bắt đầu và kết thúc tại cùng một điểm S) chỉ tồn tại khi và chỉ khi mọi đỉnh trong đồ thị đều có bậc chẵn.

Vì đồ thị này có các đỉnh bậc lẻ, nên không tồn tại chu trình Euler đi qua tất cả các lối đi một lần và quay về điểm sạc S.

Vậy số lộ trình thoả mãn yêu cầu đề bài là 0.

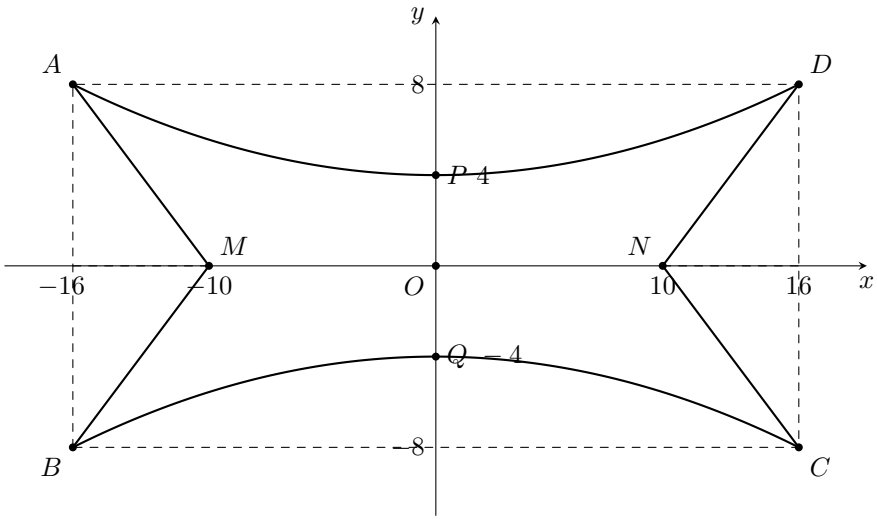
Bài 41.

Một mô hình khối tròn xoay có trục là đường thẳng MN, khi ta cắt khối tròn xoay đó bởi một mặt phẳng đi qua trục của khối tròn xoay thì ta được mặt cắt có dạng như hình vẽ dưới đây.



Biết $MN = 20$ cm, $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = 16$ cm, $AD = 32$ cm, hai cung APD và BQC là một phần của các đường parabol với đỉnh lần lượt là P, Q và $PQ = 8$ cm. Tính thể tích của mô hình đó theo đơn vị cm^3. (*Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị*)

Hướng dẫn giải. Chọn hệ Oxy như hình vẽ



Khi đó, cung APD là một phần của đường parabol đỉnh $P(0;4)$ và bề lõm quay lên nên có phương trình dạng $y = ax^2 + 4, a > 0$.

Parabol đi qua $D(16;8)$ nên ta có $8 = 256a + 4 \Leftrightarrow a = \dfrac{1}{64} \Rightarrow y = \dfrac{1}{64}x^2 + 4$.

Tương tự, ta có cung BQC là một phần của đường parabol có phương trình là $y = -\dfrac{1}{64}x^2 - 4$.

Thể tích của khối tròn xoay cần tìm là $V = V_1 - 2V_2$.

V_1 là thể tích của khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = \dfrac{1}{64}x^2 + 4$, trục hoành

và hai đường thẳng $x=-16, x=16$ quay quanh Ox nên

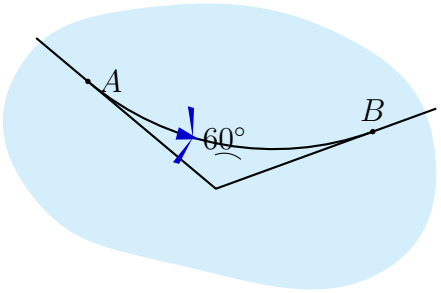
$$V_1=\pi\int\limits_{-16}^{16}\left(\frac{1}{64}x^2+4\right)^2\mathrm{d}x=\frac{14336}{15}\pi\ (\mathrm{cm}^3)$$

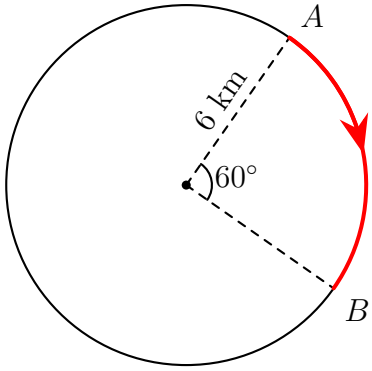
V_2 là thể tích của khối nón có bán kính đáy bằng 8 và chiều cao bằng 6 nên

$$V_2=\frac{1}{3}\pi\cdot 8^2\cdot 6=128\pi\ (\mathrm{cm}^3).$$

Do đó $V=\dfrac{14336}{15}\pi-2\cdot 128\pi=\dfrac{10496}{15}\pi\approx 2198,3\ (\mathrm{cm}^3)$.

Bài 42. Một máy bay di chuyển từ điểm A đến điểm B theo quỹ đạo là một cung tròn AB bán kính 6 kilomet với góc chắn cung $\overset{\frown}{AOB}=60^\circ$ (tham khảo như hình vẽ). Biết rằng gia tốc của máy bay được xác định bởi công thức $a(t)=-0,5\ (\mathrm{m/s}^2)$ với t tính bằng giây, $t=0$ ứng với thời điểm máy bay ở vị trí A. Ở vị trí A vật có vận tốc bằng 120 m/s, khi đó vận tốc của vật tại vị trí B bằng bao nhiêu m/s (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?





Hướng dẫn giải. Đổi đơn vị bán kính $R=6$ km $=6000$ m.
Số đo góc chắn cung AB là $\alpha=60^\circ=\frac{\pi}{3}$ (rad).
Độ dài quãng đường máy bay di chuyển từ A đến B là độ dài cung AB:

$$s=R\cdot\alpha=6000\cdot\frac{\pi}{3}=2000\pi\ (\mathrm{m}).$$

Vì gia tốc $a(t)=-0,5\ \mathrm{m/s}^2$ là hằng số, đây là chuyển động biến đổi đều. Áp dụng công thức liên hệ giữa vận tốc, gia tốc và quãng đường:

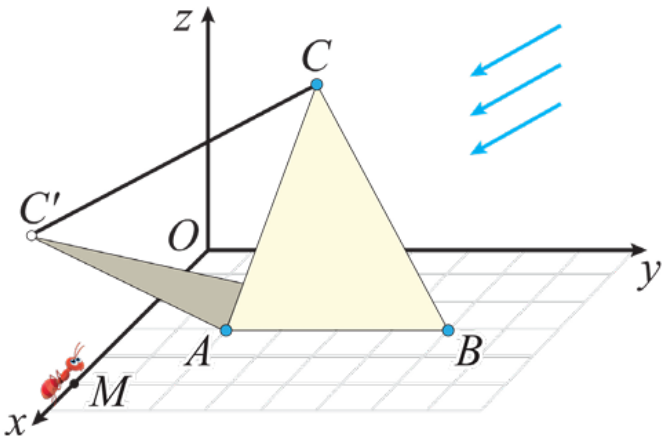
$$v_B^2-v_A^2=2as$$

Thay các giá trị $v_A=120$ m/s, $a=-0,5\ \mathrm{m/s}^2$, $s=2000\pi$ m vào công thức:

$$\begin{aligned}v_B^2-120^2&=2\cdot(-0,5)\cdot 2000\pi\\ \Leftrightarrow v_B^2&=14400-2000\pi\\ \Rightarrow v_B&=\sqrt{14400-2000\pi}\approx 90,093...\ (\mathrm{m/s}).\end{aligned}$$

Làm tròn kết quả đến hàng phần mười, ta được $v_B\approx 90,1$ m/s.
Vậy vận tốc của vật tại vị trí B là $90,1$ m/s.

Bài 43. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, đơn vị mỗi trục là mét, mặt đất là mặt Oxy, trục Oz hướng lên, có một bức tường mỏng được giới hạn bởi miền tam giác ABC trong đó $A(3;2;0)$, $B(3;6;0)$ và $C(2;3;4)$. Ánh sáng mặt trời chiếu theo vectơ $\vec{u}(-1;-3;-1)$ tạo thành một cái bóng mát trên mặt đất (quan sát hình vẽ). Một con kiến bò từ điểm $M(5;0;0)$ thẳng dọc theo trục Ox đến gốc tọa độ O với vận tốc 3 cm/s để về tổ của mình, tính thời gian con kiến đi trong bóng mát (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị của giây).



Hướng dẫn giải. Đổi vận tốc của con kiến: $v = 3$ cm/s $= 0,03$ m/s.

Bóng của các điểm A, B, C trên mặt đất (mặt phẳng Oxy) là A', B', C'.

- Vì $A, B \in (Oxy)$ nên bóng của chúng trùng với chính nó: $A'(3;2;0)$, $B'(3;6;0)$.
- Gọi $C'(x;y;0)$ là bóng của điểm $C(2;3;4)$ trên mặt đất. Khi đó $\overrightarrow{CC'} = (x-2; y-3; -4)$ cùng phương với vectơ tia sáng $\vec{u}(-1;-3;-1)$.
  Ta có: $\dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y-3}{-3} = \dfrac{-4}{-1} = 4 \Rightarrow \begin{cases} x-2=-4 \\ y-3=-12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=-9 \end{cases} \Rightarrow C'(-2;-9;0)$.

Bóng mát trên mặt đất là miền tam giác ABC'. Con kiến bò trên trục Ox (có phương trình $y=0, z=0$). Đoạn đường con kiến đi trong bóng mát là giao điểm của trục Ox với miền tam giác ABC'.

- Đường thẳng AC' đi qua $A(3;2)$ và $C'(-2;-9)$ trong mặt phẳng Oxy có phương trình:
  $\dfrac{x-3}{-2-3} = \dfrac{y-2}{-9-2} \Leftrightarrow \dfrac{x-3}{-5} = \dfrac{y-2}{-11} \Leftrightarrow 11x - 5y = 23$.
  Giao điểm với trục Ox $(y=0)$ là $P_1\left(\dfrac{23}{11};0;0\right)$.
- Đường thẳng BC' đi qua $B(3;6)$ và $C'(-2;-9)$ trong mặt phẳng Oxy có phương trình:
  $\dfrac{x-3}{-2-3} = \dfrac{y-6}{-9-6} \Leftrightarrow \dfrac{x-3}{-5} = \dfrac{y-6}{-15} \Leftrightarrow 3x - y = 3$.
  Giao điểm với trục Ox $(y=0)$ là $P_2(1;0;0)$.

Quãng đường con kiến bò trong bóng mát là độ dài đoạn P_1P_2:

$$s = \left|\frac{23}{11} - 1\right| = \frac{12}{11} \text{ (m)}.$$

Thời gian con kiến đi trong bóng mát là:

$$t = \frac{s}{v} = \frac{12/11}{0,03} = \frac{12}{11 \cdot \frac{3}{100}} = \frac{400}{11} \approx 36,36 \text{ (s)}.$$

Làm tròn đến hàng đơn vị, ta được $t \approx 36$ giây.

Bài 44. Hai thí sinh A và B cùng tham gia một cuộc thi vấn đáp. Cán bộ coi thi đưa cho mỗi thí sinh một bộ câu hỏi gồm 10 câu hỏi khác nhau, được đựng trong 10 phong bì dán kín, có hình thức giống hệt nhau, mỗi phong bì đựng 1 câu hỏi; thí sinh chọn 3 phong bì để xác định câu hỏi của mình. Biết rằng bộ 10 câu hỏi của các thí sinh là như nhau. Hai phong bì được gọi là giống nhau nếu chứa cùng một câu hỏi. Xác suất để 3 phong bì A chọn và 3 phong bì B chọn có ít nhất hai phong bì giống nhau là $\dfrac{a}{b}$ (trong đó $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản và $a, b \in \mathbb{N}$). Tính $a^2 + b^2$.

✍ *Hướng dẫn giải.* Mỗi thí sinh chọn 3 phong bì từ 10 phong bì, số cách chọn là $\mathrm{C}_{10}^{3}=120$ cách.
Số phần tử của không gian mẫu là: $n(\Omega)=\mathrm{C}_{10}^{3}\cdot\mathrm{C}_{10}^{3}=120\cdot120=14400$.

Gọi X là biến cố: "3 phong bì A chọn và 3 phong bì B chọn có ít nhất hai phong bì giống nhau". Giả sử thí sinh A đã chọn ra 3 phong bì bất kỳ (có C_{10}^{3} cách). Để thí sinh B chọn có ít nhất 2 phong bì giống với A, ta xét các trường hợp sau cho thí sinh B:

- **Trường hợp 1:** Thí sinh B chọn được đúng 2 phong bì giống với A và 1 phong bì khác A. Số cách chọn của B là $\mathrm{C}_{3}^{2}\cdot\mathrm{C}_{7}^{1}=3\cdot7=21$ cách.
- **Trường hợp 2:** Thí sinh B chọn được cả 3 phong bì giống với A. Số cách chọn của B là $\mathrm{C}_{3}^{3}=1$ cách.

Số kết quả thuận lợi cho biến cố X là: $n(X)=\mathrm{C}_{10}^{3}\cdot(\mathrm{C}_{3}^{2}\cdot\mathrm{C}_{7}^{1}+\mathrm{C}_{3}^{3})=120\cdot(21+1)=2640$.

Xác suất của biến cố X là:

$$P(X)=\frac{n(X)}{n(\Omega)}=\frac{2640}{14400}=\frac{11}{60}.$$

Vì $\dfrac{11}{60}$ là phân số tối giản nên $a=11$ và $b=60$. Giá trị của biểu thức a^2+b^2 là: $a^2+b^2=11^2+60^2=121+3600=3721$.

Bài 45. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O cạnh 1, hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên mặt phẳng đáy trùng với trọng tâm H của tam giác đều ABC, biết số đo góc nhị diện $[S,CD,B]$ bằng 60°. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BD (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

✍ *Hướng dẫn giải.*

Vì $\triangle ABC$ là tam giác đều cạnh 1 nên $AC=1\Rightarrow OC=\dfrac{1}{2}$.

Đường cao của tam giác đều ABC là $BO=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Vì H là trọng tâm $\triangle ABC$ nên H thuộc đoạn BO và $BH=\dfrac{2}{3}BO=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Suy ra $OH=BO-BH=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

Vì O là trung điểm BD nên $OD=BO=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Do đó $HD=HO+OD=\dfrac{\sqrt{3}}{6}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, kẻ $HK\perp CD$ tại K. Vì $SH\perp(ABCD)$ nên $SK\perp CD$.
Do đó góc nhị diện $[S,CD,B]$ là góc $\angle SKH=60^\circ$.

Xét $\triangle ODC$ vuông tại O, ta có $\sin\angle ODC=\dfrac{OC}{CD}=\dfrac{1/2}{1}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\angle ODC=30^\circ$.

Trong $\triangle HKD$ vuông tại K: $HK=HD\cdot\sin30^\circ=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Trong $\triangle SHK$ vuông tại H: $SH=HK\cdot\tan60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\cdot\sqrt{3}=1$.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với $O(0;0;0)$, $A\left(-\dfrac{1}{2};0;0\right)$, $C\left(\dfrac{1}{2};0;0\right)$, $B\left(0;\dfrac{\sqrt{3}}{2};0\right)$, $D\left(0;-\dfrac{\sqrt{3}}{2};0\right)$.

Vì H nằm trên OB và $OH=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ nên $H\left(0;\dfrac{\sqrt{3}}{6};0\right)$.

Do $SH \perp (ABCD)$ và $SH = 1$ nên $S\left(0; \dfrac{\sqrt{3}}{6}; 1\right)$.

Ta có $\overrightarrow{AS} = \left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{\sqrt{3}}{6}; 1\right)$ và $\overrightarrow{BD} = (0; -\sqrt{3}; 0)$.

Gọi $\vec{n} = [\overrightarrow{AS}, \overrightarrow{BD}] = \left(\sqrt{3}; 0; -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

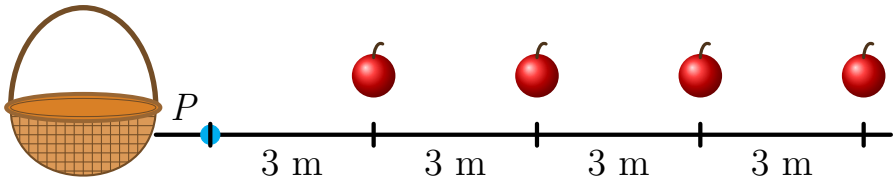
Chọn điểm $B\left(0; \dfrac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)$ thuộc BD và $A\left(-\dfrac{1}{2}; 0; 0\right)$ thuộc $SA \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)$.

Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BD là:

$$d(SA, BD) = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB}|}{|\vec{n}|} = \frac{|\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} + 0 - 0|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 0^2 + (-\frac{\sqrt{3}}{2})^2}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3 + \frac{3}{4}}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{\frac{15}{4}}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{15}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \approx 0,447.$$

Làm tròn đến hàng phần trăm, ta được $d(SA, BD) \approx 0,45$.

Bài 46. (Moon-2026) Trong một trò chơi, một cậu bé bắt đầu từ điểm P và chạy đi lấy một quả táo cách đó 3 mét. Sau đó, cậu bé chạy trở lại điểm P và đặt quả táo vào rổ. Tiếp tục như vậy, cậu bé chạy đi lấy quả táo thứ hai cách điểm P là 6 mét, rồi lại chạy về điểm P để đặt quả táo vào rổ như hình vẽ.



Quá trình này tiếp tục cho đến khi tất cả các quả táo đều được đặt vào rổ. Sau đúng 3 phút cậu bé lấy được 9 quả táo đặt vào rổ. Vậy vận tốc chạy trung bình của cậu bé là bao nhiêu mét/giây?

Hướng dẫn giải. Để lấy được một quả táo và đặt vào rổ tại P, cậu bé phải chạy một quãng đường bằng 2 lần khoảng cách từ điểm P đến quả táo đó.

- Quả táo thứ 1 cách P là 3 m $\Rightarrow$ Quãng đường chạy là $2 \times 3 = 6$ (m).
- Quả táo thứ 2 cách P là 6 m $\Rightarrow$ Quãng đường chạy là $2 \times 6 = 12$ (m).
- ...
- Quả táo thứ n cách P là $3n$ mét.

Tổng quãng đường cậu bé chạy để lấy được 9 quả táo là:

$$S = 2 \times (3 + 6 + 9 + 12 + 15 + 18 + 21 + 24 + 27)$$

$$S = 2 \times 3 \times (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9)$$

Sử dụng công thức tổng cấp số cộng: $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Với $n = 9$, ta có:

$$S = 6 \times \frac{9 \times 10}{2} = 6 \times 45 = 270 \text{ (m)}.$$

Thời gian cậu bé chạy là 3 phút, đổi sang giây:

$$t = 3 \times 60 = 180 \text{ (giây)}.$$

Vận tốc chạy trung bình của cậu bé là:

$$v = \frac{S}{t} = \frac{270}{180} = 1,5 \text{ (m/s)}.$$

Vậy vận tốc trung bình của cậu bé là $1,5$ mét/giây.

Bài 47. Hai thí sinh A và B cùng tham gia một cuộc thi vấn đáp. Cán bộ coi thi đưa cho mỗi thí sinh một bộ câu hỏi gồm 10 câu hỏi khác nhau, được đựng trong 10 phong bì dán kín, có hình thức giống hệt nhau, mỗi phong bì đựng 1 câu hỏi; thí sinh chọn 3 phong bì để xác định câu hỏi của mình. Biết rằng bộ 10 câu hỏi của các thí sinh là như nhau. Hai phong bì được gọi là giống nhau nếu chứa cùng một câu hỏi. Xác suất để 3 phong bì A chọn và 3 phong bì B chọn có ít nhất hai phong bì giống nhau là $\frac{a}{b}$ (trong đó $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản và $a, b \in \mathbb{N}$). Tính $a^2 + b^2$.

Hướng dẫn giải.

Để dễ hình dung, hãy tưởng tượng bạn A có một hộp bi gồm 10 viên bi đánh số từ 1 đến 10 (tương ứng với 10 câu hỏi được đựng trong phong bì) và bạn B cũng vậy. Số cách bạn A chọn ra 3 viên bi bất kì là: C_{10}^3 cách. Số cách bạn B chọn ra 3 viên bi bất kì là: C_{10}^3 cách. Vậy số phần tử của không gian mẫu là: $n_\Omega = C_{10}^3 \cdot C_{10}^3$.

Gọi X là biến cố: "3 phong bì A chọn và 3 phong bì B chọn có ít nhất hai phong bì giống nhau". Nếu coi là các viên bi, biến cố X sẽ là: "3 viên bi A chọn và 3 viên bi B chọn có ít nhất hai viên bi đánh số giống nhau".

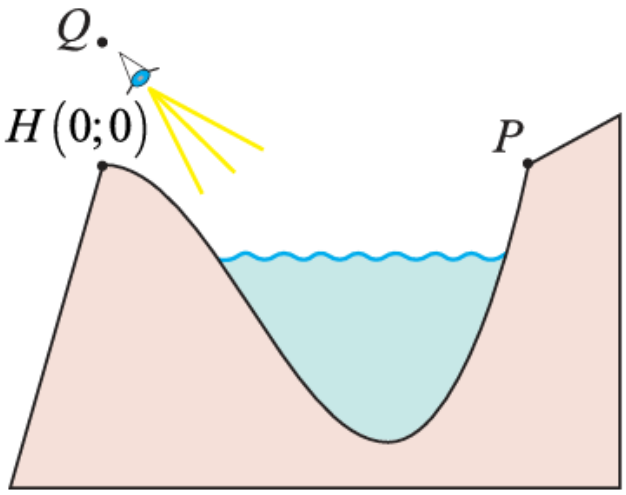
- **TH1:** Cả ba viên bi A chọn và B chọn được đánh số giống nhau. Số cách bạn A chọn ra 3 viên bi bất kì là: C_{10}^3 cách. Khi đó B có một cách duy nhất để chọn bi sao cho "Cả ba viên bi A chọn và B chọn được đánh số giống nhau". Do vậy trường hợp này có: C_{10}^3 cách.
- **TH2:** "3 viên bi A chọn và 3 viên bi B chọn có đúng hai viên bi đánh số giống nhau". Số cách bạn A chọn ra 3 viên bi bất kì là: C_{10}^3 cách (chẳng hạn 3, 4, 5). Khi đó B chọn bi theo hai bước:
  - Bước 1: Chọn 2 viên đánh số giống A chọn có C_3^2 cách (chẳng hạn 3, 4 hoặc 4, 5 hoặc 3, 5).
  - Bước 2: Chọn 1 viên đánh số khác A chọn có $10 - 3 = 7$ cách.

Do vậy theo quy tắc nhân TH2 có: $C_{10}^3 \cdot C_3^2 \cdot 7$ cách.

Khi đó $n_X = C_{10}^3 + C_{10}^3 \cdot C_3^2 \cdot 7$ cách nên xác suất cần tìm là $P(X) = \frac{n_X}{n_\Omega} = \frac{11}{60}$.

Vậy $a = 11, b = 60 \Rightarrow a^2 + b^2 = 3721$.

Bài 48. Một hồ nước được hình thành giữa một lớp đất đá, hồ có độ sâu lớn nhất bằng 6 mét và chiều dài lớn nhất theo phương ngang là 9 mét. Trên hệ toạ độ Oxy, đơn vị trên mỗi trục tính bằng mét, đường ranh giới giữa hồ nước và lớp đất được mô hình hoá qua hàm số $f(x) = ax^3 - bx^2$ $(a, b \in \mathbb{R})$, trong đó hai bên bờ là điểm $H(0;0)$ và $P(9;0)$ (tham khảo như hình vẽ). Các nhà khoa học cần đặt một camera tại điểm $Q(0;h)$ để ghi lại hình ảnh của hồ nước. Nhà khoa học cần đặt vị trí camera cách điểm H một khoảng tối thiểu bằng bao nhiêu mét để có thể ghi lại hình ảnh toàn bộ hồ nước khi cạn?



✍ *Hướng dẫn giải.* Để nhìn được toàn bộ hồ thì Q phải nằm trên tiếp tuyến tại điểm có độ dốc (hệ số góc) lớn nhất. Và với hàm số bậc ba, điểm mà cho tiếp tuyến có hệ số góc lớn nhất là điểm uốn.

◈ Bước 1: Tìm các hệ số a, b để viết phương trình hàm số $f(x)$.

Ta có $f(x) = ax^3 - bx^2 = ax^2\left(x - \dfrac{b}{a}\right)$.

Vì $P(9;0)$ thuộc vào đồ thị hàm số $f(x)$ nên:

$f(9) = 0 \Leftrightarrow a \cdot 9^2\left(9 - \dfrac{b}{a}\right) = 0 \Leftrightarrow 9 - \dfrac{b}{a} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{b}{a} = 9.$

Suy ra $f(x) = ax^2(x-9)$.

Tiếp đến, ta sẽ dựa vào dữ kiện: "hồ có độ sâu lớn nhất bằng 6 mét" tức $y_{CT} = \min_{[0;9]} f(x) = -6$ để xác định hệ số a, b.

Ta có $f'(x) = a(3x^2 - 18x) = a \cdot 3x(x-6)$;

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x - 6 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 6 \end{array}\right.$.

Suy ra $y_{CT} = \min_{[0;9]} f(6) = -6 \Leftrightarrow a \cdot 6^2(6-9) = -6 \Leftrightarrow a = \dfrac{-6}{6^2(6-9)} = \dfrac{1}{18}$.

$\Rightarrow f(x) = \dfrac{1}{18}x^2(x-9) = \dfrac{1}{18}(x^3 - 9x^2)$.

◈ Bước 2: Tìm vị trí đặt camera cách điểm H một khoảng tối thiểu.

Ta có $f''(x) = \dfrac{1}{18} \cdot (6x - 18)$.

Điểm uốn của hàm số là $x = x_0$ thỏa mãn: $f''(x_0) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{18} \cdot (6x_0 - 18) = 0 \Leftrightarrow x = x_0 = 3$.

Phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x_0 = 3$ là: $y = f'(3)(x-3) + f(3)$

$\Leftrightarrow y = -\dfrac{3}{2}(x-3) - 3 \quad \left(\text{với } f'(3) = -\dfrac{3}{2}; f(3) = -3\right)$

$\Leftrightarrow y = -\dfrac{3}{2}x + \dfrac{9}{2} - 3 = -\dfrac{3}{2}x + \dfrac{3}{2} \quad (d)$

Vì $Q(0;h) \in d$ nên: $h = -\dfrac{3}{2} \cdot 0 + \dfrac{3}{2} = \dfrac{3}{2} = 1,5$ (m).

Bài 49. Một công ty công nghệ sản xuất một loại sản phẩm mới. Công ty xác định rằng lợi nhuận $L(x)$ (đơn vị: triệu VNĐ) thu được từ việc sản xuất và bán hàng được mô hình hóa bởi hàm số: $L(x) = 1500 + 400\ln\left(\frac{x}{1200}\right) - x$. Trong đó, x là số sản phẩm tồn kho, với $x \in \mathbb{N}$ và $1 \le x \le 1200$. Công ty cần tính toán lượng tồn kho để thu về lợi nhuận tối đa, hỏi lợi nhuận tối đa đó là bao nhiêu triệu đồng (*kết quả làm tròn đến hàng đơn vị*).

Hướng dẫn giải. Xét hàm số lợi nhuận $L(x) = 1500 + 400\ln\left(\frac{x}{1200}\right) - x$ trên đoạn $[1; 1200]$.

Ta có đạo hàm:

$$L'(x) = 400 \cdot \frac{\left(\frac{x}{1200}\right)'}{\frac{x}{1200}} - 1 = 400 \cdot \frac{\frac{1}{1200}}{\frac{x}{1200}} - 1 = \frac{400}{x} - 1$$

Cho $L'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{400}{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 400$ (thỏa mãn điều kiện $1 \le x \le 1200$).

Bảng biến thiên hoặc đánh giá: - Với $1 \le x < 400$, $L'(x) > 0$ nên hàm số đồng biến. - Với $400 < x \le 1200$, $L'(x) < 0$ nên hàm số nghịch biến.

Do đó, hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x = 400$. Giá trị lợi nhuận tối đa là:

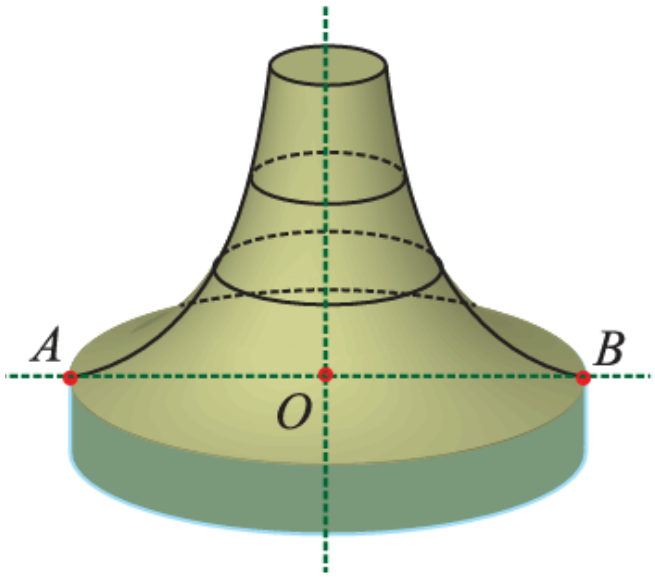
$$L(400) = 1500 + 400\ln\left(\frac{400}{1200}\right) - 400 = 1100 + 400\ln\left(\frac{1}{3}\right) = 1100 - 400\ln 3$$

Tính toán giá trị xấp xỉ:

$$L(400) \approx 1100 - 400 \cdot 1,0986 \approx 1100 - 439,44 \approx 660,56$$

Làm tròn đến hàng đơn vị, ta được kết quả là 661 triệu đồng.

Bài 50. Một chiếc lều xiếc khối tròn xoay có hình dạng như hình bên. Lều gồm có hai phần, phần hình trụ ở dưới có đường kính đáy bằng 20 mét, chiều cao bằng 3 mét, phần trên là một khối tròn xoay khác tiếp giáp với phần hình trụ có chiều cao là 10 mét, trên đỉnh là lỗ tròn có đường kính 4 mét để lấy ánh sáng. Trong hệ tọa độ Oxy, đường cong biên của mái lều được mô hình hóa bằng một parabol đỉnh B (tham khảo hình vẽ). Tính thể tích của chiếc lều theo đơn vị mét khối (*làm tròn kết quả đến hàng đơn vị*).



Hướng dẫn giải. Công thức thể tích hình trụ: $V = B \cdot h$ với B là diện tích đáy và h là chiều

cao của hình trụ.
Thể tích phần trụ là $V_1 = \pi \cdot 10^2 \cdot 3 = 300\pi$ (m^3).

Gọi $f(y)$ là parabol biểu diễn đường cong biên của mái lều.

Khi đó phần trên của lều là khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi parabol $f(y)$, $x = 0$ và các đường thẳng $y = 10$, $y = 0$ quanh trục Oy.

Suy ra thể tích phần khối tròn xoay ở trên là

$$V_2 = \pi \int_0^{10} f^2(y)\, dy.$$

Dữ kiện bài toán cho parabol đi qua điểm $C(2;10)$ và đỉnh $B(10;0)$.

Công thức nhanh: Parabol có đỉnh $I(x_0;y_0)$ có dạng $y = a(x-x_0)^2 + y_0$.

Suy ra phương trình parabol có dạng $y = a(x-10)^2$.

Mà $y(2) = 10$ nên $10 = a(2-10)^2$

$\Rightarrow a = \frac{10}{(2-10)^2} = \frac{5}{32}$.

Suy ra $y = \frac{5}{32}(x-10)^2$

$\Rightarrow \frac{32y}{5} = (x-10)^2$

$\Rightarrow x - 10 = -\sqrt{\frac{32y}{5}}$ (vì quan sát trên hình vẽ, ta thấy $x \le 10$ nên $x - 10 \le 0$)

$\Rightarrow x = f(y) = 10 - \sqrt{\frac{32y}{5}}$.

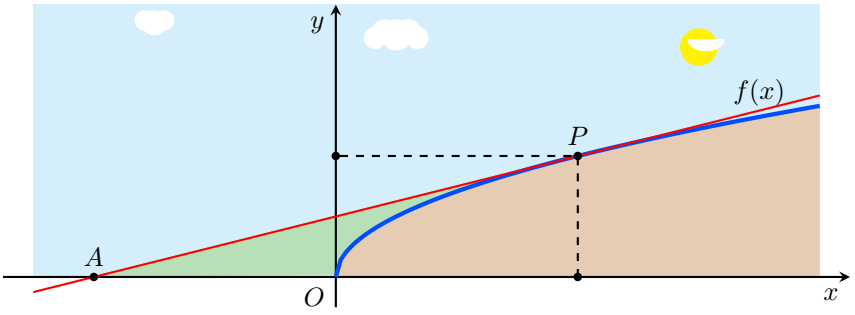
Vậy thể tích khối tròn xoay là

$$V_2 = \pi \int_0^{10} \left(10 - \sqrt{\frac{32y}{5}}\right)^2 dy$$

Suy ra thể tích của chiếc lều bằng $V_1 + V_2 = 300\pi + \pi \int_0^{10} \left(10 - \sqrt{\frac{32y}{5}}\right)^2 dy \approx 1738$ (m^3).

Vậy thể tích của chiếc lều bằng 1738 mét khối.

Bài 51. Trong hệ trục toạ độ Oxy, đơn vị mỗi trục là 10 mét, đường cong của một con dốc được mô hình hoá bằng đồ thị hàm số $f(x) = \sqrt{x}$. Người ta thiết kế một con đường thẳng tiếp xúc với đồ thị hàm số tại điểm P và cắt trục Ox tại điểm A (như hình vẽ). Biết rằng đoạn đường AP có độ dài bằng 80 mét. Hỏi điểm P cách mặt đất bao nhiêu mét (coi rằng trục Ox nằm trên mặt đất) (*viết kết quả làm tròn đến hàng phần mười của mét*)?



Hướng dẫn giải. Giả sử $P(x_0; \sqrt{x_0})$ $(x_0 > 0)$ thuộc vào đồ thị hàm số $f(x) = \sqrt{x}$.
Đường thẳng AP là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x)$ nên có phương trình là

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x - x_0) + \sqrt{x_0}$$

Điểm $A(a;0) \in AP$ nên ta có

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\sqrt{x_0}}(a - x_0) + \sqrt{x_0} = 0\\
\Leftrightarrow &\frac{1}{2\sqrt{x_0}}(a - x_0) = -\sqrt{x_0}\\
\Leftrightarrow &a - x_0 = -\sqrt{x_0} \cdot 2\sqrt{x_0}\\
\Leftrightarrow &a - x_0 = -2x_0 \Leftrightarrow a = -x_0.
\end{aligned}$$

Suy ra $A(-x_0;0)$.

Vì trên thực tế quãng đường AP bằng 80 mét và đơn vị mỗi trục là 10 mét nên trên hệ trục tọa độ Oxy đoạn thẳng $AP = 8$ (đơn vị).

$$\begin{aligned}
&AP = 8\\
\Leftrightarrow &\sqrt{(x_0 + x_0)^2 + (\sqrt{x_0})^2} = 8\\
\Leftrightarrow &\sqrt{(2x_0)^2 + x_0} = 8\\
\Leftrightarrow &\sqrt{4x_0^2 + x_0} = 8\\
\Leftrightarrow &4x_0^2 + x_0 = 64\\
\Leftrightarrow &x_0 = \frac{-1 + 5\sqrt{41}}{8} \text{ (vì } x > 0)
\end{aligned}$$

Suy ra khoảng cách từ P đến mặt đất bằng

$$10 \cdot \sqrt{x_0} = 10 \cdot \sqrt{\frac{-1 + 5\sqrt{41}}{8}} \approx 19,7 \text{ (m)}.$$

Bài 52. Trong hệ toạ độ $Oxyz$, đơn vị trên mỗi trục tính bằng kilomet, sân bay nằm trên mặt phẳng (Oxy). Tại thời điểm ban đầu, máy bay X bay thẳng từ điểm $A(-8;3;2)$ với tốc độ 360 km/h, máy bay Y bay từ điểm C theo hướng $\vec{v}_1 = (-2;2;-1)$. Sau t giờ, máy bay X bay đến điểm $B(-4;-1;4)$ còn máy bay Y bay đến điểm $D(10;-10;5)$. Khi đến D, máy bay Y được tháp kiểm soát yêu cầu bay tiếp theo hướng $\vec{v}_2(-5;4;-1)$ và phải hạ cánh sau đúng 10 phút. Tính tốc độ trung bình của máy bay Y từ thời điểm ban đầu cho đến khi tiếp đất theo đơn vị km/h (*làm tròn kết quả đến hàng đơn vị*).

Hướng dẫn giải. Ta có thời gian máy bay X bay từ A đến B là

$t = \frac{AB}{360} = \frac{\sqrt{(-4-(-8))^2+(-1-3)^2+(4-2)^2}}{360} = \frac{1}{60}$ (giờ).

Gọi $C(a;b;0)$ (vì C nằm trên mặt đất nên cao độ bằng 0). $\Rightarrow \overrightarrow{CD} = (10-a;-10-b;5)$.

Từ giả thiết: "Máy bay Y bay từ C đến D theo phương $\vec{v}_1 = (-2;2;-1)$" nên $\overrightarrow{CD}$ cùng phương với $\vec{v}_1 = (-2;2;-1)$.

$$\Rightarrow \frac{10-a}{-2} = \frac{-10-b}{2} = \frac{5}{-1} \Rightarrow \begin{cases} 10 - a = (-5)\cdot(-2) \\ -10 - b = (-5)\cdot 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10 - a = 10 \\ -10 - b = -10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}.$$

Suy ra $\overrightarrow{CD} = (10;-10;5)$

Suy ra $CD = \sqrt{10^2 + (-10)^2 + 5^2} = 15$.

Ta thực hiện tương tự để tính DE:

Gọi $E(c;d;0)$ thuộc mặt đất là vị trí mà máy bay Y hạ cánh.

Suy ra $\overrightarrow{DE}=(c-10;d+10;-5)$.

Vì máy bay Y bay từ D đến E theo hướng $\vec{v}_2(-5;4;-1)$ nên $\overrightarrow{DE}$ và $\vec{v}_2$ cùng phương $\Rightarrow \frac{c-10}{-5}=\frac{d+10}{4}=\frac{-5}{-1}$

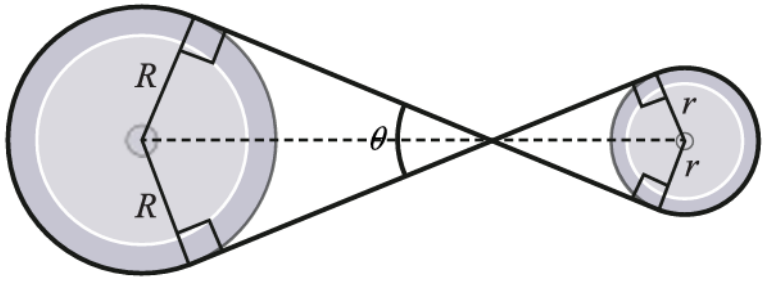
$$\Rightarrow \begin{cases} c-10=5\cdot(-5) \\ d+10=5\cdot 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=5\cdot(-5)+10=-15 \\ d=5\cdot 4-10=10 \end{cases}$$

$\Rightarrow \overrightarrow{DE}=(-25;20;-5)$

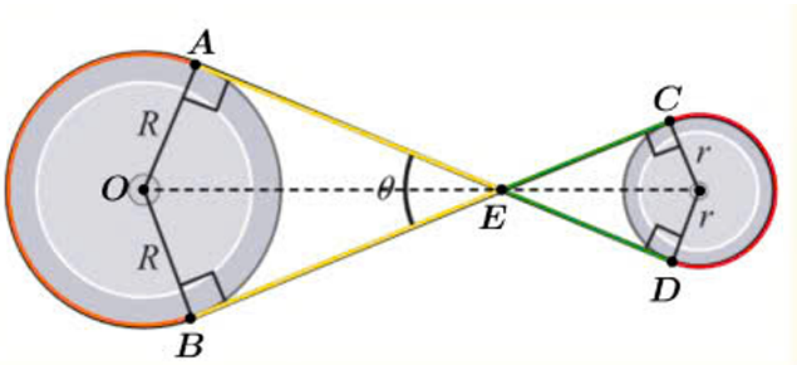
$\Rightarrow DE=\sqrt{(-25)^2+20^2+(-5)^2}=5\sqrt{42}$.

Suy ra tốc độ trung bình của máy bay Y từ thời điểm ban đầu cho đến khi tiếp đất là $v_{tb}=\frac{CD+DE}{t+\frac{1}{6}}=\frac{15+5\sqrt{42}}{\frac{1}{60}+\frac{1}{6}}\approx 259$ (km/h)

Bài 53. Một dây curoa mỏng dài L bao quanh hai ròng rọc có bán kính R và r vắt chéo nhau theo một góc θ (xem hình vẽ). Giả sử $R=74$ cm; $r=37$ cm và góc $\theta=60°$. Tính độ dài dây curoa L (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị của cm).



Hướng dẫn giải. Ta kí hiệu các điểm như hình vẽ



Từ hình vẽ ta thấy được độ dài dây curoa L bằng $\overset{\frown}{AB}+AE+BE+EC+ED+\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{CD}+2AE+2EC$ (vì $AE=BE;EC=ED$)

Ta sẽ đi tính lần lượt $\overset{\frown}{AB},\overset{\frown}{CD},AE,EC$.

Xét tứ giác $AOBE$, ta có $\widehat{AOB}+90°+90°+60°=360°\Rightarrow \widehat{AOB}=360°-90°-90°-60°=120°$.

Lại có sđ $\overset{\frown}{AB}+\widehat{AOB}=360°$ Suy ra sđ $\overset{\frown}{AB}=360°-\widehat{AOB}=360°-120°=240°=\frac{240\cdot\pi}{180}=\frac{4\pi}{3}$ (rad)

Áp dụng công thức tính độ dài cung AB là $l=$ sđ $\overset{\frown}{AB}\cdot R$, với sđ $\overset{\frown}{AB}$ (rad) là góc ở tâm và R là bán kính của cung tròn.

Suy ra $\overset{\frown}{AB} = \frac{4\pi}{3} \cdot 74 = \frac{296\pi}{3}$.

Tương tự, ta tính được sđ $\overset{\frown}{CD} = \frac{4\pi}{3}$ (rad) và suy ra $\overset{\frown}{CD} = \frac{4\pi}{3} \cdot 37 = \frac{148\pi}{3}$.

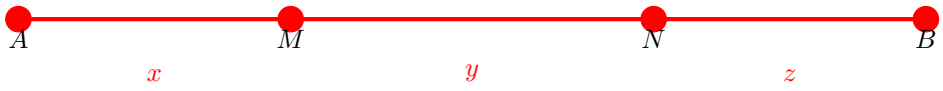
Trong tam giác vuông AEO, ta có

$\tan \overset{\frown}{AEO} = \frac{AO}{AE} \Rightarrow AE = \frac{AO}{\tan \overset{\frown}{AEO}} = \frac{R}{\tan \frac{\theta}{2}} = \frac{74}{\tan \frac{60^\circ}{2}} = \frac{74}{\tan 30^\circ} = 74\sqrt{3}$.

Tương tự, ta cũng tính được $CE = \frac{r}{\tan 30^\circ} = \frac{37}{\tan 30^\circ} = 37\sqrt{3}$.

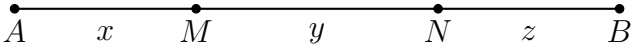
Vậy độ dài dây curoa L bằng $\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD} + 2AE + 2EC = \frac{296\pi}{3} + \frac{148\pi}{3} + 2 \cdot 74\sqrt{3} + 2 \cdot 37\sqrt{3} \approx 849$ (cm).

Bài 54. Cho một thanh sắt mỏng AB dài 21 cm. Trên AB lấy hai điểm M, N phân biệt làm mốc sao cho $AM = x$ (cm), $MN = y$ (cm), $NB = z$ (cm) đồng thời x, y, z là các số nguyên dương (tham khảo hình vẽ). Xác suất để khi gập thanh sắt tại hai điểm mốc M, N thì đầu A có thể chạm vào đầu B là $\frac{a}{b}$ (với $a, b \in \mathbb{N}$ và phân số $\frac{a}{b}$ tối giản). Tính $a + b$.



Hướng dẫn giải. Ta sẽ sử dụng phương pháp chia kẹo Euler

Không gian mẫu của bài toán là $n(\Omega) = C_{20}^2$ (lấy ngẫu nhiên 2 trong 20 điểm).
Giả sử gập thanh sắt tại hai điểm mốc M, N thì đầu A có thể chạm vào đầu B.
Khi đó thanh sắt được chia làm 3 đoạn như hình vẽ:

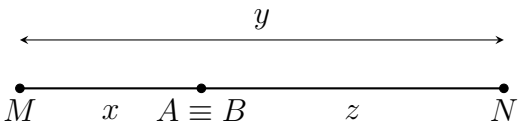


Với $\begin{cases} x, y, z \in \mathbb{N}^* \\ x + y + z = 21 \end{cases}$.

Gọi H là biến cố "Khi gập thanh sắt tại hai điểm mốc M, N thì đầu A có thể chạm đầu B".
Khi đó, có 2 TH xảy ra:

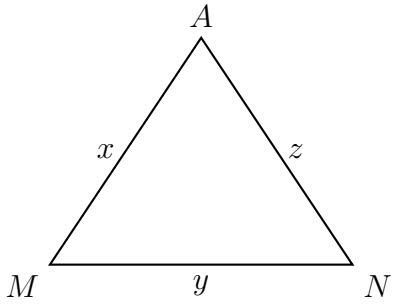
TH1: Điểm $\begin{cases} A \equiv B \\ A \in MN, B \in MN \end{cases}$.

Minh họa như hình vẽ:



Khi đó $\begin{cases} x + z = y \\ x + y + z = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = y \\ 2y = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = y \\ y = \dfrac{21}{2} = 10,5 \notin \mathbb{N}^* \text{ (L)} \end{cases}$.

TH2: $A \equiv B$ và AMN tạo thành hình tam giác. Minh họa như hình vẽ:



Theo bất đẳng thức tam giác ta có:

$$\begin{cases} x+y>z \\ x+z>y \\ y+z>x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z>z+z \\ x+z+y>y+y \\ y+z+x>x+x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 21>2z \\ 21>2y \\ 21>2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z<10,5 \\ y<10,5 \\ x<10,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z<11 \\ y<11 \\ x<11 \end{cases}$$

Khi đó $n(H)$ là tập hợp các bộ ba (x,y,z) thỏa mãn các điều kiện $\begin{cases} x+y+z=21 \\ x,y,z\in(0;11) \\ x,y,z\in\mathbb{N}^* \end{cases}$.

Đặt $\begin{cases} a=11-x \\ b=11-y \\ c=11-z \end{cases} \Rightarrow a,b,c\in\mathbb{N}^*$.

Cộng vế với vế của hệ phương trình trên, ta được $a+b+c=33-(x+y+z)=33-21=12$.

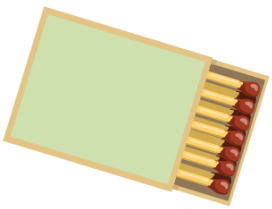
Khi đó mỗi bộ số (a,b,c) thỏa mãn $\begin{cases} a,b,c\in\mathbb{N}^* \\ a+b+c=12 \end{cases}$ tương ứng với một bộ số (x,y,z) thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Áp dụng bài toán chia kẹo Euler, ta có $n(H)=C_{11}^2$.

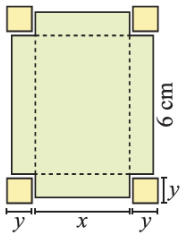
Suy ra xác suất xảy ra biến cố H là $P(H)=\dfrac{C_{11}^2}{C_{20}^2}=\dfrac{11}{38}$.

$$\Rightarrow \begin{cases} a=11 \\ b=38 \end{cases} \Rightarrow a+b=49.$$

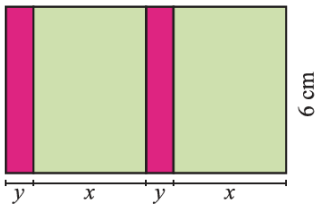
Bài 55. Người ta cần sản xuất một hộp diêm có chiều dài 6 cm và có thể tích 24 cm^3 (hình 1). Chiều rộng x (cm) và chiều cao y (cm) cần được xác định sao cho chi phí sản xuất là nhỏ nhất. Hộp bên trong được làm từ một tấm bìa hình chữ nhật. Ở các góc, các mảnh vuông nhỏ cạnh y bị cắt bỏ và trở thành phế thải. Phần còn lại được gấp thành hộp với kích thước dài 6 cm, rộng x, cao y (hình 2). Vỏ ngoài được làm từ một tấm bìa hình chữ nhật thứ hai (với kích thước như hình 3). Biết rằng chi phí vật liệu cho hai mặt bên của vỏ (được dùng làm phần đánh lửa) được tính gấp ba lần chi phí vật liệu còn lại (tính trên cùng một đơn vị diện tích).



Hình 1



Hình 2



Hình 3

Tìm x (cm) để chi phí làm hộp diêm là bé nhất (*kết quả làm tròn đến hàng phần trăm*).

✍ *Hướng dẫn giải.* Thể tích của hộp diêm là $V=x\cdot y\cdot 6=24\Leftrightarrow x\cdot y=4\Leftrightarrow x=\dfrac{4}{y}$.

Giả sử chi phí vật liệu cho các mặt (trừ hai mặt dùng để đánh lửa) là T đồng trên mỗi cm^2. Khi đó chi phí vật liệu cho phần dùng để đánh lửa là $3T$ đồng trên mỗi cm^2.

Suy ra tổng chi phí làm hộp diêm là

$$\begin{aligned} F &= [(x+2y)(6+2y)+2\cdot 6\cdot x]T + 2\cdot y\cdot 6\cdot 3T \\ &= (6x+2xy+12y+4y^2+12x)T + 36y\cdot T \\ &= \left(6\cdot\frac{4}{y}+2\cdot 4+12y+4y^2+12\cdot\frac{4}{y}\right)T + 36y\cdot T \end{aligned}$$

(thay $xy=4, x=\dfrac{4}{y}$)

$$= T\left(\frac{24}{y}+8+12y+4y^2+\frac{48}{y}+36y\right)$$

(đặt T làm nhân tử chung)

$$= T\left(4y^2+48y+\frac{72}{y}+8\right)$$

Vì số tiền T là không thay đổi nên để tổng chi phí là thấp nhất khi và chỉ khi $4y^2+48y+\dfrac{72}{y}+8$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Đến đây, bài toán lại đưa về dạng toán quen thuộc là tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(y)=4y^2+48y+\dfrac{72}{y}+8$ trên tập xác định.

Xét hàm số

$$f(y)=4y^2+48y+\frac{72}{y}+8 \text{ trên khoảng } (0;+\infty)$$

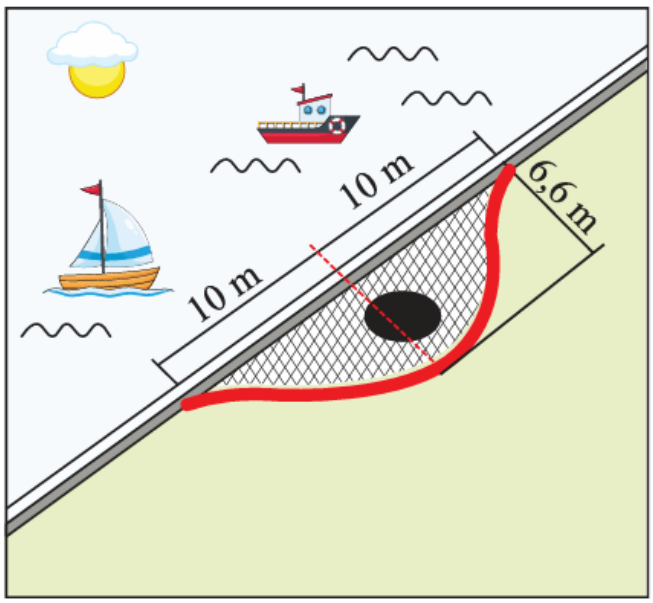
Ta có $f'(y)=8y+48-\dfrac{72}{y^2}=0 \Leftrightarrow 8y^3+48y^2-72=0$ (nhân cả hai vế với y^2) $\Leftrightarrow y\approx 1,12398$.

Bảng biến thiên

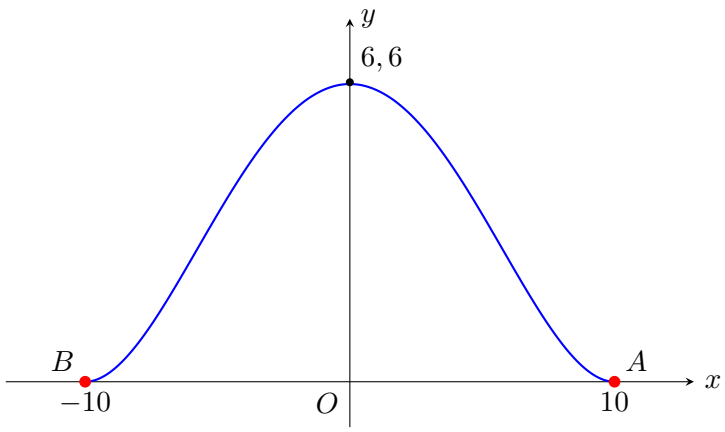
y	0		$1,12398$		$+\infty$
$f'(y)$		$-$	0	$+$	
$f(y)$	$\searrow$				$\nearrow$
			$f(1,12398)$		

Từ bảng biến thiên suy ra giá trị nhỏ nhất của $f(y)$ xảy ra tại $y\approx 1,12398 \Rightarrow x=\dfrac{4}{y}\approx 3,56$.

Bài 56. Một đoạn đường di chuyển từ A đến B dài 20 mét chạy dọc theo bờ sông, do ảnh hưởng của nước lũ nên tuyến đường bị ảnh hưởng không thể đảm bảo để người dân đi lại. Các kỹ sư xây một đoạn đường mới rộng 60 cm thay thế đoạn đường cũ. Trên đoạn đường mới này, điểm có khoảng cách lớn nhất đến bờ sông là 6,6 mét. Trong hệ toạ độ Oxy, đơn vị trên mỗi trục tính bằng mét, trục Ox là đường bờ sông, mép trong đoạn đường (phần gần bờ sông) được mô hình hóa dưới dạng đồ thị hàm số đa thức bậc bốn tiếp xúc với đường bờ sông ở hai đầu A và B (tham khảo hình vẽ). Các kỹ sư sẽ đánh dấu phần ranh giới nằm giữa bờ sông và mép trong tuyến đường mới, sau đó lát lại bằng bê tông. Diện tích phần lát lại bằng bao nhiêu mét vuông?



✍ *Hướng dẫn giải.*



Đặt hệ trục tọa độ Oxy sao cho Ox trùng với bờ sông, Oy vuông góc và đi qua trung điểm của đoạn AB. Khi đó $A(10;0)$, $B(-10;0)$.

Diện tích phần lát lại (phần gạch chéo) là phần diện tích được giới hạn bởi đồ thị hàm số đa thức bậc bốn $f(x)$ với trục Ox và hai đường thẳng $x=10$; $x=-10$.

Khi đó diện tích phần lát bằng $\int_{-10}^{10} f(x)\,dx$.

Vì đồ thị hàm số đa thức bậc bốn tiếp xúc với trục Ox tại hai điểm $A(10;0)$, $B(-10;0)$ nên $f(x)=0$ có đúng hai nghiệm $\begin{cases} x=10 \\ x=-10 \end{cases}$ và hai nghiệm này là hai nghiệm kép. Suy ra $f(x)$ có dạng

$$\begin{aligned} f(x) &= a(x+10)^2(x-10)^2 \\ &= a[(x+10)(x-10)]^2 \\ &= a(x^2-100)^2 \\ &= a(x^4-2\cdot 100\cdot x^2+100^2) \\ &= a(x^4-200x^2+10000) \end{aligned}$$

Từ giả thiết: "đoạn đường mới rộng 60 cm... Điểm có khoảng cách lớn nhất đến bờ sông là

$6,6$ mét" ta suy ra khoảng cách lớn nhất từ bờ sông đến mép đường gần bờ sông hơn là giá trị cực đại của hàm số $f(x)$ và giá trị cực đại là $6,6-0,6=6$ đạt tại $x\in(-10;10)$.

Ta có $f'(x)=a(4x^3-200\cdot 2x)=a\cdot 4x(x^2-100)$
$f'(x)=0\Leftrightarrow x=0$ (vì $x\in(-10;10)$)

Suy ra giá trị cực đại của hàm số đạt tại $x=0$ và ta có $f(0)=6$
$\Leftrightarrow a(0^4-200\cdot 0^2+10000)=6$
$\Leftrightarrow 10000a=6\Leftrightarrow a=\frac{6}{10000}$.

Suy ra

$$f(x)=\frac{6}{10000}(x^4-200x^2+10000).$$

Vậy diện tích của phần đường cần lát lại bằng:

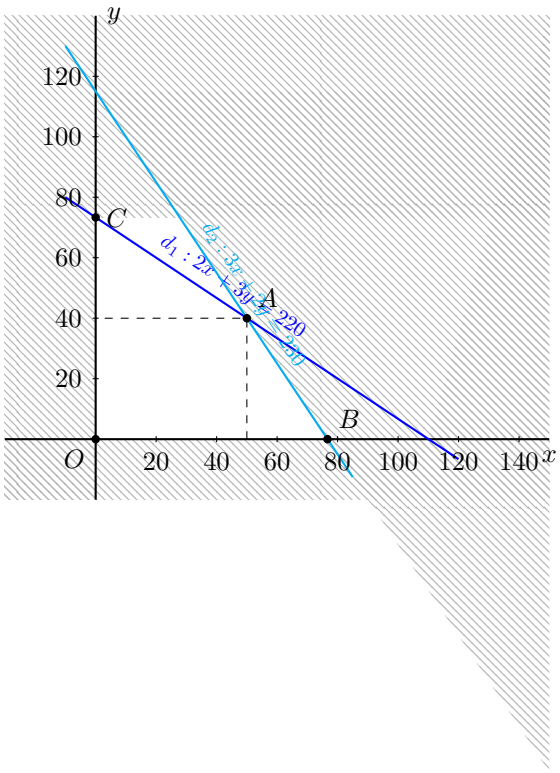
$$\begin{aligned}S&=\int_{-10}^{10}f(x)\,dx\\&=\int_{-10}^{10}\frac{6}{10000}(x^4-200x^2+10000)\,dx\\&=\frac{12}{10000}\int_{0}^{10}(x^4-200x^2+10000)\,dx\\&=\frac{12}{10000}\left[\frac{x^5}{5}-\frac{200x^3}{3}+10000x\right]_0^{10}\\&=\frac{12}{10000}\left(\frac{100000}{5}-\frac{200000}{3}+100000\right)\\&=\frac{12}{10000}\left(120000-\frac{200000}{3}\right)\\&=\frac{12}{10000}\cdot\frac{160000}{3}=64\ (\text{m}^2).\end{aligned}$$

Bài 57. Một xưởng sản xuất nước mắm, mỗi lít nước mắm loại I cần 3 kg cá và 2 giờ công lao động, đem lại mức lãi là 50 000 đồng; mỗi lít nước mắm loại II cần 2 kg cá và 3 giờ công lao động, đem lại mức lãi là 40 000 đồng. Xưởng có không quá 230 kg cá và thời gian làm việc tối đa 220 giờ. Biết rằng xưởng đó sản xuất a (lít) nước mắm loại I và b (lít) nước mắm loại II thì thu được lợi nhuận lớn nhất. Tính $a+b$.

Hướng dẫn giải. Gọi x,y lần lượt là số lít nước mắm loại I, II xưởng đó sản xuất. Theo đề bài ta có hệ bất phương trình sau:

$$\begin{cases}x\geq 0\\y\geq 0\\3x+2y\leq 230\\2x+3y\leq 220\end{cases}$$

Miền nghiệm trong hệ phương trình được biểu diễn là miền không bị gạch trong hình sau:



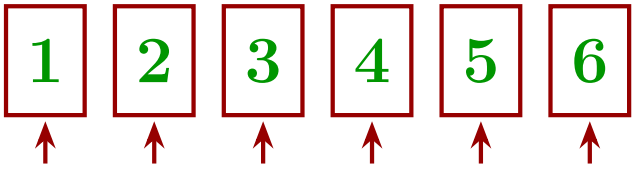
Như vậy chúng ta có bài toán tìm giá trị lớn nhất của hàm $F = 50000x + 40000y$ với x, y thỏa mãn hệ bất phương trình trên.

Do đó chúng ta xét giá trị của $F = 50000x + 40000y$ tại các đỉnh O, A, B, C và suy ra giá trị lớn nhất của F là 4 100 000 đồng tại $A(50; 40)$.

Vậy để thu được lãi nhiều nhất thì xưởng đó nên sản xuất 50 lít nước mắm loại I và 40 lít nước mắm loại II.

Yêu cầu bài toán ta tìm được $a = 50, b = 40 \Rightarrow a + b = 90$

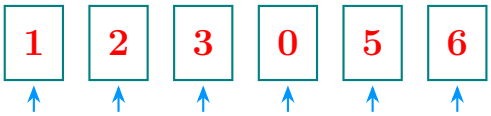
Bài 58. Có sáu tấm thẻ, mỗi tấm có một số tự nhiên từ 1 đến 6 được viết trên mặt trước và số 0 được viết trên mặt sau. Sáu tấm thẻ này được sắp xếp sao cho với mỗi số tự nhiên $k \leq 6$, vị trí thứ k hiển thị số tự nhiên k (tham khảo hình vẽ).



Sử dụng sáu tấm thẻ này và một con xúc xắc, thực hiện các bước sau: Gieo xúc xắc một lần, nếu số chấm xuất hiện ở mặt trên xúc xắc là k, thì ta lật tấm thẻ ở vị trí thứ k một lần và đặt lại vào vị trí ban đầu. Sau khi lặp lại thí nghiệm trên 3 lần, nếu biết tổng các số xuất hiện trên cả 6 thẻ là số chẵn, xác suất để số 1 xuất hiện đúng một lần khi gieo xúc xắc là $\dfrac{a}{b}$ (với a và b là các số nguyên dương và phân số $\dfrac{a}{b}$ tối giản). Tính giá trị của $a + b$.

Hướng dẫn giải. Minh họa thí nghiệm: Ví dụ khi thực hiện thí nghiệm 1 lần: Con xúc xắc gieo được số 4 ta thực hiện lật lá bài ở vị trí số 4 và đặt lại vị trí cũ lúc này số xuất hiện trên 6 lá bài

như hình vẽ sau:



Tổng trên 6 tấm thẻ lúc này là $T = 1+2+3+0+5+6 = 17$ là một số lẻ.
Và sau khi ta thực hiện thí nghiệm này liên tiếp 3 lần thì được kết quả tổng trên 6 tấm thẻ là số chẵn.

Gọi A là biến cố "Tổng các số xuất hiện trên cả 6 thẻ là số chẵn".

B là biến cố "Số 1 xuất hiện đúng 1 lần".

Yêu cầu bài toán: Tính xác suất để số 1 xuất hiện đúng một lần khi gieo xúc xắc, biết tổng các số xuất hiện trên cả 6 thẻ là số chẵn $\Leftrightarrow P(B|A) = \dfrac{P(AB)}{P(A)}$ (theo công thức xác suất điều kiện).

Nhận thấy khi số mặt xuất hiện trên xúc xắc là số chẵn thì tổng trên 6 tấm thẻ không thay đổi tính chẵn lẻ (vì khi lật một số chẵn thì ta vẫn được một số chẵn, do đó không làm thay đổi tính chẵn lẻ của tổng 6 tấm thẻ);

Khi số mặt xuất hiện trên xúc xắc là số lẻ thì tổng trên 6 tấm thẻ sẽ thay đổi tính chẵn lẻ (vì khi lật một số lẻ (vị trí lẻ) thì ta được một số chẵn và ngược lại, do đó làm thay đổi tính chẵn lẻ của tổng 6 tấm thẻ).

Vậy để sau khi thực hiện lật thẻ 3 lần và được tổng trên 6 tấm thẻ là số chẵn thì có 2 trường hợp xảy ra:

- TH1: Thay đổi tính chẵn lẻ đúng 3 lần (tức 3 lần thí nghiệm gieo xúc xắc xuất hiện 3 mặt lẻ).
- TH2: Thay đổi tính chẵn lẻ đúng 1 lần (tức 3 lần thí nghiệm gieo xúc xắc có 2 lần xuất hiện mặt chẵn và 1 lần xuất hiện mặt lẻ): LCC; CLC; CCL.

Ta đi tiến hành giải từng trường hợp.

- Thay đổi tính chẵn lẻ đúng 3 lần

  Ta có xác suất để gieo được số lẻ là $\dfrac{C_3^1}{C_6^1} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$.

  Suy ra xác suất cả 3 lần đều lẻ là $P(A_1) = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{8}$.

  Suy ra xác suất cả 3 lần đều lẻ là

  $$P(A_1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8}.$$

  Xác suất số 1 xuất hiện đúng một lần là

  $$\begin{aligned} P(A_1B_1) &= \frac{1}{6}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6} + \frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{6} + \frac{2}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{6} \\ &= \frac{1}{18} \text{ (vì số 1 có thể xuất hiện ở lần thí nghiệm thứ 1, 2, 3).} \end{aligned}$$

- TH2: Thay đổi tính chẵn lẻ đúng 1 lần.

  Xác suất để 3 lần gieo được LCC là

  $$P(A_2) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8}.$$ Xác suất số 1 xuất hiện đúng một lần là

$$P(A_2B_2) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{24}.$$

Xác suất để 3 lần gieo được CLC là

$P(A_3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$. Xác suất số 1 xuất hiện đúng một lần là

$$P(A_3B_3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{24}.$$

Xác suất để 3 lần gieo được CCL là

$P(A_4) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$. Xác suất số 1 xuất hiện đúng một lần là

$$P(A_4B_4) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{24}.$$

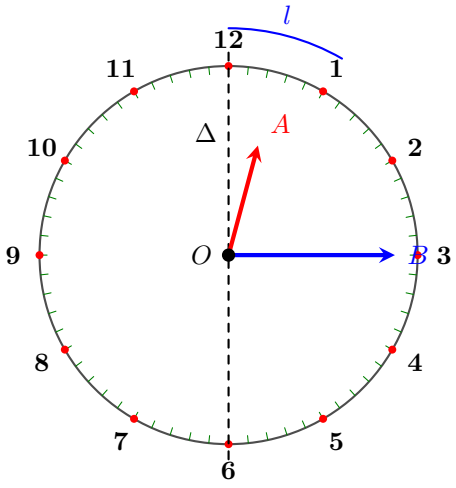
Khi đó xác suất cần tính là

$$\begin{aligned} P(B|A) &= \frac{P(AB)}{P(A)} \\ &= \frac{P(A_1B_1) + P(A_2B_2) + P(A_3B_3) + P(A_4B_4)}{P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4)} \\ &= \frac{\frac{1}{18} + \frac{1}{24} + \frac{1}{24} + \frac{1}{24}}{\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}} = \frac{13}{36} = \frac{a}{b}. \end{aligned}$$

$\Rightarrow a + b = 49$.

Bài 59. Ngày nay, để giúp xác định nhanh hàng thật hay giả 1 chiếc đồng hồ Rolex, ta dựa vào tốc độ góc thay đổi giữa các kim của đồng hồ (rad/phút). Chiếc đồng hồ Rolex được thẩm định có kích thước chuẩn (loại cho nam) ở kim giờ và kim phút lần lượt là 10 mm và 15 mm. Biết rằng góc giữa hai kim là hàm $\theta(t)$ với t là số phút thể hiện sau 12 giờ chiều (tức thời điểm hai kim trùng nhau chỉ vào số 12). Xác định thời điểm t đầu tiên mà diện tích tam giác OAB bằng $37,5$ mm^2? (Kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

Hướng dẫn giải.



Gọi $R_h = 10$ mm là độ dài kim giờ (OA) và $R_m = 15$ mm là độ dài kim phút (OB).

- Tốc độ góc của kim phút: $\omega_m = \dfrac{2\pi}{60} = \dfrac{\pi}{30}$ (rad/phút).
- Tốc độ góc của kim giờ: $\omega_h = \dfrac{2\pi}{12 \times 60} = \dfrac{\pi}{360}$ (rad/phút).

Góc giữa hai kim tại thời điểm t (phút) là:

$$\theta(t) = |(\omega_m - \omega_h)t| = \left|\left(\frac{\pi}{30} - \frac{\pi}{360}\right)t\right| = \frac{11\pi}{360}t \text{ (rad)}.$$

Diện tích tam giác OAB được tính theo công thức:

$$S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB \cdot \sin(\theta(t)) = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 15 \cdot \sin\left(\frac{11\pi}{360}t\right) = 75\sin\left(\frac{11\pi}{360}t\right).$$

Theo đề bài, ta cần tìm t đầu tiên sao cho $S_{\triangle OAB} = 37,5$:

$$75\sin\left(\frac{11\pi}{360}t\right) = 37,5 \iff \sin\left(\frac{11\pi}{360}t\right) = \frac{37,5}{75} = \frac{1}{2}.$$

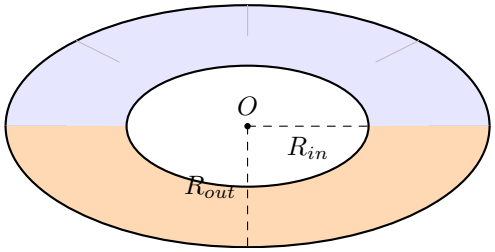
Thời điểm t đầu tiên ứng với góc nhỏ nhất:

$$\frac{11\pi}{360}t = \frac{\pi}{6} \implies t = \frac{360}{11 \cdot 6} = \frac{60}{11} \approx 5,4545...$$

Làm tròn đến hàng phần chục, ta được $t \approx 5,5$ phút.

~~Bài 60.~~ Một cơ sở sản xuất thiết bị cứu hộ chế tạo một chiếc phao cứu sinh như hình minh họa. Khi đó, theo mặt cắt qua tâm, người ta thấy, bán kính ngoài của phao bằng 35 cm, bán kính trong của phao bằng 25 cm. Phao được làm từ một loại vật liệu đồng chất, có khối lượng riêng bằng $0,05$ g/cm^3 (coi phao là khối đặc, không có khoang rỗng bên trong). Tính khối lượng của chiếc phao (đơn vị kg), biết kết quả làm tròn đến hàng phần trăm, số π nhận giá trị bằng $3,1416$.

Hướng dẫn giải.



Chiếc phao cứu sinh có hình dạng là một khối xuyến (torus). Gọi R là khoảng cách từ tâm phao đến tâm của mặt cắt ngang và r là bán kính của mặt cắt ngang đó.

- Bán kính ngoài: $R_{out} = R + r = 35$ cm.
- Bán kính trong: $R_{in} = R - r = 25$ cm.

Từ hệ phương trình trên, ta tính được các thông số của khối xuyến:

- $R = \dfrac{R_{out} + R_{in}}{2} = \dfrac{35 + 25}{2} = 30$ (cm).
- $r = \dfrac{R_{out} - R_{in}}{2} = \dfrac{35 - 25}{2} = 5$ (cm).

Thể tích của khối xuyến được tính theo công thức:

$$V = (2\pi R) \cdot (\pi r^2) = 2\pi^2 R r^2.$$

Thay các giá trị vào (với $\pi = 3,1416$):

$$V = 2 \cdot (3,1416)^2 \cdot 30 \cdot 5^2 = 1500 \cdot (3,1416)^2 \approx 14804,47584 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Khối lượng của chiếc phao là:

$$m = V \cdot d = 14804,47584 \cdot 0,05 = 740,223792 \text{ (g)}.$$

Đổi đơn vị sang kg:

$$m = \frac{740,223792}{1000} \approx 0,740223792 \text{ (kg)}.$$

Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm, ta được: $m \approx 0,74$ kg.

Bài 61. Có hai chuồng A và B. Chuồng A ban đầu có 9 con dê trắng và 8 con dê đen. Chuồng B ban đầu có 5 con dê trắng và 6 con dê đen. Các con dê được xem như nhau về kích thước và khả năng bị chọn. Người ta bắt ngẫu nhiên đồng thời 3 con dê từ chuồng A chuyển sang chuồng B. Sau đó, từ chuồng B bắt ngẫu nhiên 2 con dê ra kiểm tra. Biết rằng cả 2 con dê bắt ra đều là dê trắng. Hỏi xác suất để cả 2 con dê trắng đó đều là dê chuyển từ chuồng A sang là bao nhiêu phần trăm? (kết quả làm tròn đến 2 chữ số ở phần thập phân).

Hướng dẫn giải. Chuồng A có tổng cộng $9+8=17$ con dê. Chuồng B có $5+6=11$ con dê.
Gọi H_i là biến cố: "Có i con dê trắng được chuyển từ chuồng A sang chuồng B" với $i \in \{0,1,2,3\}$.
Số cách chọn 3 con dê từ chuồng A là $C_{17}^3 = 680$. Xác suất của các biến cố H_i là:

- $P(H_0) = \dfrac{C_9^0 \cdot C_8^3}{680} = \dfrac{56}{680}$.
- $P(H_1) = \dfrac{C_9^1 \cdot C_8^2}{680} = \dfrac{252}{680}$.
- $P(H_2) = \dfrac{C_9^2 \cdot C_8^1}{680} = \dfrac{288}{680}$.
- $P(H_3) = \dfrac{C_9^3 \cdot C_8^0}{680} = \dfrac{84}{680}$.

Gọi X là biến cố: "Cả 2 con dê bắt từ chuồng B đều là dê trắng".
Sau khi chuyển, chuồng B có $11+3=14$ con dê. Nếu biến cố H_i xảy ra, chuồng B có $5+i$ con dê trắng.
Số cách chọn 2 con dê từ chuồng B là $C_{14}^2 = 91$. Xác suất có điều kiện $P(X|H_i) = \dfrac{C_{5+i}^2}{91}$:

- $P(X|H_0) = \dfrac{10}{91}$; $P(X|H_1) = \dfrac{15}{91}$; $P(X|H_2) = \dfrac{21}{91}$; $P(X|H_3) = \dfrac{28}{91}$.

Xác suất để bắt được 2 con dê trắng là:

$$P(X) = \sum_{i=0}^{3} P(H_i)P(X|H_i) = \frac{56 \cdot 10 + 252 \cdot 15 + 288 \cdot 21 + 84 \cdot 28}{680 \cdot 91} = \frac{12740}{61880} = \frac{7}{34}.$$

Gọi M là biến cố: "Cả 2 con dê trắng đó đều là dê chuyển từ chuồng A sang".
Biến cố $M \cap X$ xảy ra khi 2 con dê trắng lấy ra nằm trong số i con dê trắng vừa chuyển từ A sang.
Xác suất $P(M \cap X) = \sum P(H_i) \cdot \dfrac{C_i^2}{91} = P(H_2) \cdot \dfrac{1}{91} + P(H_3) \cdot \dfrac{3}{91}$ (vì $i < 2$ thì $C_i^2 = 0$):

$$P(M \cap X) = \frac{288 \cdot 1 + 84 \cdot 3}{680 \cdot 91} = \frac{540}{61880}.$$

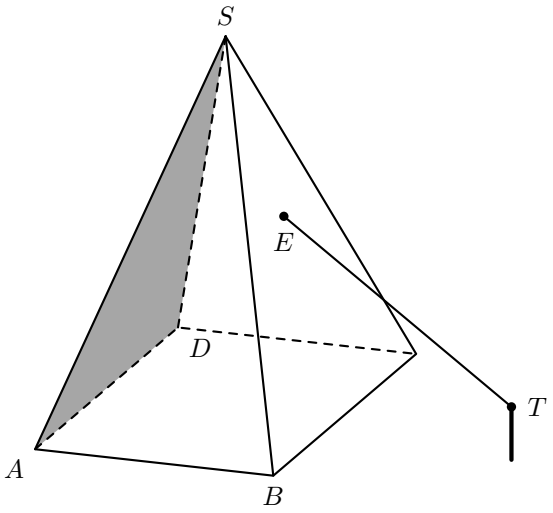
Xác suất cần tìm là xác suất có điều kiện:

$$P(M|X) = \frac{P(M \cap X)}{P(X)} = \frac{540}{12740} = \frac{27}{637} \approx 0,042386...$$

Đổi sang đơn vị phần trăm: $4,24\%$.

Bài 62. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, mặt đất là mặt phẳng (Oxy), đơn vị trên mỗi trục tính bằng mét, một kim tự tháp có dạng hình chóp $S.ABCD$ với tọa độ các đỉnh là $A(20;4;0)$, $B(20;20;0)$, $C(4;20;0)$, $D(4;4;0)$ và $S(12;12;16)$. Lối vào của tháp nằm tại $E(11;14;12)$. Từ điểm T cách mặt đất 2 mét và cách điểm S một khoảng 8 mét theo hướng của vectơ $\vec{i}(1;0;0)$, một chiếc đèn pha được chiếu rọi vào kim tự tháp, tia sáng có hướng là $\vec{r} = (a-12;-2a-20;4a-2)$ $(a \in \mathbb{R})$. Biết rằng tia sáng chiếu qua lối vào E và đâm xuyên vào kim tự tháp, cắt mặt trong của kim tự tháp

tại điểm F. Tính độ dài tia sáng TF (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của mét).



Hướng dẫn giải. Vì tia sáng chiếu qua lối vào E và đâm xuyên vào kim tự tháp, cắt mặt trong của kim tự tháp tại điểm F nên $\begin{cases} F \in TE \\ F \in (SAD) \end{cases}$ hay $F \in TE \cap (SAD)$.

Để xác định được độ dài tia sáng TF, ta đi xác định tọa độ hai điểm T, F.

Vì T cách mặt đất 2 mét nên cao độ của điểm T bằng 2;

Lại có T cách điểm S một khoảng 8 mét theo hướng của vectơ $\vec{i}(1;0;0)$, nên hoành độ của điểm T trừ hoành độ của điểm S bằng 8: $x_T - x_S = 8 \Rightarrow x_T = 8 + x_S = 8 + 12 = 20$.

Suy ra $T(20;t;2)$,

$\overrightarrow{ET} = (9;t-14;-10)$.

Mặt phẳng (SAD) có cặp vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{SA} = (8;-8;-16)$; $\overrightarrow{SD} = (-8;-8;-16)$. Suy ra một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (SAD) là:

$\vec{n}_{SAD} = \left[\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SD}\right] = (0;256;-128)$.

Chọn $\vec{n} = (0;2;-1)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (SAD). Khi đó mặt phẳng (SAD) đi qua điểm $S(12;12;16)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (0;2;-1)$ có phương trình là:

$0(x-12) + 2(y-12) - 1(z-16) = 0 \Leftrightarrow 2y - 24 - z + 16 = 0 \Leftrightarrow 2y - z - 8 = 0$

Tiếp theo, ta viết phương trình đường thẳng ET.

Vì T cách mặt đất 2 mét nên cao độ của điểm T bằng 2;

Lại có T cách điểm S một khoảng 8 mét theo hướng của vectơ $\vec{i}(1;0;0)$, nên hoành độ của điểm T trừ hoành độ của điểm S bằng 8: $x_T - x_S = 8 \Rightarrow x_T = 8 + x_S = 8 + 12 = 20$.

Suy ra $T(20;t;2)$,

$\overrightarrow{ET} = (9;t-14;-10)$.

Mà $\overrightarrow{ET}$ và $\vec{r}$ là hai vectơ cùng phương nên ta có

$\frac{a-12}{9} = \frac{-2a-20}{t-14} = \frac{4a-2}{-10}$ $(*)$

Giải phương trình $\frac{a-12}{9} = \frac{4a-2}{-10}$ ta được $-10(a-12) = 9(4a-2)$

$\Leftrightarrow -10a + 120 = 36a - 18$

$\Leftrightarrow 138 = 46a \Leftrightarrow a = \frac{138}{46} = 3.$

Thay $a = 3$ vào $(*)$ ta được

$\frac{-9}{9} = \frac{-2\cdot 3-20}{t-14} \Leftrightarrow -1 = \frac{-26}{t-14}$

$\Leftrightarrow t - 14 = 26 \Leftrightarrow t = 40.$

Suy ra $T(20; 40; 2)$, $\vec{r} = (-9; -26; 10)$.

Đường thẳng ET đi qua điểm $T(20; 40; 2)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{r} = (-9; -26; 10)$ có phương trình tham số là $\begin{cases} x = 20 - 9k \\ y = 40 - 26k \\ z = 2 + 10k \end{cases}, k \in \mathbb{R}.$

$F \in ET \Rightarrow F(20 - 9k; 40 - 26k; 2 + 10k).$

Mà $F \in (SAD)$ nên ta có $2(40 - 26k) - (2 + 10k) - 8 = 0$

$\Leftrightarrow 80 - 52k - 2 - 10k - 8 = 0$

$\Leftrightarrow 70 = 62k \Leftrightarrow k = \frac{70}{62} = \frac{35}{31}.$

Suy ra $F\left(\frac{305}{31}; \frac{330}{31}; \frac{412}{31}\right).$

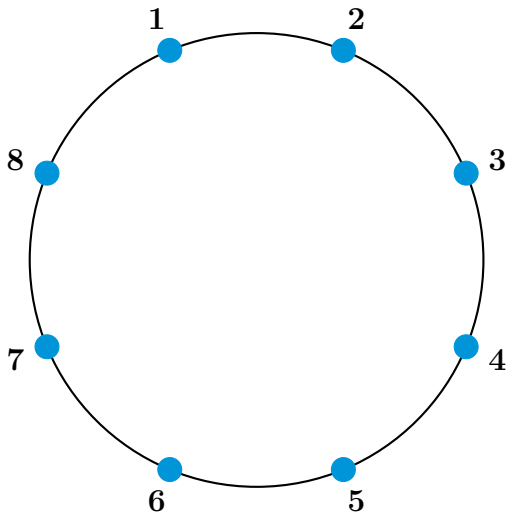
Vậy độ dài tia sáng TF bằng

$\sqrt{\left(\frac{305}{31} - 20\right)^2 + \left(\frac{330}{31} - 40\right)^2 + \left(\frac{412}{31} - 2\right)^2} \approx 33,1$ (m)

Bài 63. Có tám người ngồi quanh một bàn tròn. Mỗi người được đưa cho một đồng xu cân đối và đồng chất. Cả tám người cùng tung đồng xu của mình, ai tung được mặt ngửa thì đứng dậy, còn ai tung được mặt sấp thì vẫn ngồi yên. Biết rằng xác suất để không có hai người đứng cạnh nhau là $\frac{a}{b}$ ($\frac{a}{b}$ là phân số tối giản, $a, b \in \mathbb{N}^*$). Tính $a^2 + b$.

Hướng dẫn giải. Vì mỗi người đều có 2 TH xảy ra là đứng hoặc ngồi nên số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 2^8 = 256$.

Gọi A là biến cố "không có hai người đứng cạnh nhau".



Quan sát hình vẽ, ta thấy nếu có 5 người đứng thì sẽ luôn có hai người đứng cạnh nhau, do đó để không có hai người đứng cạnh nhau thì số người đứng phải nhỏ hơn hoặc bằng 4. Ta đi tìm số cách sắp xếp số người đứng này vào trong bàn 8 người sao cho không có hai người đứng cạnh nhau.

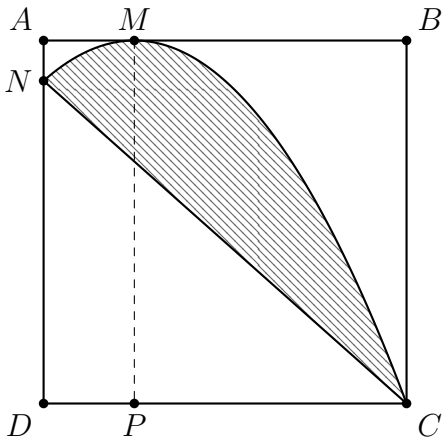
- TH1: Không có ai đứng: Có 1 cách.
- TH2: Có 1 người đứng: Có $C_8^1 = 8$ cách.
- TH3: Có 2 người đứng: Có $C_8^2 = 28$ cách chọn ra 2 người đứng trong 8 người, trong đó có 8 TH hai người đứng cạnh nhau (ở các cặp vị trí $1-2, 2-3, 3-4, 4-5, 5-6, 6-7, 7-8, 8-1$). Suy ra số cách để 2 người đứng và không ai đứng cạnh nhau là $28-8=20$ cách.
- TH4: Có 3 người đứng: Có $C_8^3 = 56$ cách chọn ra 3 người đứng trong 8 người, trong đó: Trường hợp chỉ có 2 người đứng cạnh nhau là $8 \cdot C_4^1 = 32$ cách (vì 2 người đứng cạnh nhau thì 1 người còn lại chỉ có thể chọn 1 trong 4 chỗ để đứng (lưu ý là 3 người không đứng cạnh nhau): ví dụ khi hai người đứng cạnh nhau ở vị trí 1 và 2 thì người đứng còn lại chỉ có thể đứng ở 1 trong bốn vị trí $4, 5, 6, 7$). Trường hợp 3 người đứng cạnh nhau là 8 cách (ở các vị trí là $1-2-3, 2-3-4, 3-4-5, 4-5-6, 5-6-7, 6-7-8, 7-8-1, 8-1-2$). Suy ra số cách để 3 người đứng và không ai đứng cạnh nhau là $56-32-8=16$ cách.
- TH5: Có 4 người đứng: Khi này ta chỉ có 2 cách để không có hai người đứng cạnh nhau (4 người đứng ở các vị trí $1, 3, 5, 7$ hoặc $2, 4, 6, 8$).

Suy ra tổng số cách để không có hai người đứng cạnh nhau là $n(A) = 1+8+20+16+2 = 47$.

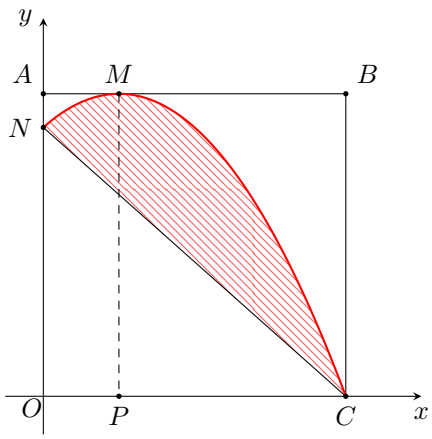
Suy ra xác suất cần tính là $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{47}{256} = \frac{a}{b}$.

Vậy $a^2 + b = 47^2 + 256 = 2465$.

Bài 64. Ông Duy có một mảnh vườn hình vuông cạnh bằng 8 m. Ông dự định xây một cái bể bơi đặc biệt (phần kẻ sọc trong hình vẽ bên). Biết $AM = \frac{AB}{4}$, phần đường cong đi qua các điểm C, M, N là một phần của đường Parabol có trục đối xứng là MP ($MP // AD$) và chi phí để làm bể bơi là 5 triệu đồng/1 m^2. Số tiền ông Duy phải trả để xây cái bể bơi đó là bao nhiêu triệu đồng (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?



✍ *Hướng dẫn giải.*



Gọi phương trình parabol đi qua 3 điểm C, M, N là $y = ax^2 + bx + c, \quad (a \neq 0)$.

Trục đối xứng của parabol là $x = -\frac{b}{2a} = 2 \Leftrightarrow b = -4a$.

Ta có parabol đi qua các điểm $M(2;8), C(8;0)$ nên ta có hệ phương trình $\begin{cases} a.2^2 + 2b + c = 8 \\ a.8^2 + 8b + c = 0 \\ b = -4a \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 4a + 2b + c = 8 \\ 64a + 8b + c = 0 \\ 4a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{2}{9} \\ b = \frac{8}{9} \\ c = \frac{64}{9} \end{cases}$.

$\Rightarrow$ Phương trình của parabol là $y = -\frac{2}{9}x^2 + \frac{8}{9}x + \frac{64}{9}$.

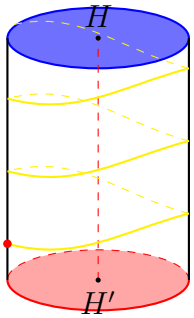
Ta có $y(0) = -\frac{2}{9}.0^2 + \frac{8}{9}.0 + \frac{64}{9} = \frac{64}{9} \Rightarrow N\left(0; \frac{64}{9}\right)$.

Phương trình đường thẳng đi qua điểm $N\left(0; \frac{64}{9}\right), C(8;0)$ là $\frac{x}{8} + \frac{y}{64/9} = 1 \Rightarrow \frac{y}{64/9} = 1 - \frac{x}{8}$ $\Rightarrow y = \frac{64}{9} - \frac{x}{8} \cdot \frac{64}{9} \Rightarrow y = \frac{64}{9} - \frac{8}{9}x$.

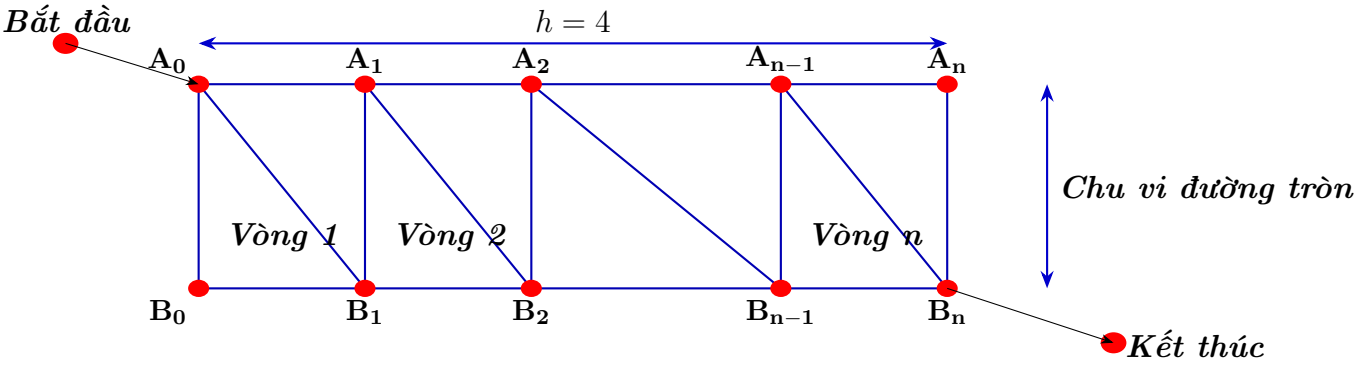
Suy ra diện tích bể bơi bằng $\int\limits_0^8 \left[-\frac{2}{9}x^2 + \frac{8}{9}x + \frac{64}{9} - \left(\frac{64}{9} - \frac{8}{9}x\right)\right] \mathrm{d}x = \int\limits_0^8 \left(-\frac{2}{9}x^2 + \frac{16}{9}x\right) \mathrm{d}x = \frac{512}{27}$.

Vậy số tiền cần trả là: $5.\frac{512}{27} \approx 95$ triệu đồng.

Bài 65. Một con kiến bò lên đều quanh hình trụ (từ mặt đáy dưới lên mặt đáy trên), bán kính mặt đáy hình trụ $R = \frac{3}{8\pi}$ và chiều cao hình trụ $h = 4$. Hỏi con kiến bò ngắn nhất bao nhiêu vòng quanh hình trụ để đoạn đường kiến đi là 1 số nguyên.



✍ *Hướng dẫn giải.* Hình sau khi đã trải phẳng:



Gọi "điểm bắt đầu" là vị trí ở mặt đáy dưới của hình trụ mà kiến xuất phát;

"điểm kết thúc" là vị trí ở mặt đáy trên của hình trụ mà kiến kết thúc hành trình di chuyển.

Gọi $n\,(n \in \mathbb{N}^*)$ là số vòng mà con kiến bò được trong suốt hành trình di chuyển.

Ta trải phẳng hình vẽ bài toán bằng cách cắt hình trụ bởi một đường thẳng đi qua "điểm bắt đầu" và "điểm kết thúc". Ta ký hiệu các điểm như hình vẽ.

Chu vi đường tròn đáy: $A_0B_0 = A_1B_1 = \cdots = A_nB_n = 2\pi R = 2\pi \cdot \frac{3}{8\pi} = \frac{3}{4}$

Ta có: $A_0A_1 = A_1A_2 = \cdots = A_{n-1}A_n = \frac{4}{n}$

Khi đó độ dài đoạn đường mỗi vòng kiến đi được:

$$d = A_0B_1 = A_1B_2 = \cdots = A_{n-1}B_n = \sqrt{\left(\frac{4}{n}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{n^2} + \frac{9}{16}}$$

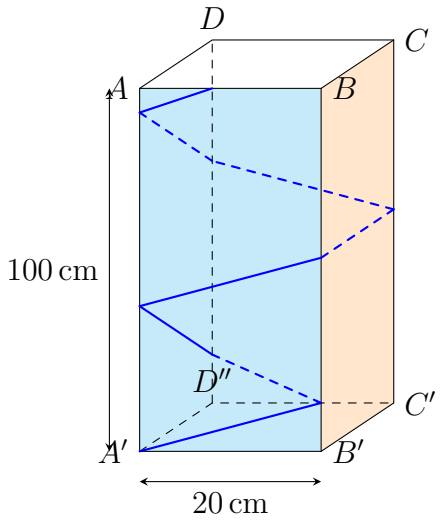
Từ đó suy ra độ dài đoạn đường kiến đi được trong suốt hành trình:

$$S = nd = n\sqrt{\frac{16}{n^2} + \frac{9}{16}} = \sqrt{16 + \frac{9n^2}{16}}$$

Yêu cầu bài toán tương đương với $\sqrt{16 + \frac{9n^2}{16}} \in \mathbb{Z}\Big|_{n_{\min}} \Leftrightarrow n = 4$

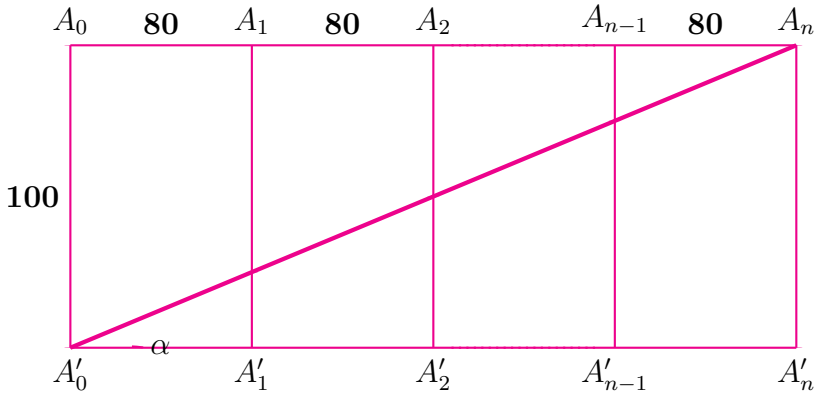
Bài 66. (TDM) Cho toà nhà đồ chơi có dạng hình hộp chữ nhật với đáy là hình vuông cạnh bằng 20 cm và chiều cao bằng 100 cm. Một con kiến bắt đầu từ A' di chuyển đến điểm A theo cách sẽ bám sát vào các mặt xung quanh của toà nhà luôn theo hướng chếch lên tạo với phương ngang một góc $\alpha \in (16°; 33°)$. Biết con kiến luôn di chuyển với tốc độ bằng $\frac{3}{5\tan\alpha}$ cm/s. Hãy tính theo phút khoảng thời gian nhỏ nhất để con kiến bò đến điểm A (làm tròn kết quả đến hàng phần

trăm) ?



Solution: CeT

Giả sử con kiến đi n vòng quanh lăng trụ. Con kiến đi từ A' đến A nên số vòng đi phải là số nguyên. Ta khai triển (trải phẳng) hình lăng trụ n lần như sau:

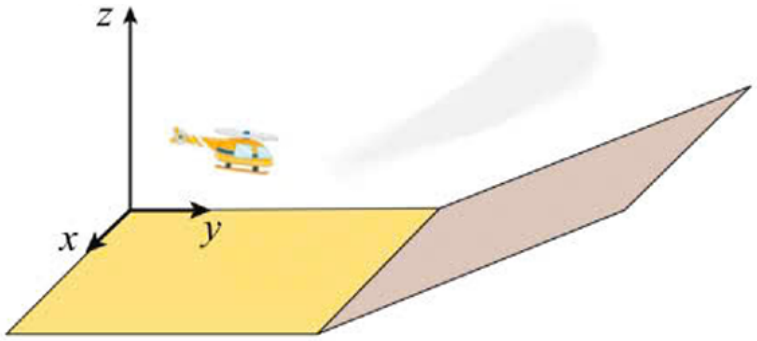


Do con kiến luôn đi chếch lên so với phương ngang góc $\alpha \in (16°; 33°)$ nên:

$$\tan 16° < \tan\alpha = \frac{100}{80n} < \tan 33° \Rightarrow 1,92 < n < 4,36 \Rightarrow 2 \le n \le 4$$

$$\Delta t = \frac{A'_0A_n}{v} = \frac{\sqrt{(80n)^2+100^2}}{0,48n \text{ (quy đổi)}} = \frac{1}{0,48}\sqrt{80^2 + \frac{100^2}{n^2}} \Rightarrow t_{\min} \Leftrightarrow n_{\max} = 4 \Rightarrow t_{\min} \approx 2,91 \text{ phút}$$

~~Bài 67.~~ Trong hệ toạ độ $Oxyz$, đơn vị trên mỗi trục tính bằng kilomet, mặt đất trùng với mặt phẳng (Oxy), một máy bay trực thăng đang bay trong điều kiện tầm nhìn kém về phía một khối núi có sườn dốc lên, mặt sườn là mặt phẳng đi qua các điểm $P(0;5;0)$, $Q(5;10;2)$ và $R(10;10;2)$. Máy bay trực thăng bay thẳng từ điểm $A(1;6;1)$ đến điểm $B(2;7;1)$, nếu duy trì hướng bay máy bay sẽ va chạm với mặt sườn. Để tránh tai nạn, tại điểm B, phi công chuyển sang một hướng khác tăng độ cao, song song với sườn núi và mặt phẳng $x + 2y - z = 0$. Tại vị trí máy bay đạt độ cao 2 kilomet so với mặt đất, máy bay đã bay quãng đường bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của mét)?



✍ *Hướng dẫn giải.* Gọi C là vị trí máy bay đạt độ cao 2 kilomet so với mặt đất sau khi chuyển hướng bay từ B. Khi đó quãng đường máy bay đã bay bằng $AB + BC$ (km). Ta có $AB = \sqrt{(2-1)^2 + (7-6)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{2}$ (km).

Để tính được quãng đường BC, ta cần xác định tọa độ điểm C. Vì C đạt độ cao 2 kilomet so với mặt đất (trùng với mặt phẳng (Oxy)) nên $C(a;b;2)$.

Mặt phẳng sườn núi đi qua các điểm $P(0;5;0)$, $Q(5;10;2)$ và $R(10;10;2)$ nên có cặp vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{PQ} = (5;5;2)$; $\overrightarrow{PR} = (10;5;2)$. Suy ra một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng sườn núi là $\vec{n} = [\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}] = (0;10;-25)$.

Suy ra $\overrightarrow{n_1} = (0;2;-5)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng sườn núi. Mặt phẳng $x+2y-z=0$ có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_2} = (1;2;-1)$.

Vì để tránh tai nạn tại điểm B, phi công chuyển sang một hướng khác tăng độ cao, song song với sườn núi và mặt phẳng $x+2y-z=0$ nên BC sẽ song song với mặt phẳng sườn núi và mặt phẳng $x+2y-z=0$.

Khi đó vectơ chỉ phương của đường thẳng BC vuông góc với vectơ pháp tuyến của mặt phẳng sườn núi là $\overrightarrow{n_1} = (0;2;-5)$ và vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $x+2y-z=0$ là $\overrightarrow{n_2} = (1;2;-1)$. Suy ra vectơ chỉ phương của đường thẳng BC là $\overrightarrow{u_{BC}} = [\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}] = (8;-5;-2)$.

Đường thẳng BC đi qua điểm $B(2;7;1)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_{BC}} = (8;-5;-2)$ có phương trình là $\begin{cases} x = 2+8t \\ y = 7-5t \\ z = 1-2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

Mà $C(a;b;2) \in BC$ nên ta có

$$\begin{cases} a = 2+8t \\ b = 7-5t \\ 2 = 1-2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = \frac{19}{2} \\ t = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$\Rightarrow C\left(-2; \frac{19}{2}; 2\right)$.

Suy ra: $BC = \sqrt{(-2-2)^2 + \left(\frac{19}{2} - 7\right)^2 + (2-1)^2} = \frac{\sqrt{93}}{2}$ (km).

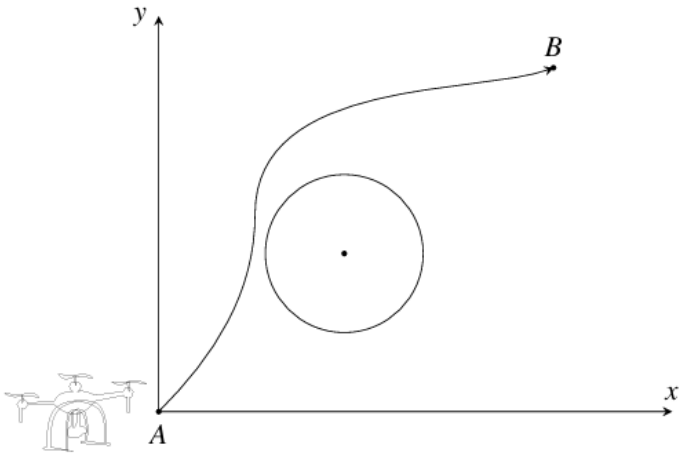
Vậy quãng đường máy bay đã bay bằng: $AB + BC = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{93}}{2} \approx 6,236\ldots$ (km) ≈ 6236 (m).

Bài 68. Trên hệ trục tọa độ Oxy (đơn vị km), một chiếc drone cứu hộ được điều khiển từ điểm $A(0;0)$ để vận chuyển thuốc cứu trợ đến điểm $B(12;10)$. Trên đường bay, drone phải tránh một khu vực cấm bay, đó là hình tròn có tâm $C(6;6)$ với bán kính 5 đơn vị. Drone có thể chạm vào biên của khu vực cấm bay nhưng không được bay vào bên trong.

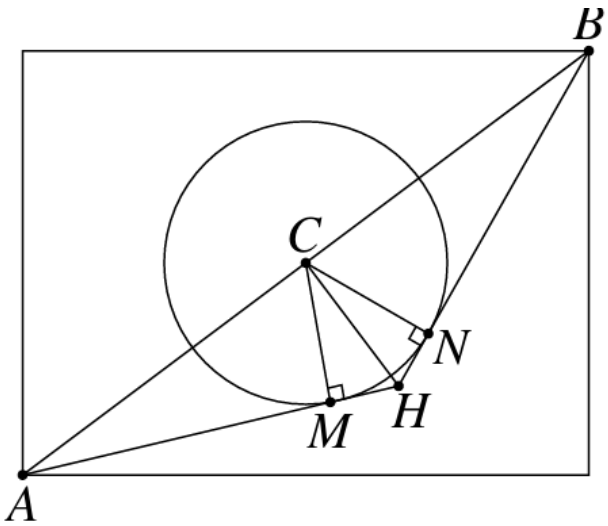
Các chế độ di chuyển của drone để tối ưu chi phí nhiên liệu:

- Chế độ tự động: Chiếc drone sẽ bay theo đường thẳng nhưng phải đổi hướng khi gặp vùng cấm bay. Chế độ này có chi phí nhiên liệu là 1 USD mỗi km.
- Chế độ điều khiển tay: Chiếc drone sẽ bay trên biên của vùng cấm, tức là bay theo một phần cung tròn. Chế độ này có chi phí nhiên liệu cao hơn, 1,5 USD mỗi km.

Tính tổng chi phí nhiên liệu tối ưu nhất cho 2 chế độ bay của chiếc drone cứu hộ (làm tròn đến hàng đơn vị, lưu ý tính tổng chi phí nhiên liệu tối ưu khi tổng quãng đường chiếc drone bay là tối ưu nhất).



✍ *Hướng dẫn giải.*



Độ dài quãng đường đi tối ưu nhất của chiếc drone bay sẽ là tổng độ dài của AM, BN và độ dài cung tròn MN trong đó M, N là các tiếp điểm của các tiếp tuyến qua A, B của đường tròn tâm C

$$(C) : (x-6)^2 + (y-6)^2 = 25.$$

Phương trình tiếp tuyến từ một điểm bất kì $K(x_0; y_0)$ đến đường tròn $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ có dạng

$$(x_0 - h)(x-h) + (y_0 - k)(y-k) = r^2$$

Phương trình tiếp tuyến từ điểm $A(0;0)$ đến $(C):(x-6)^2+(y-6)^2=25$. Suy ra

$$(0-6)(x-6)+(0-6)(y-6)=25 \Rightarrow y=\frac{47}{6}-x$$
$$\Rightarrow (x-6)^2+\left(\frac{47}{6}-x-6\right)^2=25$$
$$\Rightarrow AM=\sqrt{47}$$

Phương trình tiếp tuyến từ điểm $B(12;10)$ đến $(C):(x-6)^2+(y-6)^2=25$. Suy ra

$$(12-6)(x-6)+(10-6)(y-6)=25 \Rightarrow y=\frac{85}{4}-\frac{3x}{2}$$
$$\Rightarrow (x-6)^2+\left(\frac{85}{4}-\frac{3x}{2}-6\right)^2=25$$
$$\Rightarrow BN=3\sqrt{3}$$

Độ dài cung tròn MN là $l_{\overset{\frown}{MN}}=R\cdot\alpha$ với R là bán kính đường (C), α là góc nối ở tâm

Ta sẽ đi tính góc α.

$$\overrightarrow{CM}=\left(\frac{47+5\sqrt{47}}{12}-6;\frac{47-5\sqrt{47}}{12}-6\right)$$

và

$$\overrightarrow{CN}=\left(\frac{231}{26}+\frac{15\sqrt{3}}{13}-6;\frac{85}{4}-\frac{3\left(\frac{231}{26}+\frac{15\sqrt{3}}{13}\right)}{2}-6\right)$$

Ta có $|\overrightarrow{CM}|=|\overrightarrow{CN}|=R=5$.

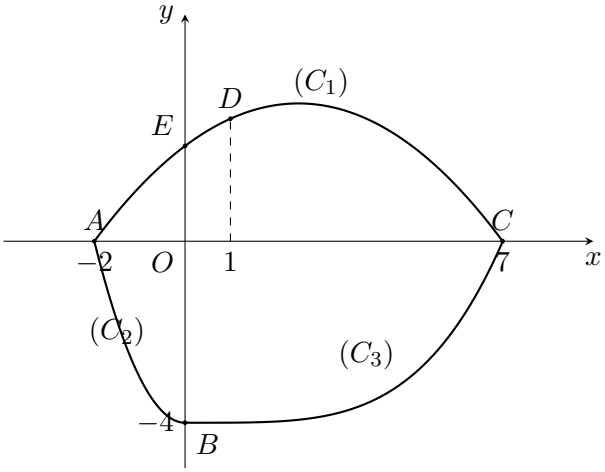
Ta có $\cos\alpha=\cos\left(\overrightarrow{CM},\overrightarrow{CN}\right)=\frac{\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{CN}}{|\overrightarrow{CM}|\cdot|\overrightarrow{CN}|}\approx\frac{9{,}08447}{5\cdot5}\Rightarrow\alpha\approx1{,}1989$ rad.

Suy ra $l_{\overset{\frown}{MN}}=R\cdot\alpha=5\cdot1{,}1989=5{,}9945$.

Vậy tổng chi phí nhiên liệu tối ưu nhất cho 2 chế độ bay của chiếc drone cứu hộ là

$$C=1\cdot\sqrt{47}+1\cdot3\sqrt{3}+1{,}5\cdot5{,}9945=21\ (\text{USD}).$$

Bài 60. Một công ty thiết kế tròng kính sao cho mỗi phần đường viền của tròng kính là một phần đồ thị của hàm số bậc hai hoặc một phần đồ thị của hàm số bậc bốn rồi ghép chúng lại với nhau như hình vẽ bên cạnh (sau đó họ sẽ điều chỉnh theo tỷ lệ phù hợp). Xét hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ bên dưới, biết rằng $A(-2;0), B(0;-4), C(7;0)$ và $D(1;k)$ với $k>0$.



Cho biết đường cong (C_1) đi qua các điểm A, D, C là một phần của đồ thị hàm số bậc hai nào đó, đường cong (C_2) ứng với đường viền nối A với B là một phần của đồ thị hàm số $y=bx^2+c$, còn

đường cong (C_3) ứng với đường viền nối B với C là một phần của đồ thị hàm số $y = mx^4 + n$. Biết $k = \frac{k_1}{k_2}$ với $(k_1, k_2 \in \mathbb{Z}, \frac{k_1}{k_2}$ là phân số tối giản). Diện tích tròng kính bằng $\frac{836}{25}$ (đơn vị diện tích). Tính $k_1 + k_2$.

Hướng dẫn giải. Đặt $f(x) = bx^2 + c$ thì ta có $f(-2) = 0, f(0) = -4$ nên $c = -4, b = 1$.

Do đó $(C_2) : y = x^2 - 4$.

Đặt S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi $f(x)$, trục hoành và trục tung.

Khi đó $S_1 = \int\limits_{-2}^{0} |x^2 - 4| \, \mathrm{d}x = \frac{16}{3}$.

Đặt $g(x) = mx^4 + n$ thì $g(0) = -4, g(7) = 0$ nên $m = \frac{4}{7^4}, n = -4$.

Do đó $(C_3) : y = \frac{4}{7^4}x^4 - 4$.

Đặt S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi C_3, trục hoành và trục tung.

Khi đó $S_2 = \int\limits_{0}^{7} \left|\frac{4}{7^4}x^4 - 4\right| \mathrm{d}x = 22,4$.

Ta thấy (C_1) cắt trục hoành tại hai điểm có hoành độ $x = -2, x = 7$ nên (C_1) là đồ thị của hàm số $y = a(x + 2)(x - 7)$.

Vì (C_1) đi qua $D(1; k)$ nên $(C_1) : y = -\frac{k}{18}(x + 2)(x - 7)$.

Đặt S_3 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi C_1 và trục hoành.

Khi đó

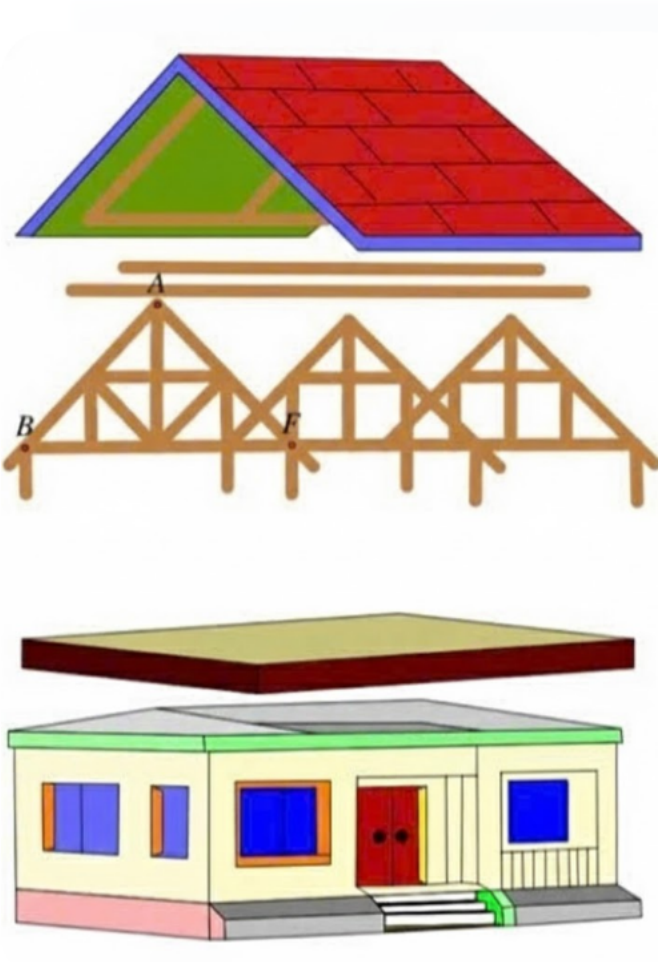
$$S_3 = \int\limits_{-2}^{7} \left|-\frac{k}{18}(x + 2)(x - 7)\right| \mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow \frac{k}{18} \cdot \int\limits_{-2}^{7} |(x + 2)(x - 7)| \, \mathrm{d}x = \frac{27}{4}k.$$

Do vậy, điều kiện cần tìm là

$$\frac{27}{4}k + \frac{16}{3} + 22,4 = 33,44 \Leftrightarrow k = \frac{1712}{2025} \Leftrightarrow k_1 + k_2 = 3737.$$

Bài 70. Một kỹ sư Strong thiết lập một hệ tọa độ $Oxyz$ để theo dõi vị trí lắp đặt của 2 mái nhà đã được gắn với nhau tạo thành hình chữ V vào các thanh đà sao cho chuẩn xác nhất. Biết phương trình mặt phẳng chứa 2 mái là $(P) : x + 2y - 2z + 6 = 0$ và $(Q) : x + 2y + z - 5 = 0$; điểm A là nóc ngói; 2 điểm B, F là rìa đuôi ngói của mỗi mái tiếp xúc giữa mái và thanh đà (như hình vẽ) khi cố định phần dưới của ngôi nhà. Khoảng cách $BF = 20$ m, khi đó tỉ số độ dài của thanh đà AF và khoảng cách BF bằng bao nhiêu?



Hướng dẫn giải. Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_P = (1;2;-2)$. Mặt phẳng (Q) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_Q = (1;2;1)$. Đường nóc nhà là giao tuyến của (P) và (Q) có vectơ chỉ phương:

$$\vec{u} = [\vec{n}_P, \vec{n}_Q] = (6;-3;0).$$

Vì thành phần z của $\vec{u}$ bằng 0 nên đường nóc nhà nằm ngang. Xét một mặt phẳng đứng cắt vuông góc với nóc nhà, ta có thiết diện là tam giác ABF với BF là đường nằm ngang.

Gọi α, β lần lượt là góc của mặt phẳng $(P), (Q)$ so với mặt phẳng nằm ngang (Oxy). Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng nằm ngang là $\vec{k} = (0;0;1)$. Ta có:

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{n}_P \cdot \vec{k}|}{|\vec{n}_P| \cdot |\vec{k}|} = \frac{|-2|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2} \cdot 1} = \frac{2}{3} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3};\ \cot\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

$$\cos\beta = \frac{|\vec{n}_Q \cdot \vec{k}|}{|\vec{n}_Q| \cdot |\vec{k}|} = \frac{|1|}{\sqrt{1^2+2^2+1^2} \cdot 1} = \frac{1}{\sqrt{6}} \Rightarrow \sin\beta = \sqrt{\frac{5}{6}};\ \cot\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Gọi h là chiều cao từ đỉnh A xuống đoạn BF. Trong tam giác thiết diện ABF:

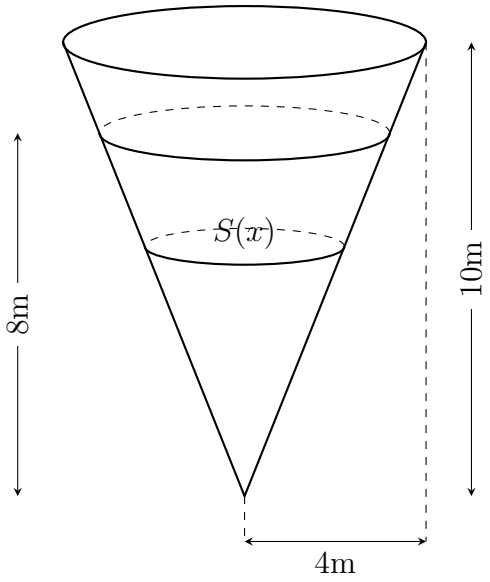
- Độ dài thanh đà $AF = \frac{h}{\sin\beta} = h \cdot \sqrt{\frac{6}{5}}$.
- Khoảng cách $BF = h \cdot \cot\alpha + h \cdot \cot\beta = h\left(\frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{3h}{\sqrt{5}}$.

Tỉ số độ dài của thanh đà AF và khoảng cách BF là:

$$\frac{AF}{BF} = \frac{h\sqrt{\frac{6}{5}}}{\frac{3h}{\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

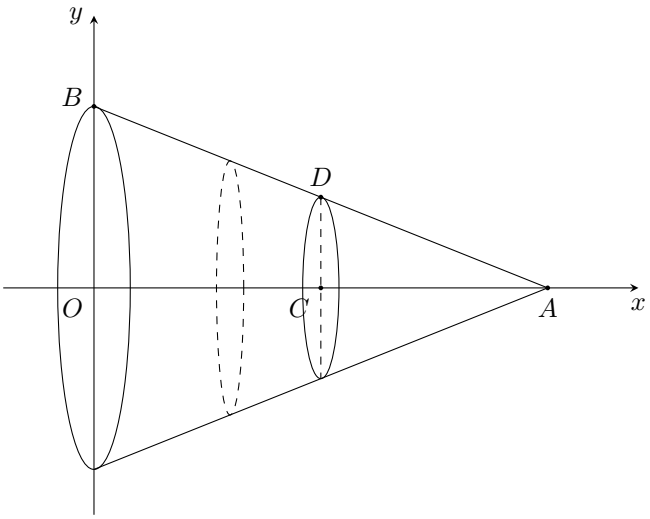
Vậy tỉ số cần tìm là $\frac{\sqrt{6}}{3} \approx 0,82$.

Bài 71. Một bể nước hình nón tròn xoay như hình vẽ có chiều cao 10 mét và bán kính đáy 4 mét được đổ nước cao đến độ cao 8 mét. Công để bơm nước ra từ một vòi ở đỉnh bể được tính theo công thức $W = 9,8\int_2^{10} xS(x)\,\mathrm{d}x$ (đơn vị kilôJun), trong đó $S(x)$ (m^2) là diện tích của lớp nước cách mặt bể x (mét). Tính W (kJ) (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).



Hướng dẫn giải. Để tính được công để bơm hết nước ra thì ta cần đi tìm hàm $S(x)$.

Lớp nước cách mặt bể là một hình tròn song song và cách mặt bể x (mét). Giả sử lớp nước hình tròn đó có bán kính là r (mét). Ta gắn hệ trục tọa độ như hình sau.



Từ giả thiết, ta có $OC = x$ (m) $\Rightarrow AC = 10 - x$ (m); $OA = 10$ (m); $OB = 4$ (m). Vì mặt nước cách bể song song với mặt bể nên $CD // OB$.

Khi đó, áp dụng hệ quả của định lí Thales trong tam giác OAB, ta có

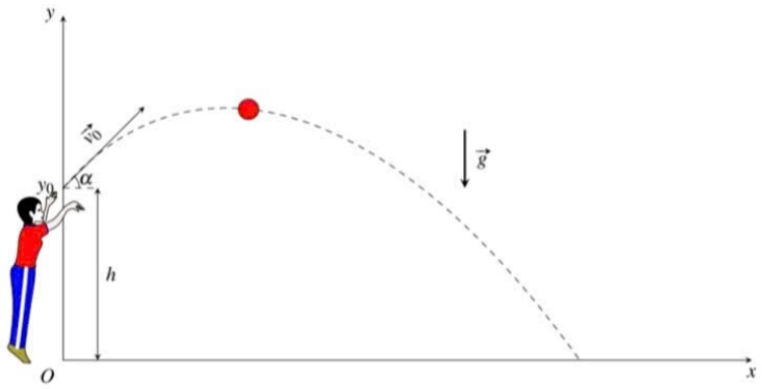
$$\frac{AC}{OA} = \frac{CD}{OB} \Leftrightarrow \frac{10-x}{10} = \frac{r}{4} \Leftrightarrow r = \frac{4\cdot(10-x)}{10} = \frac{20-2x}{5}.$$

Suy ra $S(x) = \pi r^2 = \pi\left(\frac{20-2x}{5}\right)^2$.

Vậy $W = 9,8 \cdot \int\limits_2^{10} x \cdot \pi\left(\frac{20-2x}{5}\right)^2 \mathrm{d}x \approx 3363$ (kJ).

Bài 72. Một vận động viên có chiều cao 1,75 m thực hiện ném tạ với vận tốc ban đầu $v_0 = 30$ m/s,

đạt thành tích 15 m. Gọi α là góc ném của vận động viên hợp với mặt đất với quỹ đạo của tạ khi ném xiên là một phần của đồ thị hàm số $y = -\frac{g}{2v_0^2 \cdot \cos^2\alpha}x^2 + x\tan\alpha + y_0$ $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$. Coi gia tốc trọng trường $g = 10\,\text{m/s}^2$. Tính giá trị của $|\cos 2\alpha|$ (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



✍ *Hướng dẫn giải.* Theo giả thiết, ta có các thông số: $y_0 = 1{,}75\,\text{m}$, $v_0 = 30\,\text{m/s}$, $g = 10\,\text{m/s}^2$. Khi tạ đạt thành tích 15 m, nghĩa là tại vị trí $x = 15$ thì tạ chạm đất $(y = 0)$. Thay các giá trị vào phương trình quỹ đạo ta được:

$$0 = -\frac{10}{2 \cdot 30^2 \cdot \cos^2\alpha} \cdot 15^2 + 15\tan\alpha + 1{,}75$$

$$\Leftrightarrow -\frac{10 \cdot 225}{1800} \cdot \frac{1}{\cos^2\alpha} + 15\tan\alpha + 1{,}75 = 0$$

Sử dụng hệ thức $\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \tan^2\alpha$, phương trình trở thành:

$$-1{,}25(1 + \tan^2\alpha) + 15\tan\alpha + 1{,}75 = 0$$

$$\Leftrightarrow -1{,}25\tan^2\alpha + 15\tan\alpha + 0{,}5 = 0$$

$$\Leftrightarrow 5\tan^2\alpha - 60\tan\alpha - 2 = 0$$

Giải phương trình bậc hai với biến $\tan\alpha$ $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan\alpha > 0\right)$:

$$\Delta' = 30^2 - 5 \cdot (-2) = 910 \Rightarrow \tan\alpha = \frac{30 + \sqrt{910}}{5} \approx 12{,}033$$

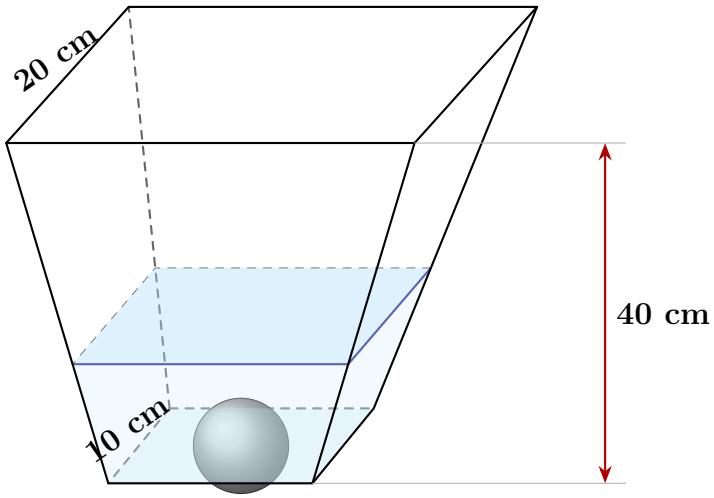
Ta có công thức: $\cos 2\alpha = \frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$. Với $\tan^2\alpha = \frac{60\tan\alpha+2}{5} \approx 144{,}799$:

$$\cos 2\alpha = \frac{1 - 144{,}799}{1 + 144{,}799} \approx -0{,}986$$

Vậy $|\cos 2\alpha| \approx 0{,}986$. Làm tròn đến hàng phần trăm, ta được kết quả: $|\cos 2\alpha| \approx 0{,}99$.

Bài 73. Một bể nước có dạng hình chóp cụt tứ giác đều có chiều cao $h = 40$ cm, đáy bể là hình vuông cạnh 10 cm và miệng bể là hình vuông cạnh 20 cm. Một viên bi sắt hình cầu không nổi bán kính $r = 4$ cm đặt dưới đáy bể nước. Ban đầu bể cạn, sau đó nước được đổ vào bể với tốc độ không đổi 20 cm^3/s. Tốc độ dâng lên của mực nước trong bể khi viên bi sắt ngập một nửa

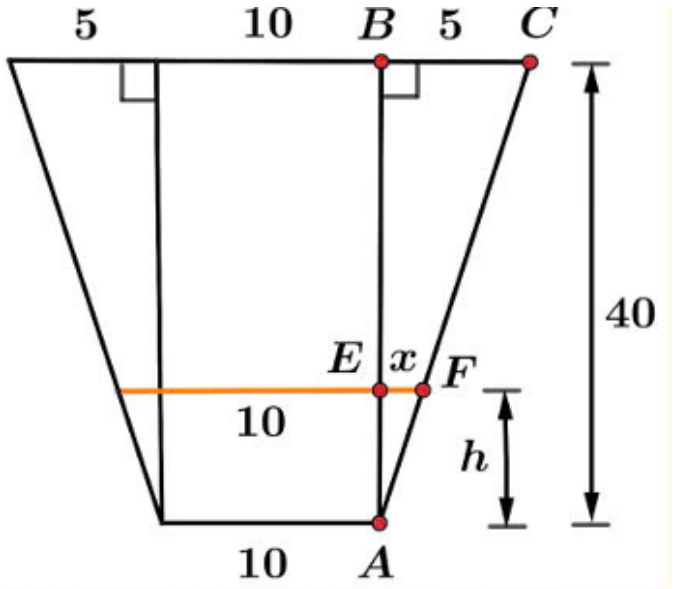
trong nước là bao nhiêu cm/s (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



✍ *Hướng dẫn giải.* Cách 1: Sử dụng công thức tính nhanh thể tích chóp cụt:

$$V_{chop\ cut} = \frac{1}{3}h\left(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2\right)$$

Thể tích chóp cụt có chiều cao là h, đáy nhỏ là hình vuông cạnh 10 cm có diện tích là $S_1 = 10^2 = 100$ cm^2; đáy lớn là hình vuông cạnh a cm ($a = 10 + 2x$).



Minh họa mặt cắt của bể nước, dựng và kí hiệu các điểm như hình vẽ (đoạn thẳng màu cam là cạnh đáy lớn a của mặt nước).

Vì mặt nước song song với hai mặt đáy bể nên ta dễ dàng chứng minh được $\Delta ABC \sim \Delta AEF$ $(g-g)$.

Suy ra $\dfrac{AE}{AB} = \dfrac{EF}{BC} \Leftrightarrow \dfrac{h}{40} = \dfrac{x}{5}$

$\Rightarrow x = \dfrac{h}{8}$ suy ra cạnh của đáy lớn là

$$a = 10 + 2 \cdot \frac{h}{8} = 10 + \frac{h}{4}\ (\text{cm}).$$

Diện tích của đáy lớn là

$$S_2 = a^2 = \left(10 + \frac{h}{4}\right)^2$$

Vậy thể tích chóp cụt là

$$\begin{aligned} V_{chop\ cut} &= \frac{1}{3}h\left(100 + \sqrt{100 \cdot \left(10 + \frac{h}{4}\right)^2} + \left(10 + \frac{h}{4}\right)^2\right) \\ &= \frac{1}{3}h\left(100 + 10 \cdot \left(10 + \frac{h}{4}\right) + 100 + 2 \cdot 10 \cdot \frac{h}{4} + \left(\frac{h}{4}\right)^2\right) \\ &= \frac{1}{3}h\left(200 + 100 + \frac{5h}{2} + 5h + \frac{h^2}{16}\right) \\ &= \frac{1}{3}h\left(300 + \frac{15h}{2} + \frac{h^2}{16}\right) \\ &= 100h + \frac{5h^2}{2} + \frac{h^3}{48} \end{aligned}$$

Cách 2: Quan sát bể nước, ta thấy nước trong bể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x = 0$; $x = h$ và có thiết diện (được cắt theo mặt cắt ngang) là hình vuông cạnh a nên có thể tích là $V = \int\limits_0^h a^2 \mathrm{d}x$.

Lặp lại cách tính như cách 1, ta thu được độ dài cạnh đáy lớn của chóp cụt là $a = 10 + \frac{x}{4}$ (cm) với x là chiều cao của nước trong bể.

Suy ra thể tích vật thể là

$$\begin{aligned} V &= \int\limits_0^h \left(10 + \frac{x}{4}\right)^2 \mathrm{d}x \\ &= \int\limits_0^h \left[100 + 2 \cdot 10 \cdot \frac{x}{4} + \left(\frac{x}{4}\right)^2\right] \mathrm{d}x \\ &= \int\limits_0^h \left(100 + 5x + \frac{x^2}{16}\right) \mathrm{d}x \\ &= \left(100x + \frac{5x^2}{2} + \frac{x^3}{3 \cdot 16}\right)\Bigg|_0^h \\ &= \left(100x + \frac{5x^2}{2} + \frac{h^3}{48}\right)\Bigg|_0^h \\ &= 100h + \frac{5h^2}{2} + \frac{h^3}{48}. \end{aligned}$$

Suy ra thể tích nước có trong bể tại thời điểm t là $V = V_{\text{chóp cụt}} - V_{\text{chỏm}}$

$$\begin{aligned} &= 100h + \frac{5h^2}{2} + \frac{h^3}{48} - \pi h^2\left(4 - \frac{h}{3}\right) \\ &= 100h + \frac{5h^2}{2} + \frac{h^3}{48} - 4\pi h^2 + \frac{\pi h^3}{3}. \end{aligned}$$

Suy ra

$$V'(h) = 100 + \frac{5 \cdot 2h}{2} + \frac{3 \cdot h^2}{48} - 4\pi \cdot 2h + \frac{\pi \cdot 3h^2}{3}$$

$$= 100 + 5h + \frac{h^2}{16} - 8\pi h + \pi h^2.$$

Suy ra tốc độ dâng lên của mực nước trong bể khi viên bi sắt ngập một nửa trong nước là

$h'(t) = \frac{20}{V'(4)} = \frac{20}{100+5\cdot 4+\frac{4^2}{16}-8\pi\cdot 4+\pi\cdot 4^2} \approx 0,28.$

Bài 74. Một hộp có 25 chiếc thẻ cùng loại được đánh số từ 1 đến 25. Hai bạn Hà và Quỳnh chơi trò chơi rút thẻ trong hộp như sau: hai bạn lần lượt rút thẻ, mỗi lượt rút ngẫu nhiên một thẻ rồi ghi lại số trên thẻ vừa rút sau đó trả lại thẻ vào hộp. Hà sẽ thắng nếu rút được thẻ ghi số chia hết cho 6, Quỳnh sẽ thắng nếu rút được thẻ ghi số chia hết cho 5. Giả sử Hà chơi trước, khi đó xác suất để Quỳnh thắng bằng $\frac{a}{b}$ $(a, b \in \mathbb{N}^*$, $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Tính $a^2 + b^2$.

Hướng dẫn giải. Gọi H là biến cố "Hà rút được thẻ ghi số chia hết cho 6";
Q là biến cố "Quỳnh rút được thẻ ghi số chia hết cho 5".
Vì Hà và Quỳnh sẽ rút thẻ và trả lại nên hai biến cố H, Q là độc lập với nhau.

Đầu tiên, ta xét trong một lượt:
Hà thắng nếu rút được số chia hết cho 6, nên xác suất Hà thắng là $P(H) = \frac{4}{25}$ (trong 25 thẻ, rút trúng 1 trong 4 thẻ mang số 6; 12; 18; 24). Xác suất Hà rút trượt (rút không trúng) là

$$P(\overline{H}) = 1 - P(H) = 1 - \frac{4}{25} = \frac{21}{25}.$$

Quỳnh thắng nếu rút được số chia hết cho 5, nên xác suất Quỳnh thắng là $P(Q) = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$ (trong 25 thẻ, rút trúng 1 trong 5 thẻ mang số 5; 10; 15; 20; 25). Xác suất Quỳnh rút trượt là

$$P(\overline{Q}) = 1 - P(Q) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}.$$

Xác suất trong một lượt rút không ai thắng là $P(\overline{HQ}) = \frac{21}{25} \cdot \frac{4}{5} = \frac{84}{125}$.
Xác suất trong một lượt rút Quỳnh thắng là $P(\overline{H}Q) = \frac{21}{25} \cdot \frac{1}{5} = \frac{21}{125}$.

Tiếp theo, ta xác định xác suất để Quỳnh thắng.
Quỳnh có thể thắng ở vòng 1, vòng 2, ..., vòng n. Do đó để Quỳnh thắng ở một vòng, Hà phải rút trượt (thua) trước đó. Ta xét Quỳnh thắng ở lần lượt các vòng:

Vòng 1: Hà trượt, Quỳnh trúng. Suy ra xác suất Quỳnh thắng là

$$P_1 = P(\overline{H}) \cdot P(Q) = \frac{21}{25} \cdot \frac{5}{25} = \frac{21}{125}.$$

Vòng 2: Cả hai trượt vòng 1, Hà trượt vòng 2, Quỳnh trúng vòng 2. Suy ra xác suất Quỳnh thắng là

$$P_2 = \frac{84}{125} \cdot \frac{21}{125}.$$

Vòng 3: Cả hai trượt vòng 1, Cả hai trượt vòng 2, Hà trượt vòng 3, Quỳnh trúng vòng 3. Suy ra xác suất Quỳnh thắng là

$$P_3 = \frac{84}{125} \cdot \frac{84}{125} \cdot \frac{21}{125}.$$

$= \frac{21}{125} \cdot \left(\frac{84}{125}\right)^2$.

...

Nhận xét: Xác suất Quỳnh thắng vòng 1, vòng 2, ... vòng n theo thứ tự lập thành một cấp số nhân lùi vô hạn với $u_1 = \frac{21}{125}$ và công bội $q = \frac{84}{125}$.

Suy ra tổng xác suất Quỳnh thắng bằng với tổng cấp số nhân lùi vô hạn với $u_1 = \frac{21}{125}$ và công bội $q = \frac{84}{125}$ và bằng

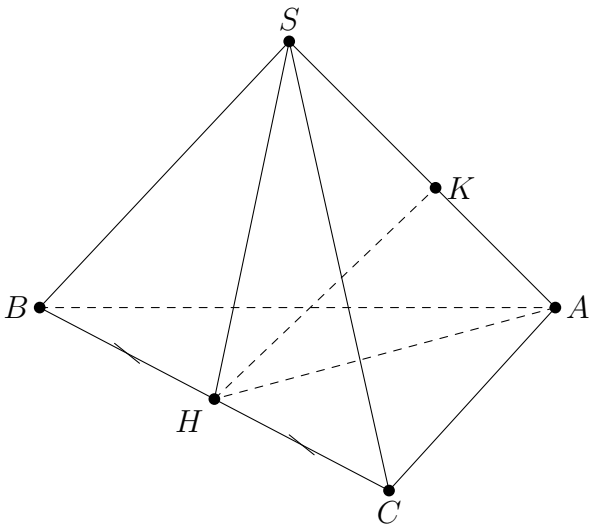
$$P = \frac{u_1}{1-q} = \frac{\frac{21}{125}}{1-\frac{84}{125}} = \frac{21}{41} = \frac{a}{b}.$$

Suy ra $\begin{cases} a = 21 \\ b = 41 \end{cases}$

$\Rightarrow a^2 + b^2 = 21^2 + 41^2 = 2122.$

Bài 75. Cho chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông can tại A, tam giác SBC là tam giác đều cạnh 1 và thuộc mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

Hướng dẫn giải.

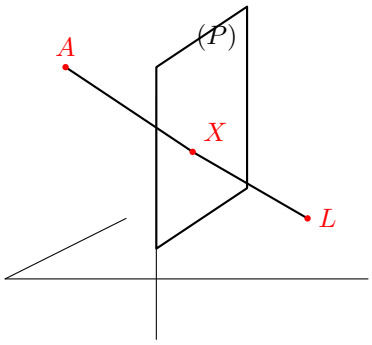


Gọi H là trung điểm của BC khi đó $SH \perp BC$.
Mặt khác $(SBC) \perp (ABC)$ do đó $SH \perp (ABC)$.
Ta có: $SH = \frac{\sqrt{3}}{2}$ và $CH = \frac{BC}{2} = \frac{1}{2}$.
Do $\begin{cases} BC \perp AH \\ BC \perp SH \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SHA)$.
Dựng $HK \perp SA$ khi đó HK là đoạn vuông góc chung của SA và BC.
Lại có: $\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HA^2}$ (với $HA = HC = \frac{1}{2}$)
$\Rightarrow \frac{1}{HK^2} = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{16}{3}$
$\Rightarrow HK^2 = \frac{3}{16} \Rightarrow HK = \frac{\sqrt{3}}{4}$
$\Rightarrow d(SA, BC) = \frac{\sqrt{3}}{4} \approx 0,43.$

Bài 76. Trong không gian toạ độ $Oxyz$, đơn vị mỗi trục là km, mặt đất là mặt phẳng Oxy. Một máy bay đang tiếp cận hạ cánh từ điểm $A(18; -13; 12)$. Biên giới của hai quốc gia được xác định bởi mặt phẳng đi qua hai điểm $C(-13; -4; 0)$; $D(-7; 13; 0)$ và vuông góc với mặt đất. Kể từ A, sau 7 phút nó bay đến biên giới hai quốc gia và 1 phút sau đó nó hạ cánh tại điểm L trên đường băng LH. Biết phương trình đường thẳng LH là $\begin{cases} x = -14 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$. Giả sử vận tốc của máy bay không

đổi trong suốt quá trình. Tìm vận tốc máy bay (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị của km/h).

Hướng dẫn giải. Gọi $X(a;b;c)$ là điểm máy bay đi qua biên giới quốc gia. Minh họa bài toán như hình vẽ.



Ta có vận tốc bay từ A đến X (trong 7 phút $=\frac{7}{60}$ giờ) bằng

$$\frac{AX}{\frac{7}{60}}=\frac{60AX}{7}\text{ (km/h).}$$

Vận tốc bay từ X đến L (trong 1 phút $=\frac{1}{60}$ giờ) bằng

$$\frac{XL}{\frac{1}{60}}=60XL\text{ (km/h).}$$

Vì vận tốc máy bay không đổi trong suốt quá trình nên vận tốc ta cần tìm có thể được tính bằng $\frac{60AX}{7}$ (km/h) hoặc $60XL$ (km/h). Do đó, ta cần đi xác định tọa độ điểm X hoặc L (tương ứng).

Ta có phương trình đường bay $LH:\begin{cases}x=-14\\y=t\\z=0\end{cases}$. $L\in LH$ nên $L(-14;t;0)$.

Gọi (P) là mặt phẳng biên giới. Biết (P) đi qua hai điểm $C(-13;-4;0)$; $D(-7;13;0)$ và vuông góc với mặt đất (tức mặt phẳng $(Oxy):z=0$) nên ta có cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng (P) là $\overrightarrow{CD}=(6;17;0)$; $\vec{n}_{(Oxy)}=(0;0;1)$ (vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (Oxy)). Suy ra vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là

$$\vec{n}_P=\left[\overrightarrow{CD},\vec{n}_{(Oxy)}\right]=(17;-6;0)\text{ (hoặc }(-17;6;0)).$$

Mặt phẳng (P) đi qua điểm $D(-7;13;0)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_P=(-17;6;0)$ có phương trình là

$$-17(x+7)+6(y-13)+0(z-0)=0$$
$$\Leftrightarrow -17x-119+6y-78=0$$
$$\Leftrightarrow -17x+6y-197=0.$$

$X\in(P)$ nên ta có $-17a+6b-197=0$ (1). Suy ra $\overrightarrow{AX}=(a-18;b+13;c-12)$; $\overrightarrow{XL}=(-14-a;t-b;-c)$.

Ta có vận tốc máy bay không đổi trong suốt quá trình nên ta có $\frac{60AX}{7}=60XL\Leftrightarrow AX=7XL\Rightarrow$

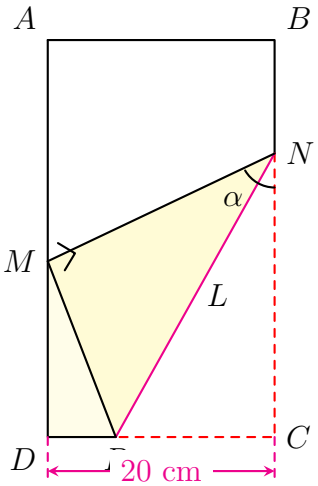
$$\overrightarrow{AX}=7\overrightarrow{XL}\Leftrightarrow\begin{cases}a-18=7(-14-a)\\b+13=7(t-b)\\c-12=7(-c)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a-18=-98-7a\\b+13=7t-7b\\c-12=-7c\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}8a=-80\\8b+13=7t\\8c=12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-10\\8b+13=7t\\c=\frac{3}{2}\end{cases}$$

Thay $a=-10$ vào phương trình (1) ta được $-17\cdot(-10)+6b-197=0\Leftrightarrow 6b-27=0\Leftrightarrow 6b=27\Leftrightarrow b=\frac{9}{2}$.

Suy ra $X\left(-10;\frac{9}{2};\frac{3}{2}\right)$.

Vậy vận tốc của máy bay là $\frac{60AX}{7}=\frac{60\sqrt{(-10-18)^2+\left(\frac{9}{2}+13\right)^2+\left(\frac{3}{2}-12\right)^2}}{7}\approx 297$ (km/h).

Bài 77. Trong một tiết học, cô giáo yêu cầu bạn Đăng gấp một tờ giấy và tìm giá trị nhỏ nhất của nếp gấp với cách gấp như sau: Tờ giấy có dạng hình chữ nhật với chiều rộng bằng 20 cm, từ một điểm trên cạnh dài gấp tờ giấy lại và thu được miền diện tích được tô đậm như hình vẽ. Gọi α là góc trên của nếp gấp (góc $\widehat{PNC}$ như hình).

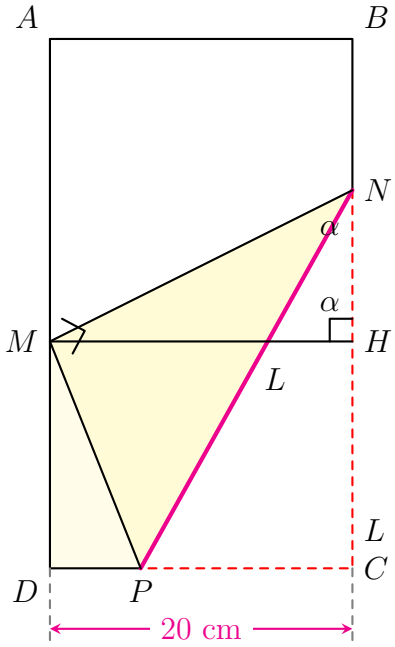


Bạn Đăng chứng minh được độ dài nếp gấp L (cm) phụ thuộc vào góc α theo phương trình

$$L=\frac{c}{a\sin^3\alpha+b\sin\alpha}$$

với a,b,c là các số nguyên, $c\in(0;20)$. Tính $2a+12b^2+c^3$.

Hướng dẫn giải. Từ cách gấp giấy, ta có $\Delta MNP=\Delta CNP$.



Kẻ $MH\perp BC\Rightarrow MH=20$.

Trong tam giác vuông MNH, ta có

$\sin\widehat{MNH}=\frac{MH}{MN}$

$\Rightarrow MN=\frac{MH}{\sin\widehat{MNH}}=\frac{20}{\sin 2\alpha}$

Trong tam giác vuông MNP, ta có

$\cos\widehat{MNP} = \frac{NP}{MN}$

$\Rightarrow NP = \frac{MN}{\cos\widehat{MNP}} = \frac{\frac{20}{\sin 2\alpha}}{\cos\alpha} = \frac{20}{\cos\alpha\cdot\sin 2\alpha}$

$\Rightarrow L = NP = \frac{20}{\cos\alpha\cdot\sin 2\alpha}$

$= \frac{20}{\cos\alpha\cdot 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$ (thay $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$)

$= \frac{10}{\cos^2\alpha\cdot\sin\alpha}$

$= \frac{10}{(1-\sin^2\alpha)\cdot\sin\alpha}$ (thay $\cos^2\alpha = 1-\sin^2\alpha$)

$= \frac{10}{\sin\alpha-\sin^3\alpha}$

Suy ra $\begin{cases} c = 10 \\ a = -1 \\ b = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow 2a + 12b^2 + c^3 = 2\cdot(-1) + 12\cdot 1^2 + 10^3 = 1010.$

Bài 78. Một hộ gia đình sản xuất mỗi ngày sản xuất được x chiếc túi cói $(0 \le x \le 20, x \in \mathbb{N})$. Gọi $C(x)$ (tính bằng nghìn đồng) là tổng chi phí để sản xuất x chiếc túi thì $C'(x)$ được gọi là chi phí biên. Biết rằng $C'(x) = 3x^2 - 4x + 10$ và chi phí cố định (chi phí khi không sản xuất chiếc túi nào) là 500 nghìn đồng mỗi ngày. Giả sử gia đình này bán hết túi mỗi ngày sản xuất ra với giá 270 nghìn đồng/chiếc. Tính lợi nhuận tối đa theo đơn vị nghìn đồng mà gia đình đó thu được?

Hướng dẫn giải. Với x là số lượng chiếc túi cói bán trong ngày $(0 \le x \le 20)$, ta có tổng chi phí để sản xuất x chiếc túi cói là:

$$C(x) = \int C'(x)\mathrm{d}x = \int (3x^2 - 4x + 10)\mathrm{d}x = x^3 - 2x^2 + 10x + C.$$

Do chi phí cố định ban đầu để sản xuất là 500 (nghìn đồng) nên ta có $C(0) = 500 \Rightarrow C = 500$.
Khi đó, tổng lợi nhuận gia đình này thu được khi bán x chiếc túi là:

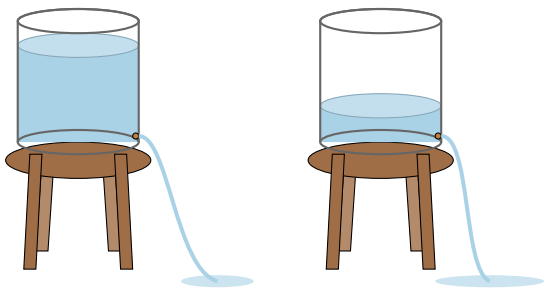
$$\begin{aligned} P(x) &= 270x - (x^3 - 2x^2 + 10x + 500) \\ &= -x^3 + 2x^2 + 260x - 500. \end{aligned}$$

Yêu cầu bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số $P(x) = -x^3 + 2x^2 + 260x - 500$ trên đoạn $[0; 20]$.
Ta có: $P'(x) = -3x^2 + 4x + 260 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 10 \in [0; 20] \\ x = -\dfrac{26}{3} \notin [0; 20] \end{array}\right.$$

Ta tính được $P(0) = -500$, $P(10) = 1300$, $P(20) = -2500$.
Vậy lợi nhuận tối đa mà gia đình đó thu được là 1300 (nghìn đồng) khi bán được 10 chiếc túi cói.

Bài 79. Một bể chứa 360 lít nước bị rò rỉ ở đáy nên nước chảy ra hết sau 20 phút. Lượng nước trong bể càng nhiều thì tốc độ chảy ra ngoài càng lớn. Theo định luật Torricelli, thể tích nước còn lại trong bể sau t phút được cho bởi hàm số $V(t) = 0,9t^2 + bt + c$ (đơn vị: lít), với b, c là số thực.



✍ *Hướng dẫn giải.* Xét $V(t) = 0,9t^2 + bt + c$ với điều kiện ban đầu là lúc $V(0) = 360 \Rightarrow c = 360$

Sau 20 phút thì bể cạn, thay $t = 20$ và $V(t) = 0$ vào phương trình: $V(20) = 0,9{\cdot}20^2 + b{\cdot}20 + 360 = 0$ Ta được: $0,9 \cdot 400 + 20b + 360 = 0 \Rightarrow 360 + 20b + 360 = 0 \Rightarrow 20b = -720 \Rightarrow b = -36$

Suy ra phương trình là: $V(t) = 0,9t^2 - 36t + 360$ Lượng nước còn lại sau 15 phút là: $V(15) = 0,9 \cdot 15^2 - 36 \cdot 15 + 360 = 22,5$ (lít).

Bài 80. Bác Việt có 12 ha đất canh tác để trồng ba loại cây: ngô, khoai tây và đậu tương. Chi phí trồng 1 ha ngô là 4 triệu đồng, 1 ha khoai tây là 3 triệu đồng và 1 ha đậu tương là $4,5$ triệu đồng. Do nhu cầu thị trường, bác đã trồng khoai tây trên phần diện tích gấp đôi diện tích trồng ngô. Tổng chi phí trồng ba loại cây trên là $45,25$ triệu đồng. Hỏi diện tích trồng ngô là bao nhiêu ha?

✍ *Hướng dẫn giải.* Gọi diện tích trồng ngô, khoai tây, đậu tương lần lượt là x, y, z (ha).
Theo đề bài, ta có:

- Có tổng cộng 12 ha đất canh tác, suy ra $x + y + z = 12$ (1).
- Diện tích trồng khoai tây gấp đôi diện tích trồng ngô, suy ra $y = 2x$ hay $2x - y = 0$ (2).
- Tổng chi phí trồng ba loại cây trên là $45,25$ triệu đồng, suy ra $4x + 3y + 4,5z = 45,25$ (3).

Từ (1), (2) và (3) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y + z = 12 \\ 2x - y = 0 \\ 4x + 3y + 4,5z = 45,25 \end{cases}$$

Giải hệ này ta được $x = 2,5; y = 5; z = 4,5$.
Vậy diện tích trồng ngô là $2,5$ ha.

Bài 81. Một nhà động vật học nhận thấy rằng sự tăng trưởng chiều dài của một con cá sấu trong 12 tháng được mô hình hóa bằng hàm số $L(t) = 3 - a \cdot 3^{-kt}$ trong đó t tính bằng tháng, L tính bằng mét, $0 \le t \le 12$. Ban đầu con cá sấu dài $1,8$ m và sau 10 tháng chiều dài của nó đo được là $2,6$ m. Một con cá sấu thứ 2 được quan sát cùng thời điểm và sự tăng trưởng về chiều dài của nó được mô hình hóa bởi hàm số $L_2(t) = 2,5 - 3^{-0,2t}$. Sự chênh lệch về chiều dài của hai con cá sấu nhỏ nhất bằng bao nhiêu cm (*làm tròn kết quả đến hàng phần mười*)?

✍ *Hướng dẫn giải.* Đầu tiên, ta đi xác định hệ số a, k của hàm $L(t) = 3 - a \cdot 3^{-kt}$.
Từ dữ kiện: "Ban đầu ($t = 0$) con cá sấu dài $1,8$ m và sau 10 tháng ($t = 10$) chiều dài của nó đo được là $2,6$ m" ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} L(0) = 1,8 \\ L(10) = 2,6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - a \cdot 3^{-k\cdot 0} = 1,8 \\ 3 - a \cdot 3^{-k\cdot 10} = 2,6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - a = 1,8 \\ a \cdot 3^{-10k} = 0,4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1,2 \\ 3^{-10k} = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1,2 \\ 3^{-10k} = 3^{-1} \end{cases}$$

$\Rightarrow -10k = -1 \Rightarrow k = 0,1$. Suy ra $L(t) = 3 - 1,2 \cdot 3^{-0,1t}$.
Suy ra sự chênh lệch về chiều dài của hai con cá sấu bằng

$$|L(t) - L_2(t)| = |3 - 1,2 \cdot 3^{-0,1t} - 2,5 + 3^{-0,2t}| = |0,5 - 1,2 \cdot 3^{-0,1t} + 3^{-0,2t}|.$$

Để tìm được $|L(t) - L_2(t)|_{\min}$ trên đoạn $[0; 12]$, ta xét hàm số $f(t) = 0,5 - 1,2 \cdot 3^{-0,1t} + 3^{-0,2t}$ trên đoạn $[0; 12]$.
Đặt $x = 3^{-0,1t}$ với $t \in [0; 12] \Rightarrow x \in [3^{-1,2}; 1]$.
Suy ra $f(t) = 0,5 - 1,2x + x^2 = x^2 - 1,2x + 0,5$ là hàm bậc hai có $a = 1 > 0$, $-\frac{b}{2a} = -\frac{-1,2}{2\cdot 1} = 0,6$

nên có bảng biến thiên như sau:

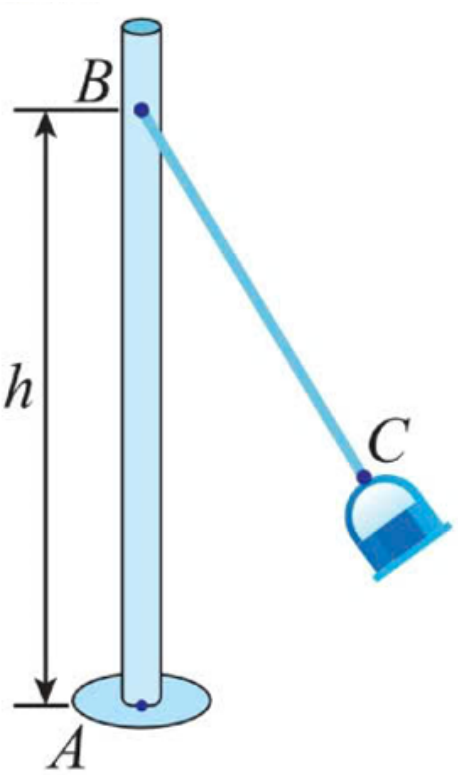
x	$3^{-1,2}$		$0,6$		1
	$0,250...$				$0,3$
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	
			$0,14$		

Từ bảng biến thiên, suy ra $|f(t)| = 0,14 \Leftrightarrow |L(t) - L_2(t)|_{\min} = 0,14$ m.
Vậy sự chênh lệch về chiều dài của hai con cá sấu nhỏ nhất bằng 14 cm.

Bài 82. Có 24 con voi trong một khu bảo tồn động vật hoang dã. Người quản lý gắn thẻ sáu con voi bằng máy phát vô tuyến nhỏ và trả chúng về khu bảo tồn. Tháng tiếp theo, một người quản lý khác chọn ngẫu nhiên một con voi từ khu bảo tồn để gắn thẻ và lại trả về, nhưng anh ta không rõ là con voi này được gắn thẻ trước đó chưa. Giả sử không có con voi nào rời khỏi hoặc vào khu bảo tồn, hoặc chết hoặc sinh con, giữa thời điểm gắn thẻ và lựa chọn. Chọn ngẫu nhiên hai con voi trong khu bảo tồn, biết rằng hai con voi lấy ra có con voi được gắn thẻ, tính xác suất để trong khu bảo tồn có đúng sáu con voi được gắn thẻ (*làm tròn kết quả đến hàng phần trăm*).

Hướng dẫn giải. Gọi A là biến cố: "Có đúng 6 con voi được gắn thẻ"
B là biến cố: "Có 7 con voi được gắn thẻ"
C là biến cố: "Hai con voi lấy ra có ít nhất 1 con voi được gắn thẻ"
Ban đầu gắn thẻ cho 6 con trong 24 con voi nên $P(A) = \frac{6}{24} = 0,25$
Sau 1 tháng chọn ngẫu nhiên 1 con voi từ khu bảo tồn để gắn thẻ nên $P(B) = \frac{18}{24} = 0,75$
Ta có: $P(C|A) = 1 - \frac{C_{18}^2}{C_{24}^2} = \frac{41}{92}$;
$P(C|B) = 1 - \frac{C_{17}^2}{C_{24}^2} = \frac{35}{69}$
$\Rightarrow P(C) = P(A) \cdot P(C|A) + P(B) \cdot P(C|B)$
$= \frac{181}{368}$
Xác suất cần tìm là $P(A|C) = \frac{P(A) \cdot P(C|A)}{P(C)} = \frac{0,25 \cdot \frac{41}{92}}{\frac{181}{368}} \approx 0,23$

~~**Bài 83.**~~ Một trò chơi ở công viên giải trí, gồm cột thẳng đứng AB cố định được nối bằng tay đòn BC (thanh BC có thể di động). Trong không gian với hệ toạ độ cho trước, đơn vị mỗi trục là mét, mặt đất là mặt phẳng (Oxy), trục Oz hướng lên. Thanh đòn BC sẽ quay nhanh để tạo cảm giác mạnh cho người chơi. Biết rằng có hai thời điểm khác nhau mà đầu C đi qua các điểm có toạ độ lần lượt là $M(2;3;4)$ và $N(-2;5;8)$, đồng thời tại hai thời điểm đó, thanh đòn đều tạo với mặt đất một góc $30°$. Nếu điểm B có hoành độ dương, hãy tìm tung độ của B (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



✍ *Hướng dẫn giải.* Giả sử $B(a;b;c)$ $(a>0)$.

Ta có $\overrightarrow{BM}=(2-a;3-b;4-c)$;

$\overrightarrow{BN}=(-2-a;5-b;8-c)$.

Biết góc giữa BM, BN và mặt phẳng (Oxy) (có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}(0;0;1)$) (mặt đất) đều bằng 30°.

Suy ra $\begin{cases}\sin(BM,(Oxy))=|\cos(\overrightarrow{BM},\vec{n})|\\ \sin(BN,(Oxy))=|\cos(\overrightarrow{BN},\vec{n})|\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sin 30^\circ=\dfrac{|\overrightarrow{BM}\cdot\vec{n}|}{|\overrightarrow{BM}|\cdot|\vec{n}|}\\ \sin 30^\circ=\dfrac{|\overrightarrow{BN}\cdot\vec{n}|}{|\overrightarrow{BN}|\cdot|\vec{n}|}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{2}=\dfrac{|(2-a)\cdot 0+(3-b)\cdot 0+(4-c)\cdot 1|}{BM\cdot\sqrt{0^2+0^2+1}}\\ \dfrac{1}{2}=\dfrac{|(-2-a)\cdot 0+(5-b)\cdot 0+(8-c)\cdot 1|}{BN\cdot\sqrt{0^2+0^2+1}}\end{cases}$$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{2}=\dfrac{|4-c|}{BM}\\ \dfrac{1}{2}=\dfrac{|8-c|}{BN}\end{cases}$ $(*)$ Mà độ dài của thanh đòn BC là không đổi nên $BM=BN$.

Khi đó $(*)\Rightarrow|4-c|=|8-c|$

$$\Leftrightarrow\begin{bmatrix}4-c=8-c\\ 4-c=-(8-c)\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}4=8\quad(L)\\ 4-c=-8+c\Rightarrow c=6\quad(tm)\end{bmatrix}$$

Thay $c=6$ vào hệ phương trình $(*)$ ta được $\begin{cases}\dfrac{1}{2}=\dfrac{|4-6|}{BM}\\ \dfrac{1}{2}=\dfrac{|8-6|}{BN}\end{cases}\Rightarrow BM=BN=4.$

Suy ra $\overrightarrow{BM}=(2-a;3-b;-2)$;

$\overrightarrow{BN}=(-2-a;5-b;2)$.

Lại có $\begin{cases}BM=4\\ BN=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{(2-a)^2+(3-b)^2+(-2)^2}=4\\ \sqrt{(-2-a)^2+(5-b)^2+2^2}=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(2-a)^2+(3-b)^2+(-2)^2=16\\ (-2-a)^2+(5-b)^2+2^2=16\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^2 - 2.2.a + a^2 + 3^2 - 2.3.b + b^2 + 4 = 16 \\ (-2)^2 - 2.(-2).a + a^2 + 25 - 2.5.b + b^2 + 4 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - 4a + a^2 + 9 - 6b + b^2 + 4 - 16 = 0 \\ 4 + 4a + a^2 + 25 - 10b + b^2 + 4 - 16 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 - 4a - 6b + 1 = 0 \quad (1) \\ a^2 + b^2 + 4a - 10b + 17 = 0 \quad (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 - 4a - 6b + 1 = 0 \\ 8a - 4b + 16 = 0 \end{cases}$$ (trừ vế với vế của phương trình (2) cho phương trình (1) và giữ lại phương trình (1)) $$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 - 4a - 6b + 1 = 0 \quad (1) \\ 2a - b + 4 = 0 \Rightarrow 2a + 4 = b \end{cases}$$

$(1) \Leftrightarrow a^2 + (2a+4)^2 - 4a - 6(2a+4) + 1 = 0 \Leftrightarrow a^2 + 4a^2 + 2.2a.4 + 16 - 4a - 12a - 24 + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow 5a^2 + 16a - 4a - 12a - 7 = 0 \Leftrightarrow 5a^2 = 7 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -\sqrt{\frac{7}{5}} < 0 \quad (L) \\ a = \sqrt{\frac{7}{5}} > 0 \quad (tm) \end{array}\right.$$ Suy ra tung độ của B là $b = 2.\sqrt{\frac{7}{5}} + 4 \approx 6,37$.

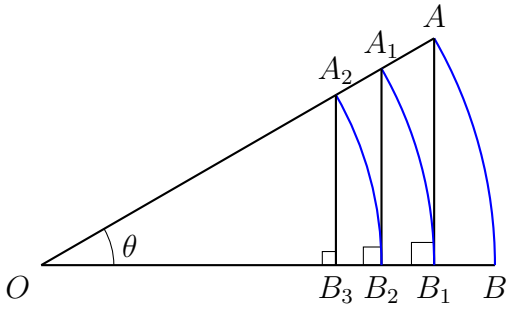
Bài 84. *Phương thức tính lãi kép là việc tính tiền lãi bằng cách lấy số tiền lãi của kì trước nhập vào vốn để tính lãi cho kì tiếp theo.*

Tỉ lệ lạm phát được tính bằng tỉ lệ phần trăm sự thay đổi giá của hàng hóa, dịch vụ trong một khoảng thời gian (thường là một năm). *Nếu tỉ lệ lạm phát của năm sau so với năm trước là i thì A đồng của năm trước có giá trị tương đương với $A(1+i)$ đồng của năm sau.*

Một người đầu tư bằng cách góp vốn 1 tỉ đồng vào công ty X trong 2 năm với lãi suất không đổi 8%/năm theo phương thức tính lãi kép. Giả sử trong 2 năm đó, tỉ lệ lạm phát mỗi năm lần lượt là $3,7\%$ và $4,2\%$. Gọi a (triệu đồng) là số tiền cả vốn lẫn lãi người đó nhận được sau 2 năm đầu tư. Gọi b (triệu đồng) là giá trị tương đương của số tiền vốn 1 tỉ đồng sau 2 năm có tính đến yếu tố lạm phát. Tính $a - b$ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Hướng dẫn giải. Số tiền cả vốn lẫn lãi người đó nhận được sau 2 năm đầu tư là:
$a = 1000(1+8\%)^2 = 1166,4$ (triệu đồng).
Gái trị tương đương của 1 tỉ đồng sau năm thứ nhất là: $1000(1+3,7\%) = 1037$ (triệu đồng).
Giá trị tương đương của 1 tỉ đồng sau hai năm là:
$b = 1037(1+4,2\%) = 1080,554$ (triệu đồng).
Ta có
$a - b = 1166,4 - 1080,554 = 85,846 \approx 85,8$ (triệu đồng).

Bài 85. Cho một hình quạt tròn AOB là một phần của hình tròn có bán kính 2025 và có tâm O, biết rằng $\widehat{AOB} = 30°$. Từ điểm A ta dựng AB_1 vuông góc với cạnh OB tại B_1, vẽ cung tròn tâm O bán kính OB_1 cắt OA tại A_1, tiếp tục dựng A_1B_2 vuông góc với cạnh OB tại B_2 rồi vẽ cung tròn tâm O bán kính OB_2 cắt OA tại $A_2, \ldots$ Tiếp tục như thế có các cung tròn $AB, A_1B_1, A_2B_2, \ldots$



Tính tổng vô hạn độ dài các cung tròn trên (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

✍ *Hướng dẫn giải.* Từ cách tạo hình và hình vẽ minh họa, ta có số đo của các cung tròn $AB, A_1B_1, A_2B_2, \ldots$ lần lượt là $l_1 = OB \cdot \theta = OB \cdot \frac{\pi}{6}$
$l_2 = OB_1 \cdot \frac{\pi}{6}$ mà $\cos\theta = \frac{OB_1}{OA}$.

$\Rightarrow OB_1 = OA\cos\theta = OB\cos 30^\circ$ (vì $OB = OA$)

Suy ra $l_2 = OB_1 \cdot \frac{\pi}{6} = OB\cos 30^\circ \cdot \frac{\pi}{6}$.

$l_3 = OB_2 \cdot \frac{\pi}{6}$ mà $\cos\theta = \frac{OB_2}{OA_1}$
$\Rightarrow OB_2 = OA_1\cos\theta = OB_1\cos 30^\circ$.

Suy ra $l_3 = OB_2 \cdot \frac{\pi}{6} = OB_1\cos 30^\circ \cdot \frac{\pi}{6}$.

$\ldots$

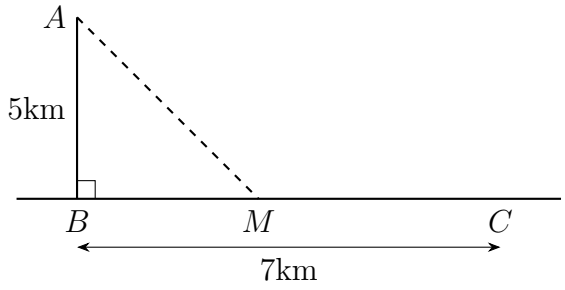
Ta thấy $\frac{l_2}{l_1} = \frac{OB\cos 30^\circ \cdot \frac{\pi}{6}}{OB \cdot \frac{\pi}{6}} = \cos 30^\circ$;

$\frac{l_3}{l_2} = \frac{OB_1\cos 30^\circ \cdot \frac{\pi}{6}}{OB_1 \cdot \frac{\pi}{6}} = \cos 30^\circ; \ldots$

Do đó độ dài các cung tròn $AB, A_1B_1, A_2B_2, \ldots$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu tiên $u_1 = OB \cdot \frac{\pi}{6} = 2025 \cdot \frac{\pi}{6}$ và công bội $q = \cos 30^\circ$.

Khi đó tổng vô hạn độ dài các cung tròn trên là $S = \frac{u_1}{1-q} = \frac{2025 \cdot \frac{\pi}{6}}{1-\cos 30^\circ} \approx 7914$.

Bài 86. Một chiếc thuyền ở vị trí A cách bờ biển một khoảng AB bằng 5km. Trên bờ biển có một cái kho ở vị trí C cách B một khoảng là 7km. Người lái thuyền dự định chèo thuyền từ A đến điểm M trên bờ biển với vận tốc $1,2$ m/s rồi đi bộ đến C với vận tốc $1,8$ m/s. Điểm M cách B bao nhiêu km để người đó đến kho nhanh nhất?



✍ *Hướng dẫn giải.* Gọi x là khoảng cách BM $(0 \le x \le 7$, đơn vị: km).

Quãng đường chèo thuyền là $AM = \sqrt{x^2+25}$ (km).

Quãng đường đi bộ là $MC = 7 - x$ (km).

Tổng thời gian di chuyển là: $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+25}}{1,2} + \dfrac{7-x}{1,8}$.

Xét hàm số trên đoạn $[0;7]$, ta có $f'(x) = \dfrac{x}{1,2\sqrt{x^2+25}} - \dfrac{1}{1,8}$.

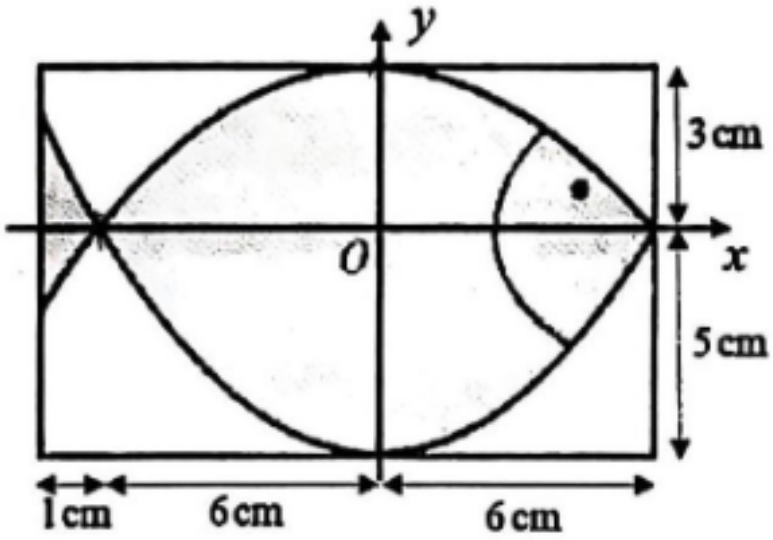
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1,8x = 1,2\sqrt{x^2+25} \Leftrightarrow \dfrac{3}{2}x = \sqrt{x^2+25} \Leftrightarrow \dfrac{9}{4}x^2 = x^2+25 \Leftrightarrow \dfrac{5}{4}x^2 = 25 \Leftrightarrow x^2 = 20$.

Suy ra $x = 2\sqrt{5} \approx 4,47$ (km).

Vậy điểm M cách B khoảng $2\sqrt{5} \approx 4,47$ km thì người đó đến kho nhanh nhất.

Bài 87. Họa sĩ thiết kế logo hình con cá cho một doanh nghiệp kinh doanh hải sản. Logo là hình phẳng giới hạn bởi hai parabol với các kích thước được cho trong hình sau (đơn vị trên mỗi

trục tọa độ là cm).



Diện tích logo bằng bao nhiêu cm^2?

Hướng dẫn giải.

- Parabol trên (P_1) có đỉnh $V_1(0;3)$ và đi qua $(6;0)$: $y_1 = -\dfrac{1}{12}x^2 + 3$.
- Parabol dưới (P_2) có đỉnh $V_2(0;-5)$ và đi qua $(6;0)$: $y_2 = \dfrac{5}{36}x^2 - 5$.
- Diện tích phần thân cá (x từ -6 đến 6):

$$S_1 = \int_{-6}^{6} (y_1 - y_2)dx = \int_{-6}^{6} \left(-\frac{2}{9}x^2 + 8\right) dx = 64\,(\text{cm}^2)$$

- Diện tích phần đuôi cá (x từ -7 đến -6):

$$S_2 = \int_{-7}^{-6} (y_2 - y_1)dx = \int_{-7}^{-6} \left(\frac{2}{9}x^2 - 8\right) dx = \frac{38}{27}\,(\text{cm}^2)$$

- Tổng diện tích Logo là:

$$S = S_1 + S_2 = 64 + \frac{38}{27} = \frac{1766}{27} \approx 65,4\,(\text{cm}^2)$$

Bài 88. Một xưởng mộc sản xuất hai loại sản phẩm: bàn gỗ và ghế gỗ. Xưởng có tối đa 240 đơn vị gỗ và tổng thời gian nhân công là 100 giờ. Để làm 1 cái bàn cần 5 đơn vị gỗ và 2 giờ công. Để làm 1 cái ghế cần 2 đơn vị gỗ và 1 giờ công. Mỗi cái bàn lãi 600.000 đồng, mỗi cái ghế lãi 300.000 đồng. Lợi nhuận của xưởng mộc lớn nhất là bao nhiêu triệu đồng?

Hướng dẫn giải.

Gọi x, y lần lượt là số lượng bàn và ghế xưởng mộc sản xuất $(x, y \geq 0)$. Dựa vào các hạn chế về tài nguyên, ta có hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} 5x + 2y \leq 240 \\ 2x + y \leq 100 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

Hàm lợi nhuận (đơn vị: triệu đồng) là: $F(x,y) = 0,6x + 0,3y$.

Miền nghiệm của hệ là đa giác có các đỉnh: $O(0;0)$, $A(0;100)$, $B(40;20)$, $C(48;0)$. Tính giá trị của hàm F tại các đỉnh:

- $F(0;0)=0$
- $F(0;100)=0,6\cdot 0+0,3\cdot 100=30$
- $F(40;20)=0,6\cdot 40+0,3\cdot 20=30$
- $F(48;0)=0,6\cdot 48+0,3\cdot 0=28,8$

Vậy lợi nhuận lớn nhất của xưởng mộc là 30 triệu đồng.

Bài 89. Cần chế tạo các lon nước hình trụ kín có thể tích $V_0=350$ cm^3. Việc cắt tấm kim loại để làm mặt bên của lon sẽ không gây lãng phí, nhưng mỗi mặt đáy phải được cắt từ một miếng kim loại hình vuông và phần thừa sẽ được loại bỏ. Hãy tìm chiều cao của lon nước sao cho chi ít tốn nguyên liệu nhất (*làm tròn đến hàng phần trăm của cm*).

Hướng dẫn giải. Giả sử lon nước có chiều cao là h (cm) và bán kính đáy là r (cm).

Ta có thể tích lon nước là

$$V=\pi r^2\cdot h=350\Rightarrow h=\frac{350}{\pi r^2}.$$

Diện tích xung quanh của lon nước là $S_{xq}=2\pi rh$ (cm^2).

Vì hai đáy được chế tạo từ hai miếng kim loại hình vuông (có cạnh $2r$) nên diện tích hai miếng kim loại hình vuông làm đáy lon là $S_d=2\cdot(2r)^2=8r^2$ (cm^2).

Suy ra tổng diện tích miếng kim loại cần dùng để chế tạo 1 lon nước là

$$S=S_{xq}+S_d=2\pi rh+8r^2\quad(*)$$

Thay $h=\frac{350}{\pi r^2}$ vào (*) ta được

$$S=2\pi r\cdot\frac{350}{\pi r^2}+8r^2=\frac{700}{r}+8r^2$$

Để ít tốn nguyên liệu nhất thì $S_{\min}$, do đó ta đi tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $S(r)=\dfrac{700}{r}+8r^2$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

Ta có $S'(r)=-\dfrac{700}{r^2}+16r=0$

$$\Leftrightarrow 16r=\frac{700}{r^2}\Leftrightarrow 16r^3=700\Leftrightarrow r^3=\frac{700}{16}\Leftrightarrow r=\sqrt[3]{\frac{700}{16}}=\sqrt[3]{\frac{175}{4}}.$$

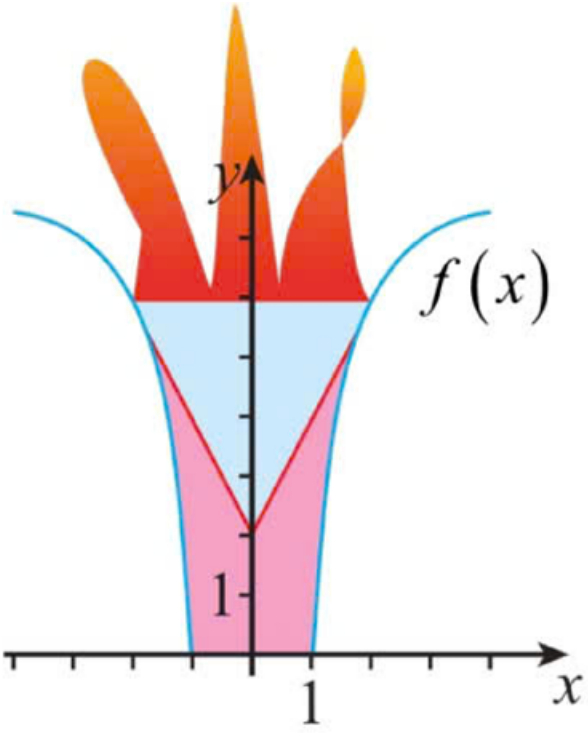
Bảng biến thiên:

r	0		$\sqrt[3]{\frac{175}{4}}$		$+\infty$
$S'(r)$		$-$	0	$+$	
$S(r)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Từ bảng biến thiên, ta suy ra giá trị nhỏ nhất của hàm số là $S_{\min}=S\left(\sqrt[3]{\dfrac{175}{4}}\right)$ hay ít tốn nguyên liệu nhất khi $r=\sqrt[3]{\dfrac{175}{4}}$.

Suy ra $h=\dfrac{350}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{175}{4}}\right)^2}\approx 8,97$ (cm).

Bài 99. Để phục vụ cho Thế vận hội Olympic, một ngọn đuốc kim loại lớn đã được chế tạo. Ngọn đuốc phải đạt các yêu cầu sau: chiều cao 7,5 m; bề rộng ở đỉnh là 8 m và ở đáy là 2 m. Đường cong biên dạng của ngọn đuốc đối xứng được mô tả bằng một hàm số có dạng $f(x) = a - \dfrac{b}{x^2}$, đường giới hạn bên trong d của ngọn đuốc là tiếp tuyến của đồ thị $f(x)$ kẻ từ điểm $A(2;0)$ (đơn vị trên các trục tọa độ tính bằng mét). Gọi S là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, đường thẳng d, trục Ox, trục Oy. Ngọn đuốc được chế tạo khi quay hình S quanh trục Oy, tính thể tích của ngọn đuốc theo đơn vị mét khối (*làm tròn kết quả đến hàng phần mười*).



✍ *Hướng dẫn giải.* Từ giả thiết, ta thấy đồ thị hàm số $y = f(x)$ đi qua hai điểm $(1;0)$ và $(4;7,5)$. Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} f(1) = 0 \\ f(4) = 7,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - \dfrac{b}{1^2} = 0 \\ a - \dfrac{b}{4^2} = 7,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 0 \\ a - \dfrac{b}{16} = 7,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ b - \dfrac{b}{16} = 7,5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ \dfrac{16b - b}{16} = 7,5 \Rightarrow b = 8 = a \end{cases}.$$

Suy ra $y = f(x) = 8 - \dfrac{8}{x^2}$.

Ta có $f'(x) = 0 - \dfrac{(8)' \cdot x^2 - 8 \cdot (x^2)'}{x^4}$

$= -\dfrac{-8 \cdot 2x}{x^4} = \dfrac{16}{x^3}$.

Giả sử đường thẳng d là tiếp tuyến của đồ thị $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ x_0 $(x_0 > 0)$. Phương trình đường thẳng d là $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

$\Leftrightarrow y = \dfrac{16}{x_0^3}(x - x_0) + 8 - \dfrac{8}{x_0^2}$

Vì $A(0;2) \in d$ nên ta có $\dfrac{16}{x_0^3}(0-x_0)+8-\dfrac{8}{x_0^2}=2$

$\Leftrightarrow \dfrac{16}{x_0^3}(-x_0)-\dfrac{8}{x_0^2}+6=0 \Leftrightarrow -\dfrac{16}{x_0^2}-\dfrac{8}{x_0^2}+6=0$

$\Leftrightarrow -\dfrac{24}{x_0^2}=-6 \Leftrightarrow x_0^2=4 \Leftrightarrow x_0=2$ (vì ta lấy giá trị $x_0>0$).

Suy ra tiếp điểm có tung độ là $y_0=f(2)=8-\dfrac{8}{2^2}=6$.

Suy ra đường thẳng d là $y=\dfrac{16}{2^3}(x-2)+8-\dfrac{8}{2^2} \Leftrightarrow y=2(x-2)+8-2 \Leftrightarrow y=2x-4+6 \Leftrightarrow y=2x+2$.

Ta có $y=f(x): y=8-\dfrac{8}{x^2} \Leftrightarrow \dfrac{8}{x^2}=8-y \Leftrightarrow \dfrac{8}{8-y}=x^2=f^2(y)$.

Tiếp đến là đường thẳng $d: y=2x+2 \Leftrightarrow y-2=2x \Leftrightarrow x=\dfrac{y-2}{2}=d(y)$.

Khi đó thể tích của ngọn đuốc là

$$V=\pi\int_0^2 f^2(y)\,dy+\pi\int_2^6 \left[f^2(y)-d(y)^2\right]\,dy=\pi\int_0^2 \frac{8}{8-y}\,dy+\pi\int_2^6 \left[\frac{8}{8-y}-\left(\frac{y-2}{2}\right)^2\right]\,dy$$

$\approx 18,1$ (m^3).

Bài 91. Túi A chứa 6 lá bài ghi các số tự nhiên từ 1 đến 6. Túi B và C mỗi túi chứa 3 lá bài ghi các số tự nhiên từ 1 đến 3.

- M (người thứ nhất) rút ngẫu nhiên 1 lá bài từ túi A.
- N (người thứ hai) rút ngẫu nhiên 1 lá bài từ túi B.
- P (người thứ ba) rút ngẫu nhiên 1 lá bài từ túi C.

Biết rằng số trên lá bài của M lớn hơn số trên lá bài của N, khi đó xác suất để số trên lá bài của M lớn hơn tổng số trên lá bài của N và P là $\dfrac{a}{b}$ (trong đó $a,b \in \mathbb{N}$ và phân số $\dfrac{a}{b}$ tối giản). Tính $3a^4+10b^4$.

Hướng dẫn giải. Gọi m,n,p lần lượt là số trên lá bài của M, N và P.

Khi đó $m \in \{1,2,3,4,5,6\}$; $n \in \{1,2,3\}$; $p \in \{1,2,3\}$.

Gọi A là biến cố: "Số trên lá bài của M lớn hơn số trên lá bài của N" (tức là $m>n$).

Gọi B là biến cố: "Số trên lá bài của M lớn hơn tổng số trên lá bài của N và P" (tức là $m>n+p$).

Suy ra yêu cầu bài toán: $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}$

Các cặp (m,n) thỏa mãn $m>n$ là:

- Nếu $n=1: m \in \{2,3,4,5,6\}$ (5 trường hợp).
- Nếu $n=2: m \in \{3,4,5,6\}$ (4 trường hợp).
- Nếu $n=3: m \in \{4,5,6\}$ (3 trường hợp).

Tổng số cặp (m,n) thỏa mãn là $5+4+3=12$.
Vì p có thể là bất kỳ số nào trong $\{1,2,3\}$ nên số cách chọn m,n,p thỏa mãn $m>n$ là $n(A)=12\times 3=36$.

Lưu ý rằng nếu $m>n+p$ thì chắc chắn $m>n$ (vì $p\geq 1$), nên ta chỉ cần tìm các bộ (m,n,p)

thỏa mãn $m > n + p$.

n	p	$n+p$	m có thể chọn để thỏa mãn $m > n + p$	Số cách
1	1	2	3, 4, 5, 6	4
1	2	3	4, 5, 6	3
1	3	4	5, 6	2
2	1	3	4, 5, 6	3
2	2	4	5, 6	2
2	3	5	6	1
3	1	4	5, 6	2
3	2	5	6	1
3	3	6	Không có	0

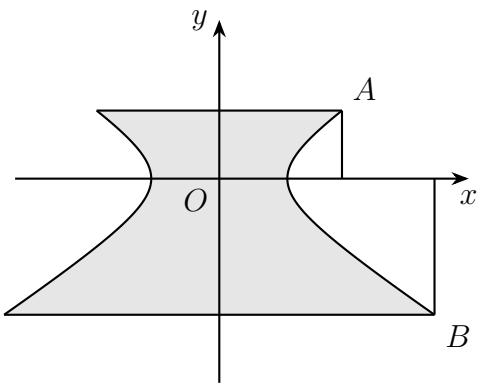
Vậy $n(A \cap B) = 18$ suy ra xác suất cần tìm là $P(B|A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$

$\Rightarrow 3a^4 + 10b^4 = 163$.

2. Một tháp làm nguội của một nhà máy có mặt cắt là hình hypebol có phương trình $\frac{x^2}{81^2} - \frac{y^2}{40^2} = 1$. Biết chiều cao của tháp là 240 m và khoảng cách từ nóc tháp đến tâm đối xứng của hypebol bằng một nửa khoảng cách từ tâm đối xứng tới đáy. Tính bán kính nóc của tháp (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị của mét).



✍ *Hướng dẫn giải.*



Giả sử gắn trục tọa độ Oxy như hình trên.

Gọi khoảng cách từ nóc tháp đến tâm đối xứng của hypebol là h. Khi đó, khoảng cách từ đáy tháp đến tâm đối xứng của hypebol là $2h$.

Ta có: $h + 2h = 240 \Rightarrow h = 80$ m.

Tung độ của điểm A bằng khoảng cách từ nóc tháp tới tâm đối xứng của hypebol nên $y_A = 80$

Điểm A nằm trên hypebol nên tọa độ điểm A thỏa mãn phương trình

$\dfrac{x^2}{81^2} - \dfrac{y^2}{40^2} = 1.$

Do đó $\dfrac{x^2}{81^2} - \dfrac{80^2}{40^2} = 1 \Rightarrow x_A = 81\sqrt{5} \approx 181.$

Vậy bán kính của nóc tháp là 181 m.

Bài 93. Do lực cản của không khí, vận tốc của một người nhảy dù nặng 80 kg được mô hình hoá bởi hàm số $v(t) = \frac{k(e^{\beta t}-1)}{e^{\beta t}+1}$ (trong đó t là thời gian tính bằng giây kể từ khi nhảy và k, β là các hằng số). Biết rằng vận tốc của người đó sau một giây và 2 giây kể từ khi nhảy lần lượt là $10,4$ m/s và 20 m/s. Tính vận tốc của người này sau 6 giây (kết quả làm tròn đến hàng phần mười theo đơn vị m/s).



✍ *Hướng dẫn giải.* Từ dữ kiện: "vận tốc của người đó sau một giây và 2 giây kể từ khi nhảy lần

lượt là 10,4 m/s và 20 m/s" ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} v(1)=10,4 \\ v(2)=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{k\left(e^{\beta\cdot 1}-1\right)}{e^{\beta\cdot 1}+1}=10,4 \\ \dfrac{k\left(e^{\beta\cdot 2}-1\right)}{e^{\beta\cdot 2}+1}=20 \end{cases} \qquad (I)$$

Đặt $e^{\beta}=x$ $(x>0)$ suy ra $e^{2\beta}=x^2$.

Khi đó hệ phương trình

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{k(x-1)}{x+1}=10,4 \\ \dfrac{k(x^2-1)}{x^2+1}=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{20(x^2+1)}{(x^2-1)}\cdot\dfrac{(x-1)}{x+1}=10,4 \quad (*) \\ k=\dfrac{20(x^2+1)}{(x^2-1)} \end{cases}$$

Phương trình (*)

$$\Leftrightarrow \frac{20(x^2+1)}{(x-1)(x+1)}\cdot\frac{(x-1)}{x+1}=10,4 \Leftrightarrow \frac{20(x^2+1)}{(x+1)^2}=10,4$$

$$\Leftrightarrow 20(x^2+1)=10,4(x+1)^2 \Leftrightarrow 20x^2+20=10,4(x^2+2x+1) \Leftrightarrow 20x^2+20=10,4x^2+20,8x+10,4$$

$$\Leftrightarrow 20x^2+20-10,4x^2-20,8x-10,4=0 \Leftrightarrow 9,6x^2-20,8x+9,6=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=\dfrac{3}{2}>0 \text{ (tm)} \Rightarrow k_1=52; e^{\beta}=\dfrac{3}{2} \\ x_2=\dfrac{2}{3}>0 \text{ (tm)} \Rightarrow k_2=-52; e^{\beta}=\dfrac{2}{3} \end{array}\right.$$

Khi đó ta có các hàm số $v(t)$ là

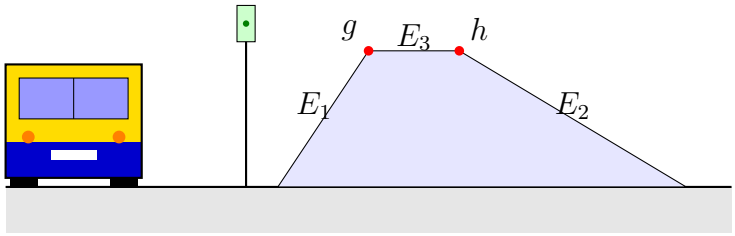
$$v_1(t)=\frac{52\left[\left(\frac{3}{2}\right)^t-1\right]}{\left(\frac{3}{2}\right)^t+1}; v_2(t)=\frac{-52\left[\left(\frac{2}{3}\right)^t-1\right]}{\left(\frac{2}{3}\right)^t+1}=\frac{-52\left[\left(\frac{2}{3}\right)^t-1\right]\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^t}{\left(\frac{3}{2}\right)^t\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^t+\left(\frac{3}{2}\right)^t} \text{ (nhân cả tử và mẫu với } \left(\frac{3}{2}\right)^t)$$

$$=\frac{-52\left[\left(\frac{2}{3}\right)^t\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^t-\left(\frac{3}{2}\right)^t\right]}{1+\left(\frac{3}{2}\right)^t}=\frac{-52\left[1-\left(\frac{3}{2}\right)^t\right]}{1+\left(\frac{3}{2}\right)^t}=\frac{52\left[\left(\frac{3}{2}\right)^t-1\right]}{1+\left(\frac{3}{2}\right)^t}=v_1(t).$$

Do đó hai hàm $v_2(t), v_1(t)$ là một.

Vậy $v(6)=\dfrac{52\left[\left(\frac{3}{2}\right)^6-1\right]}{\left(\frac{3}{2}\right)^6+1}\approx 43,6$ (m/s).

Bài 94. ột đê chắn tiếng ồn được xây bằng bê tông có hình dạng một lăng trụ tứ giác với mặt phẳng cắt ngang là một hình thang. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, đơn vị trên mỗi trục tính bằng mét, mặt đất trùng với mặt phẳng (Oxy). Một mặt của con đê nằm trên mặt đất và mặt phía trên nằm trong mặt phẳng $(E_3): z=5$, hai mặt sườn bên nằm trong hai mặt phẳng $(E_1): 3x+4y-5z+13=0$ và $(E_2): 3x+4y+10z-87=0$ (tham khảo hình vẽ). Biết rằng con đê dài 100 mét, tính thể tích của khối bê tông làm con đê trên.



Hướng dẫn giải. Vì con đê có dạng lăng trụ tứ giác nên hai mặt phẳng đáy $(E_3): z=5$ và $(Oxy): z=0$ song song với nhau. Suy ra chiều cao $h=d((E_3),(Oxy))=5$.

Đầu tiên, ta tính độ dài đáy lớn a của con đê.

Gọi $\begin{cases} d_1 = (E_1) \cap (Oxy) \\ d_2 = (E_2) \cap (Oxy) \end{cases}$ suy ra $d_1 // d_2$.

$a = d(d_1, d_2)$. Khi đó $a = d(d_1, d_2)$. $(Oxy) : z = 0$, $(E_1) : 3x + 4y - 5z + 13 = 0$,$(E_2) : 3x + 4y + 10z - 87 = 0$

Vì $d_1 = (E_1) \cap (Oxy)$ nên đường thẳng d_1 thỏa mãn hệ phương trình $\begin{cases} z = 0 \\ 3x + 4y - 5z + 13 = 0 \end{cases} \quad (*)$

Thay $z = 0$ vào phương trình $(*)$ ta được $d_1 : 3x + 4y + 13 = 0$.

Tương tự, vì $d_2 = (E_2) \cap (Oxy)$ nên đường thẳng d_2 thỏa mãn hệ phương trình $\begin{cases} z = 0 \\ 3x + 4y + 10z - 87 = 0 \end{cases}$

Thay $z = 0$ vào phương trình $(**)$ ta được $d_2 : 3x + 4y - 87 = 0$.

Lấy $A(-3; -1; 0) \in d_1$. Vì $d_1 // d_2$ nên (đáy lớn)

$$\begin{aligned} a &= d(d_1, d_2) = d(A, d_2) \\ &= \frac{|3 \cdot (-3) + 4(-1) - 87|}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 0^2}} \\ &= \frac{100}{5} = 20 \text{ (m)}. \end{aligned}$$

Tương tự như tính độ dài đáy lớn, ta đi tính độ dài đáy nhỏ.

Gọi $\begin{cases} d_3 = (E_1) \cap (E_3) \\ d_4 = (E_2) \cap (E_3) \end{cases}$. Khi đó $d_3 // d_4$. $b = d(d_3, d_4)$. $(E_3) : z = 5$, $(E_1) : 3x+4y-5z+13 = 0$, $(E_2) : 3x + 4y + 10z - 87 = 0$.

Vì $d_3 = (E_1) \cap (E_3)$ nên đường thẳng d_3 thỏa mãn hệ phương trình $\begin{cases} z = 5 \\ 3x + 4y - 5z + 13 = 0 \end{cases} \quad (1)$

Thay $z = 5$ vào phương trình (1) ta được $d_3 : 3x + 4y - 5 \cdot 5 + 13 = 0 \Leftrightarrow d_3 : 3x + 4y - 12 = 0$.

Vì $d_4 = (E_2) \cap (E_3)$ nên đường thẳng d_4 thỏa mãn hệ phương trình $\begin{cases} z = 5 \\ 3x + 4y + 10z - 87 = 0 \end{cases} \quad (2)$

Thay $z = 5$ vào phương trình (2) ta được $d_4 : 3x + 4y + 10 \cdot 5 - 87 = 0 \Leftrightarrow d_4 : 3x + 4y - 37 = 0$.

Chọn $B(4; 0; 0) \in d_3$. Khi đó

$$\begin{aligned} b &= d(d_3, d_4) = d(B, d_4) \\ &= \frac{|3 \cdot 4 + 4 \cdot 0 - 37|}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 0^2}} = \frac{25}{5} = 5 \text{ (m)}. \end{aligned}$$

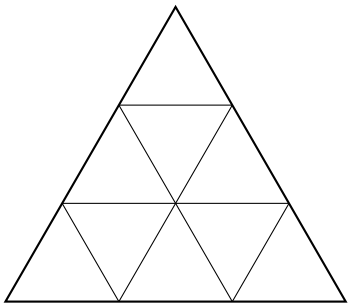
Suy ra diện tích đáy của con đê là

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{h(a+b)}{2} \\ &= \frac{5(20+5)}{2} = 62,5 \text{ (m}^2\text{)}. \end{aligned}$$

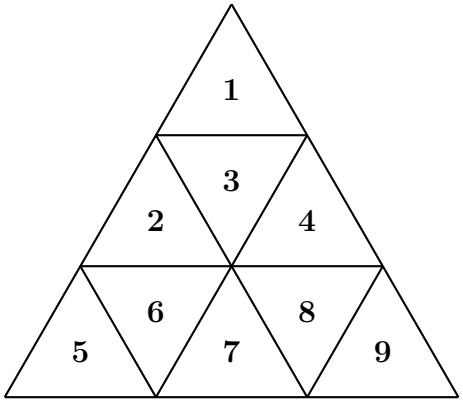
Vậy thể tích của đê là $V = 100S(x) = 100 \cdot 62,5 = 6250 \text{ (m}^3\text{)}$.

Bài 95 Bé Dũng có một tam giác đều lớn được chia thành 9 tam giác đều nhỏ hơn gồm 3 hàng: hàng trên cùng có 1 tam giác, hàng giữa có 3 tam giác, hàng dưới cùng có 5 tam giác. Bé Dũng

có 3 màu để tô khác nhau là Đỏ, Xanh, Vàng. Bé tô mỗi tam giác nhỏ bằng một trong ba màu đó với điều kiện là "không có hai tam giác nhỏ chung cạnh nào lại có cùng màu". Có bao nhiêu cách khác nhau để bé Dũng tô màu tam giác lớn này?



✍ *Hướng dẫn giải.* Ta đánh số các tam giác như hình vẽ sau:



Có 3 cách để chọn để tô màu cho tam giác số 1.

Có 2 cách để tô màu cho tam giác số 3.

TH1 : Hai tam giác 2 và 4 cùng màu

Có 2 cách để tô tam giác 2 và 4 cùng màu

◈ TH 1.1: Hai tam giác 6 và 8 cùng màu

- ★ Có 2 cách để tô tam giác 6 và 8 cùng màu
- ★ Có $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ cách để tô 3 tam giác 5, 7, 9

◈ TH 1.2: Hai tam giác 6 và 8 khác màu

- ★ Có 2 cách để tô tam giác 6 và 8 khác màu
- ★ Có $2 \cdot 1 \cdot 2 = 4$ cách để tô 3 tam giác 5, 7, 9

TH2 : Hai tam giác 2 và 4 khác màu

Có 2 cách để tô tam giác 2 và 4 khác màu

◈ TH 2.1: Hai tam giác 6 và 8 cùng màu

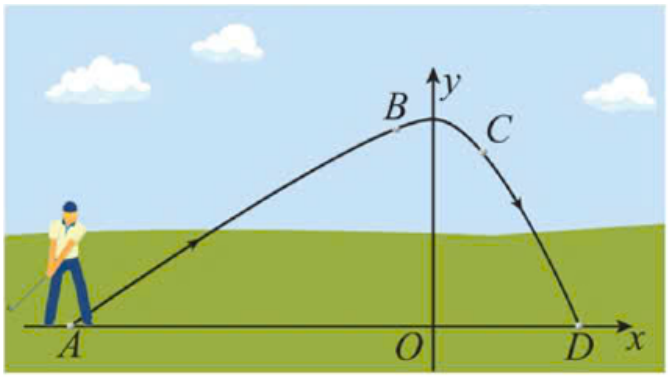
- ★ Có 1 cách để tô tam giác 6 và 8 cùng màu
- ★ Có $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ cách để tô 3 tam giác 5, 7, 9

◈ TH 2.2: Hai tam giác 6 và 8 khác màu

- ★ Có 3 cách để tô tam giác 6 và 8 khác màu
- ★ Có $2 \cdot 1 \cdot 2 = 4$ cách để tô 3 tam giác 5, 7, 9

Vậy có tất cả: $3 \cdot 2 \cdot [2 \cdot (16 + 8) + 2 \cdot (8 + 12)] = 528$ cách.

Bài 96. Xét trong hệ trục tọa độ Oxy (đơn vị mỗi trục là mét), có một sân golf thu nhỏ, điểm phát bóng là điểm A, điểm đặt lỗ là điểm $D\left(\frac{25}{9};0\right)$, đường cong BC là một phần của đồ thị hàm số bậc ba $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ với $B\left(-1;\frac{9}{2}\right)$, $C(1;4)$, trong đó điểm B là điểm uốn của đồ thị hàm số $f(x)$. Để hoàn thành lỗ này, người chơi đặt bóng tại điểm $A(p;0)$, quả bóng chạy theo đường thẳng AB, đi theo đường cong BC rồi tiếp tục đi theo đường thẳng CD (tham khảo hình vẽ). Biết rằng AB và CD là các tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x)$ lần lượt tại các điểm B và C. Tính p^4.



Hướng dẫn giải. Gọi $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

Ta có $f'(x)=3ax^2+2bx+c \Rightarrow f''(x)=6ax+2b$.

Ta có B,C thuộc đồ thị hàm số $f(x)$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} f(-1)=\dfrac{9}{2} \\ f(1)=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a+b-c+d=\dfrac{9}{2} \\ a+b+c+d=4 \end{cases} \quad (1)$$

Lại có B là điểm uốn của đồ thị hàm số $f(x)$ nên ta có

$f''(-1)=0 \Leftrightarrow -6a+2b=0 \quad (2)$.

Vì CD là tiếp tuyến của $f(x)$ tại C nên ta có $f'(1)$ bằng với hệ số góc của đường thẳng CD.

Hệ số góc của đường thẳng CD là

$$k_{CD}=\frac{y_D-y_C}{x_D-x_C}=\frac{0-4}{\frac{25}{9}-1}=\frac{-4}{\frac{16}{9}}=-\frac{9}{4}=f'(1) \Leftrightarrow 3a+2b+c=-\frac{9}{4} \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) ta được hệ 4 phương trình 4 ẩn $\Leftrightarrow \begin{cases} -a+b-c+d=\dfrac{9}{2} & (1) \\ a+b+c+d=4 & (2) \\ -6a+2b=0 \\ 3a+2b+c=-\dfrac{9}{4} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -a+b-c+d=\dfrac{9}{2} \\ 2a+2c=-\dfrac{1}{2} \\ -6a+2b=0 \\ 3a+2b+c=-\dfrac{9}{4} \end{cases}$ (lấy phương trình (2) trừ phương trình (1))

Đến đây ta bấm máy tính tìm nghiệm của hệ phương trình 3 ẩn a,b,c.

Ta được kết quả $\begin{cases} a=-\dfrac{1}{4} \\ b=-\dfrac{3}{4} \\ c=0 \end{cases}$. Thay lại vào phương trình $-a+b-c+d=\dfrac{9}{2}$ để tìm d.

Suy ra $d=\dfrac{9}{2}+a-b+c=\dfrac{9}{2}+\left(-\dfrac{1}{4}\right)-\left(-\dfrac{3}{4}\right)+0=5$

Ta có $f'(x)=-\dfrac{3}{4}x^2-\dfrac{3}{2}x$.

Đường thẳng AB là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x)$ tại B có phương trình là:

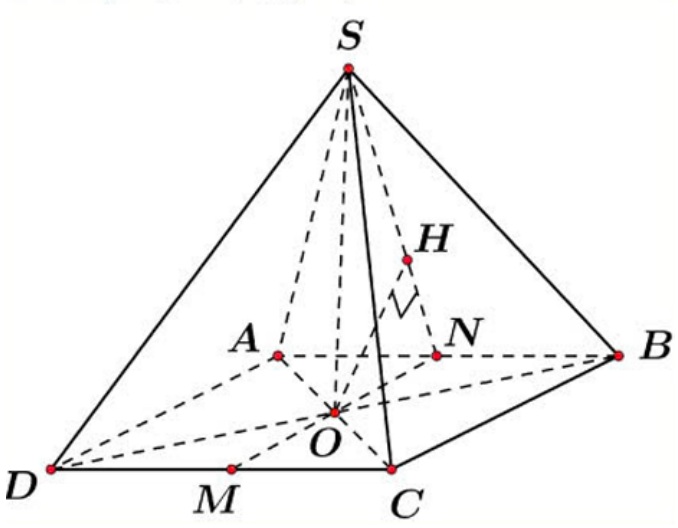
$AB: y=f'(-1)(x+1)+f(-1) \Leftrightarrow y=\left[-\dfrac{3}{4}\cdot(-1)^2-\dfrac{3}{2}\cdot(-1)\right](x+1)+\dfrac{9}{2} \Leftrightarrow y=\dfrac{3}{4}(x+1)+\dfrac{9}{2}$

Mà $A(p;0)\in AB$ nên: $0=\dfrac{3}{4}(p+1)+\dfrac{9}{2} \Leftrightarrow \dfrac{3}{4}(p+1)=-\dfrac{9}{2} \Leftrightarrow p+1=-6 \Leftrightarrow p=-7$.

Vậy $p^4=(-7)^4=2401$.

Bài 97. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $\sqrt{3}$, khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SAB) bằng $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

Hướng dẫn giải.



Gọi O là giao điểm của AC và BD.

Vì $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều (đáy là hình vuông) nên $SO\perp(ABCD)$.

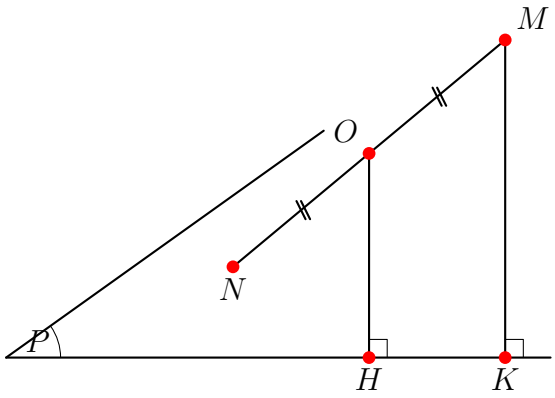
Suy ra thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là: $V=\frac{1}{3}SO\cdot S_{ABCD}=\frac{1}{3}SO\cdot(\sqrt{3})^2=SO$

Do đó để tính thể tích khối chóp đã cho, ta đi tính chiều cao SO.

Gọi M,N lần lượt là trung điểm của CD,AB.

Ta có $CD//AB$, mà $\begin{cases} AB\subset(SAB) \\ CD\not\subset(SAB) \end{cases}$ nên $CD//(SAB)$.

Suy ra $d(C,(SAB))=d(M,(SAB))$.



Vì O là trung điểm của MN nên $d(M,(SAB))=2d(O,(SAB))$.

Suy ra $d(O,(SAB))=\frac{1}{2}d(C,(SAB))=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{6}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{4}$.

Ta có $SO\perp(ABCD)\Rightarrow SO\perp AB$. Mà $AB\perp ON$ nên suy ra $AB\perp(SON)$.

Kẻ $OH\perp SN$ $(H\in SN)$. Khi đó $\begin{cases}OH\perp SN\\OH\perp AB\end{cases}\Rightarrow OH\perp(SAB)$.

$\Rightarrow d(O,(SAB))=OH=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

Trong tam giác vuông SON, ta có

$\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{SO^2}+\frac{1}{ON^2}\Rightarrow\frac{1}{SO^2}=\frac{1}{OH^2}-\frac{1}{ON^2}=\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2}-\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{4}{3}$.

Suy ra $\dfrac{1}{SO^2}=\dfrac{4}{3}\Leftrightarrow SO^2=\dfrac{3}{4}\Leftrightarrow SO=\sqrt{\dfrac{3}{4}}$.

Vậy thể tích khối chóp đã cho là $V=SO=\sqrt{\dfrac{3}{4}}\approx 0,9$ (đvtt).

Bài 98. Một người nông dân muốn trộn ba loại phân bón A, B, C để bón cho cây ăn quả. Tỷ lệ thành phần Nitrogen, Phosphorus, Kali (N : P : K) trong mỗi loại phân bón như sau:

+ Phân bón A: tỉ lệ N : P : K là 10 : 8 : 12
+ Phân bón B: tỉ lệ N : P : K là 5 : 15 : 10
+ Phân bón C: tỉ lệ N : P : K là 18 : 6 : 9

Người nông dân muốn tạo ra hỗn hợp phân bón có tỷ lệ N : P : K là 12 : 10 : 11. Khi đó tỉ lệ phân bón A và phân bón B bằng bao nhiêu? *Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.*

Hướng dẫn giải.

Gọi x,y,z lần lượt là tỷ lệ khối lượng phân bón A,B,C trong hỗn hợp $\Rightarrow x+y+z=1$.

Theo đề bài ta có hệ phương trình: $\begin{cases}\frac{10}{30}x+\frac{5}{30}y+\frac{18}{33}z=\frac{12}{33}\\\frac{8}{30}x+\frac{15}{30}y+\frac{6}{33}z=\frac{10}{33}\\\frac{12}{30}x+\frac{10}{30}y+\frac{9}{33}z=\frac{11}{33}\end{cases}$

$\Rightarrow\dfrac{x}{y}=\dfrac{65}{56}\approx 1,16$.

Bài 99. Gia đình ông Tuấn đi cắm trại tại một ngôi nhà ở vùng ngoại ô. Nhiệt độ ngoài trời ở nơi này ổn định ở mức $-6°$C. Trong đêm, hệ thống máy sưởi bị hỏng. Khi gia đình ông Tuấn thức dậy, nhiệt độ trong ngôi nhà lúc này là $22°$C thay vì mức thông thường là $25°$C (như khi máy sưởi vẫn hoạt động). Một giờ sau khi thức dậy nhiệt độ đo được trong phòng là $15°$C. Ông Tuấn sử dụng hàm số $f(t)=\dfrac{at+b}{ct+d}$ (đơn vị $°$C) để tính toán nhiệt độ trong ngôi nhà sau t (giờ) kể từ khi máy sưởi bị hỏng. Biết rằng nếu xét trong một thời gian dài không có máy sưởi thì nhiệt độ trong căn phòng sẽ tiến đến mức nhiệt độ ngoài trời. Dựa vào mô hình trên, hãy cho biết máy sưởi bị hỏng trước lúc gia đình ông Tuấn thức dậy bao nhiêu phút (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Hướng dẫn giải. Giả sử máy sưởi bị hỏng trước lúc gia đình ông Tuấn thức dậy t_0 giờ.

Chọn $c=1$, khi đó $f(t)=\dfrac{at+b}{t+d}$.

Từ giả thiết "trong một thời gian dài không có máy sưởi thì nhiệt độ trong căn phòng sẽ tiến đến mức nhiệt độ ngoài trời (tức $-6°$C)" ta có $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=-6 \Leftrightarrow \lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{at+b}{t+d}=-6 \Leftrightarrow a=-6$.

Lại có nhiệt độ trong ngôi nhà sau 0 giờ kể từ khi máy sưởi bị hỏng bằng $25°$C nên ta có $f(0)=25 \Leftrightarrow \dfrac{b}{d}=25 \Leftrightarrow b=25d$.

Suy ra $f(t)=\dfrac{-6t+25d}{t+d}$.

Từ giả thiết: "Khi gia đình ông Tuấn thức dậy, nhiệt độ trong ngôi nhà lúc này là $22°$C" ta có $f(t_0)=22$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \frac{-6t_0+25d}{t_0+d}=22\\
&\Leftrightarrow -6t_0+25d=22(t_0+d)\\
&\Leftrightarrow -6t_0+25d=22t_0+22d\\
&\Leftrightarrow 3d=28t_0 \Leftrightarrow d=\frac{28}{3}t_0.
\end{aligned}$$

Lại có "Một giờ sau khi thức dậy (tức sau khi máy sưởi hỏng t_0+1 giờ) nhiệt độ đo được trong phòng là $15°$C" ta có $f(t_0+1)=15$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \frac{-6(t_0+1)+25d}{(t_0+1)+d}=15\\
&\Leftrightarrow \frac{-6t_0-6+25d}{t_0+1+d}=15\\
&\Leftrightarrow -6t_0-6+25d=15(t_0+1+d)\\
&\Leftrightarrow -6t_0-6+25d=15t_0+15+15d\\
&\Leftrightarrow 21t_0+21-10d=0 \quad (*)
\end{aligned}$$

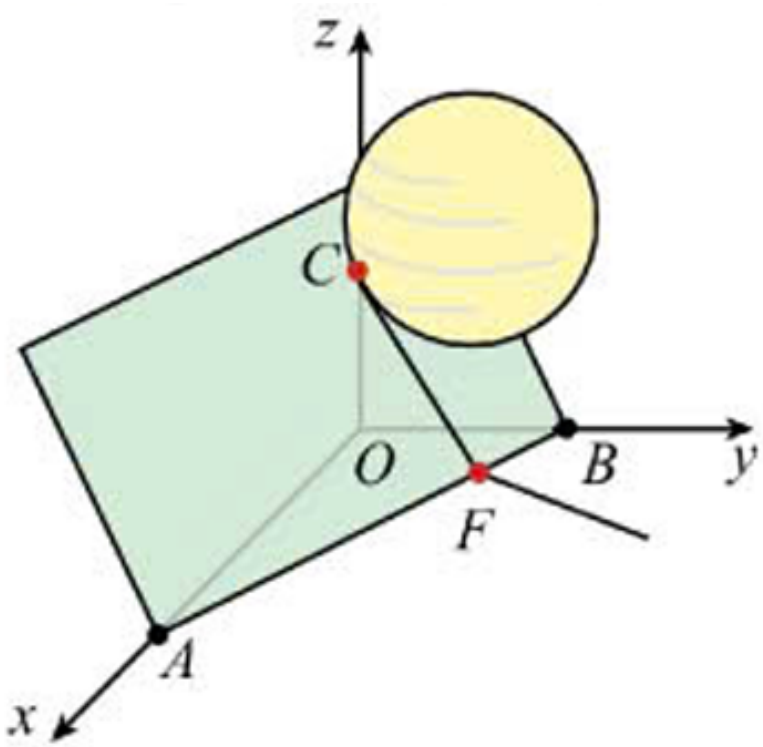
Thay $d=\dfrac{28}{3}t_0$ vào phương trình $(*)$ ta được

$$21t_0+21-10\cdot\frac{28}{3}t_0=0 \Leftrightarrow \frac{-217}{3}t_0+21=0 \Leftrightarrow \frac{-217}{3}t_0=-21 \Leftrightarrow t_0=\frac{9}{31}\text{ (h)}\approx 17,4\text{ (phút)}.$$

Vậy máy sưởi bị hỏng trước lúc gia đình ông Tuấn thức dậy 17,4 phút.

Bài 100. Một nhà sản xuất ổ bi đã đặt một mô hình quả cầu khổng lồ trên mái nghiêng của

nhà xưởng. Mặt mái hiên có thể được mô tả bằng mặt phẳng $(\alpha): x+2y+2z-10=0$, trong đó A, B, C là giao điểm của mặt phẳng (α) với các trục tọa độ. Một mô hình quả cầu bán kính $r=3$ được đặt tiếp xúc với mặt phẳng (α) tại điểm C. Từ C kẻ đường vuông góc với AB tại F. Khi người ta muốn thay thế quả cầu này, họ cho nó lăn trên đường thẳng CF cho đến khi quả cầu vừa tiếp xúc với mặt phẳng (Oxy) tại $P(a;b;0)$ thì dừng lại. Tính $a+b$.



✍ *Hướng dẫn giải.* Ta có $A \in Ox$ nên $A(x;0;0)$. Mà $A \in (\alpha)$ nên ta có:$x+2\cdot 0+2\cdot 0-10=0 \Rightarrow x=10$. Vậy $A(10;0;0)$ Tương tự, ta cũng tìm được $B(0;5;0)$ và $C(0;0;5)$.

Gọi I là tâm mặt cầu khi nó đang tiếp xúc với CF tại C. Điểm I thuộc đường thẳng qua C và vuông góc với (α). Khi đó $CI \perp (\alpha)$ nên đường thẳng CI nhận vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) là $\vec{n}(1;2;2)$ làm vectơ chỉ phương.

Đường thẳng CI đi qua điểm $C(0;0;5)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{n}(1;2;2)$ có phương trình:

$$CI: \begin{cases} x=t \\ y=2t \\ z=5+2t \end{cases}, \quad (t \in \mathbb{R})$$

$\Rightarrow I(t;2t;5+2t)$. Vì $d(I;(\alpha))=r=3$

$$\Rightarrow \frac{|t+2\cdot 2t+2(5+2t)-10|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=3$$

$$\Leftrightarrow \frac{|t+4t+10+4t-10|}{\sqrt{1+4+4}}=3$$

$$\Rightarrow |t|=1$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} t=1 \Rightarrow I(1;2;7) \\ t=-1 \Rightarrow I(-1;-2;3) \end{bmatrix}$$

Dễ thấy trên hình I có tung độ dương nên $I(1;2;7)$.

Gọi J là tâm mặt cầu khi nó vừa chạm và tiếp xúc với mặt đất tại $P(a;b;0)$. Khi đó $J(a;b;3)$ (vì $JP \perp (Oxy)$ nên J có cùng hoành độ và tung độ với điểm P và cao độ bằng bán kính của hình cầu bằng 3). $\Rightarrow \overrightarrow{IJ} = (a-1;b-2;-4)$.

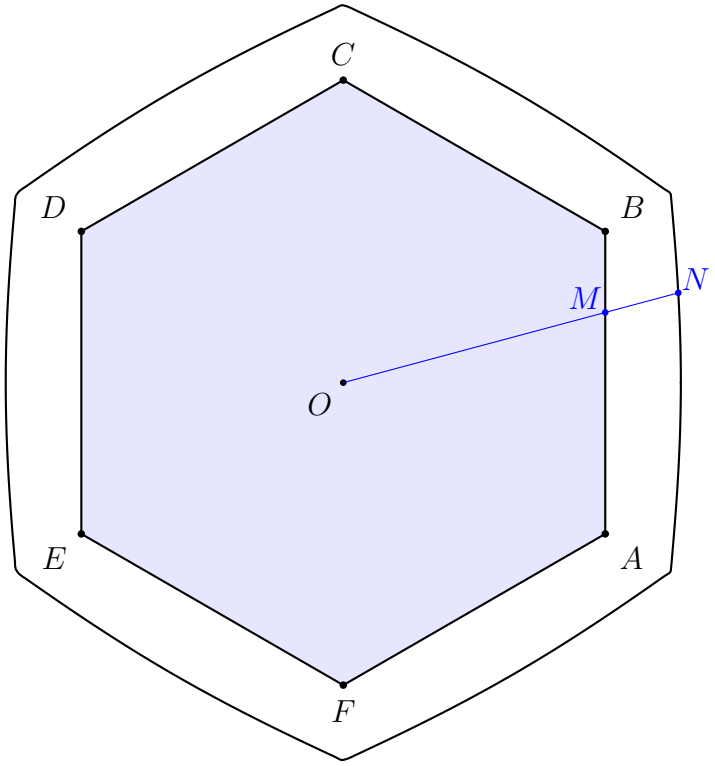
Vì $\begin{cases} CF \perp AB \\ CF \perp \vec{n}_{(\alpha)} \end{cases} \Rightarrow \vec{u}_{CF} = \left[\overrightarrow{AB};\vec{n}_{(\alpha)}\right] = (10;20;-25) = 5(2;4;-5)$

Vì quả cầu di chuyển theo đoạn thẳng CF nên $\overrightarrow{IJ}$ và $\overrightarrow{CF}$ là hai vectơ cùng phương.

Suy ra $\overrightarrow{IJ} = k\overrightarrow{CF} = k(2;4;-5) \Rightarrow \frac{a-1}{2} = \frac{b-2}{4} = \frac{-4}{-5} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{a-1}{2} = \dfrac{-4}{-5} \\ \dfrac{b-2}{4} = \dfrac{-4}{-5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-1 = \dfrac{8}{5} \\ b-2 = \dfrac{16}{5} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{13}{5} \\ b = \dfrac{26}{5} \end{cases} \Rightarrow a+b = 7,8$

Bài 101. người ta tạo một lối đi xung quanh một sân chơi hình lục giác đều $ABCDEF$ tâm O giới hạn bởi các cạnh của lục giác và một đường cong kín (L) (như hình vẽ). Nếu điểm M thuộc cạnh của lục giác và tia OM cắt (L) tại điểm N thì ta luôn có $MN = 2$m. Biết rằng $OA = 8$m. Diện tích của lối đi đó bằng bao nhiêu mét vuông (làm tròn đến hàng đơn vị)?



Hướng dẫn giải. Ta có độ dài lục giác đều là $a = OA = 8m$ nên suy ra $S_{ABCDEF} = 6.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = 6.\dfrac{8^2\sqrt{3}}{4} = 96\sqrt{3}(m^3)$.

Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho tọa độ các đỉnh là $O(0;0), A(4\sqrt{3};-4), B(4\sqrt{3};4)$ và đơn vị trên mỗi hệ trục tọa độ là mét.

Xét điểm M thuộc đoạn thẳng AB (vì tính đối xứng ta sẽ nhân lên sáu lần kết quả này).

Ta có: $M(4\sqrt{3};m) \in [AB], N(x;y)$, trong đó $-4 \le m \le 4, x > 4\sqrt{3}$, suy ra $ON = \sqrt{x^2+y^2}$.

Từ đây ta có được: $OM = ON - MN = \sqrt{x^2+y^2} - 2$.

Tiếp đến gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M, N lên trục hoành.

Theo định lí Ta-lét, ta có: $\dfrac{ON}{OM} = \dfrac{OK}{OH} = \dfrac{NK}{MH} \Rightarrow \dfrac{x}{4\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}-2} = \dfrac{t}{t-2}$, đặt $t = \sqrt{x^2+y^2}$.

Phương trình tương đương: $4\sqrt{3}t = x(t-2) \Leftrightarrow t(x-4\sqrt{3}) = 2x \Leftrightarrow t = \dfrac{2x}{x-4\sqrt{3}}$.

Mà $t = \sqrt{x^2+y^2}$ nên suy ra $(L): y = \pm\sqrt{t^2-x^2} = \pm\sqrt{\left(\dfrac{2x}{x-4\sqrt{3}}\right)^2 - x^2}$.

Khi đó: $OA: y = -\dfrac{x}{\sqrt{3}} \cap (L) = P(5\sqrt{3}; -5)$ và $OB: y = \dfrac{x}{\sqrt{3}} \cap (L) = Q(5\sqrt{3}; 5)$.

Và $(L) \cap Ox \Leftrightarrow \dfrac{2x}{x-4\sqrt{3}} = \pm x \Leftrightarrow x = 2+4\sqrt{3} \Rightarrow (L) \cap Ox = R(2+4\sqrt{3}; 0)$.

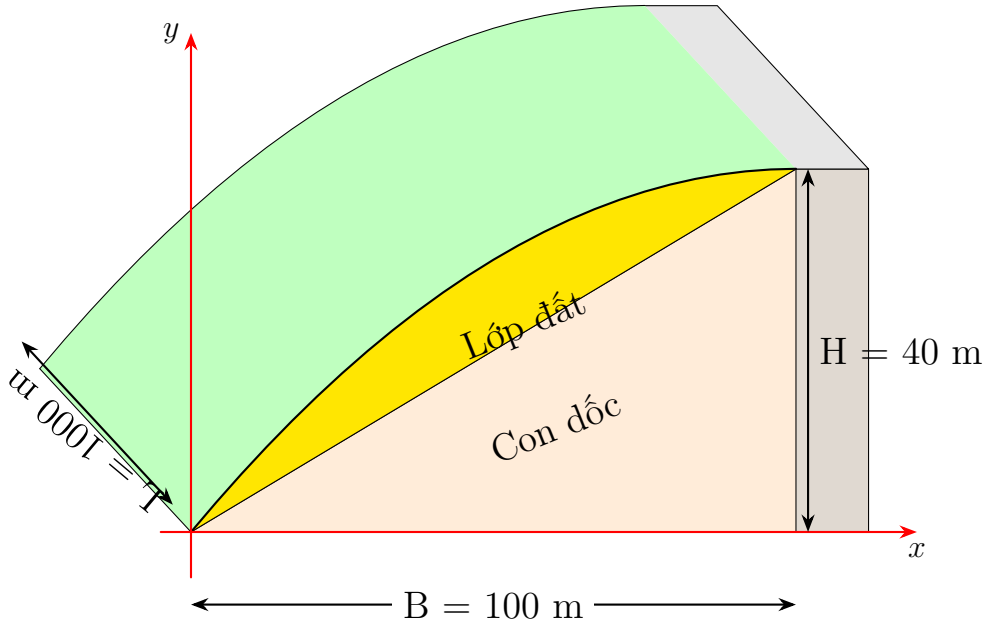
Ta có: $S_{\triangle OPQ} = \dfrac{1}{2} \cdot OP \cdot OQ \cdot \sin 60^\circ = \dfrac{1}{2} \cdot OP^2 \cdot \sin 60^\circ = 25\sqrt{3}\,(m^2)$.

Diện tích của lối đi là:

$$6\left[25\sqrt{3} + \int\limits_{5\sqrt{3}}^{2+4\sqrt{3}} 2\sqrt{\left(\frac{2x}{x-4\sqrt{3}}\right)^2 - x^2}\,dx\right] - 96\sqrt{3} \approx 103,903\,(m^2) \approx 104\,(m^2).$$

Bài 102. Một con dốc có chiều rộng 1000m, cao 40m và có chiều dài theo phương ngang là 100 mét, được cải tạo bằng cách đắp thêm lớp đất để tạo độ cong cho con dốc. Trên hệ tọa độ Oxy, đơn vị trên mỗi trục tính bằng mét, đường biên $y = g(x)$ của dốc cũ là một đường thẳng, đường biên $y = f(x)$ của phần đất đắp thêm là một parabol đi qua điểm có tọa độ $(50; 30)$ (tham khảo như hình vẽ).

Biết thể tích phần đắp thêm là $T\ (m^3)$, tính $\dfrac{T}{500}$ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



Hướng dẫn giải. Vì đường biên con dốc cũ $y = g(x)$ là một đường thẳng đi qua gốc tọa độ nên $y = g(x) = ax \quad (a > 0)$.

Từ giả thiết bài toán, ta có $y = g(x)$ đi qua điểm $(100; 40)$ nên $g(100) = 40$

$$\Leftrightarrow a \cdot 100 + b = 40$$
$$100a = 40 \Rightarrow a = 0,4$$
$$\Rightarrow g(x) = 0,4x.$$

Vì đường biên $y = f(x)$ của phần đất đắp thêm là một parabol đi qua gốc tọa độ nên có dạng $f(x) = mx^2 + nx$.

Vì $y = f(x)$ đi qua các điểm $(50; 30)$, $(100; 40)$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} f(50) = 30 \\ f(100) = 40 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \cdot 50^2 + n \cdot 50 = 30 \\ m \cdot 100^2 + n \cdot 100 = 40 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2500m + 50n = 30 \\ 10000m + 100n = 40 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = -\dfrac{1}{250} \\ n = \dfrac{4}{5} \end{cases}$$

$\Rightarrow f(x) = -\dfrac{1}{250}x^2 + \dfrac{4}{5}x.$

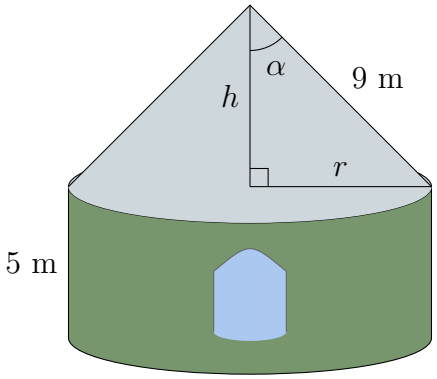
Diện tích lớp đất là:

$$S = \int_0^{100} |f(x) - g(x)|dx = \int_0^{100} (f(x) - g(x))dx = \int_0^{100} \left(-\frac{1}{250}x^2 + \frac{4}{5}x - 0,4x\right) dx = \frac{2000}{3}.$$

Suy ra thể tích phần đắp thêm là $T = 1000 \cdot \dfrac{2000}{3} = \dfrac{2\,000\,000}{3}$ (m^3).

Vậy $\dfrac{T}{500} = \dfrac{\dfrac{2\,000\,000}{3}}{500} \approx 1333.$

Bài 103. Một chiếc lều được thiết kế gồm hai phần, phần dưới hình trụ có chiều cao $h = 5$ mét và bán kính r, phần bên trên là hình nón có đường viền ngoài dài 9 mét. Thể tích tối đa của lều là bao nhiêu m^3? Viết kết quả làm tròn đến hàng đơn vị.



Hướng dẫn giải. Thể tích của lều là: $V = \pi r^2 \cdot 5 + \frac{1}{3}\pi r^2 h = \pi\left(5r^2 + \frac{1}{3}hr^2\right)$

Theo định lý Pytago ta có: $h^2 + r^2 = 9^2 \Rightarrow r^2 = 81 - h^2 \quad (0 < h < 9)$

$\Rightarrow V = \pi\left[5(81-h^2)+\frac{1}{3}h(81-h^2)\right] = \pi\left(405-5h^2+27h-\frac{1}{3}h^3\right) = \pi\left(-\frac{1}{3}h^3-5h^2+27h+405\right)$

Thể tích lều là tối đa khi và chỉ khi $-\frac{1}{3}h^3-5h^2+27h+405$ lớn nhất.

Xét hàm số: $V(h) = -\frac{1}{3}h^3-5h^2+27h+405$ trên khoảng $(0;9)$.

Ta có: $V'(h) = -\frac{1}{3}\cdot 3h^2 - 5\cdot 2h + 27 = -h^2-10h+27$

$$V'(h)=0 \Leftrightarrow -h^2-10h+27=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} h=-5+2\sqrt{13}\in(0;9) & (tm)\\ h=-5-2\sqrt{13}\notin(0;9) & (L)\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên của hàm số:

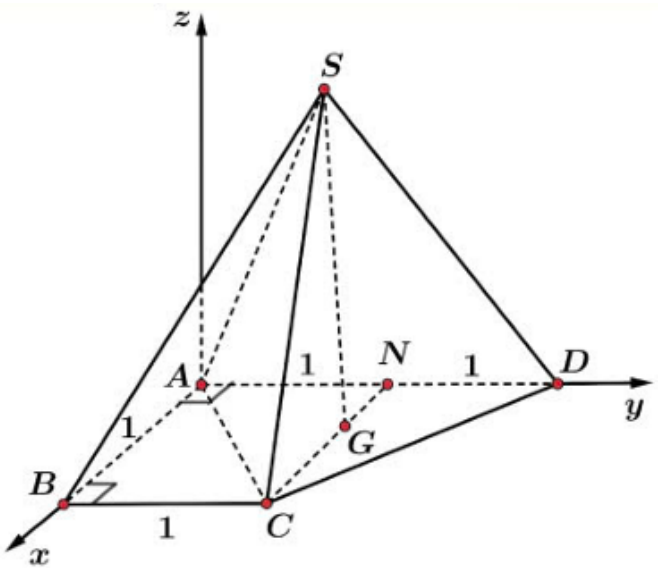
h	0		$-5+2\sqrt{13}$		9
$V'(h)$		$+$	0	$-$	
$V(h)$		↗	V_{max}	↘	

Từ bảng biến thiên, ta suy ra giá trị lớn nhất của hàm số là $V\left(-5+2\sqrt{13}\right)$.

Vậy thể tích tối đa của lều là: $\pi\cdot V\left(-5+2\sqrt{13}\right)\approx 1372$ (m^3).

Bài 104. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, $AB=BC=1$, $AD=2$. Hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng đáy trùng với trọng tâm G của tam giác ACD và $SG=7$. Khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SCD) bằng bao nhiêu (không làm tròn kết quả các phép tính trung gian, chỉ làm tròn kết quả cuối cùng đến hàng phần trăm)?

Hướng dẫn giải. Gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ



Ta tìm được tọa độ của các điểm $A(0;0;0), B(1;0;0), C(1;1;0), D(0;2;0)$

Vì G là trọng tâm của tam giác ACD nên $G(\frac{1}{3};1;0)$. Mà G là hình chiếu của S lên (Oxy) nên $S(\frac{1}{3};1;s)$.

Ta có $SG = 7$ suy ra cao độ của S bằng 7, hay $S(\frac{1}{3}; 1; 7)$.

Ta có $\overrightarrow{SC} = (\frac{2}{3}; 0; -7), \overrightarrow{SD} = (-\frac{1}{3}; 1; -7)$ là cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng (SCD).

Suy ra một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (SCD) là $\vec{n} = \left[\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{SD}\right] = (7; 7; \frac{2}{3})$.

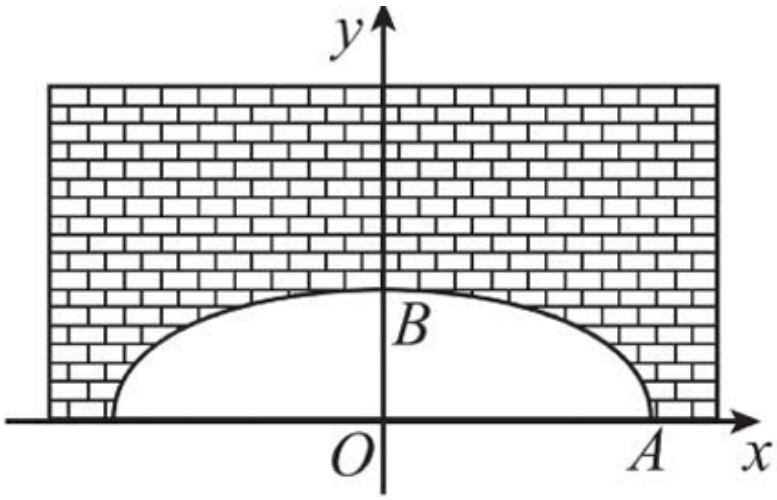
Mặt phẳng (SCD) đi qua điểm $D(0; 2; 0)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (7; 7; \frac{2}{3})$ có phương trình là

$$7(x-0) + 7(y-2) + \frac{2}{3}(z-0) = 0 \Leftrightarrow 7x + 7y + \frac{2}{3}z - 14 = 0.$$

Khi đó khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SCD) là

$$d(B, (SCD)) = \frac{\left|7.1 + 7.0 + \frac{2}{3}.0 - 14\right|}{\sqrt{7^2 + 7^2 + (\frac{2}{3})^2}} \approx 0,71.$$

Bài 105. Một kỹ sư thiết kế một đường hầm một chiều có mặt cắt là một nửa hình elip, chiều rộng của hầm là 12 mét, khoảng cách từ điểm cao nhất của elip so với mặt đường là 3 mét. Người kĩ sư này phải đưa ra cảnh báo cho các loại xe có thể đi qua hầm. Một chiếc xe có chiều rộng bằng 3 mét thì chiều cao lớn nhất của xe để xe có thể đi qua hầm là bao nhiêu mét *làm trong kết quả đến hàng phần chục*?



Hướng dẫn giải. Phương trình chính tắc của (E) là

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, trong đó $a > b > 0$.

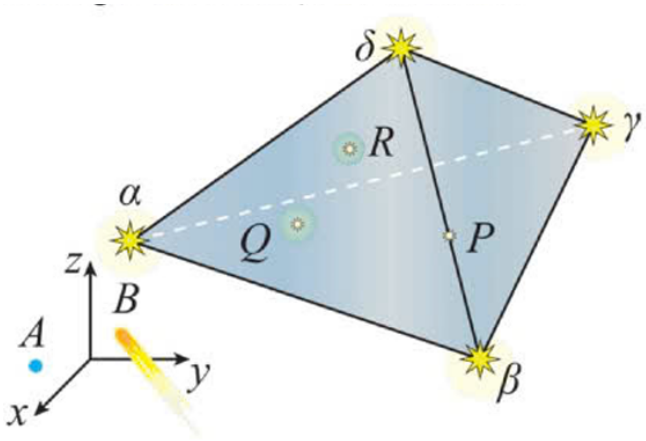
Do các điểm $A(6; 0)$ và $B(0; 3)$ thuộc (E) nên thay vào phương trình của (E) ta có $a = 6, b = 3$. Suy ra phương trình của (E) là $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Với những xe tải có chiều rộng 3 mét tương tứng với $x = 1,5$. Thay vào phương trình của elip để tim ra độ cao y của xe tải (y là tung độ dương của điểm M có hoành độ bằng $1,5$ thuộc (E)) ta được

$$y = 3\sqrt{1 - \frac{x^2}{36}} = 3\sqrt{1 - \frac{1,5^2}{36}} \approx 2,9 \text{ (mét)}$$

Vậy một chiếc xe có chiều rộng bằng 3 mét thì chiều cao lớn nhất có thể đi qua hầm là $2,9$ mét.

Bài 106. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho trước (đơn vị mỗi trục tính theo đơn vị thiên văn), bốn ngôi sao $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ tạo thành một vùng giới hạn trong không gian với các vị trí của chúng được mô hình lần lượt là $A(4;4;8)$, $B(0;20;0)$, $C(-16;16;4)$ và $D(-8;12;12)$ (coi mỗi ngôi sao là một chất điểm).



Một sao chổi bay thẳng qua điểm $M(10;3;1)$ và $N(4;7;3)$, đi vào vùng giới hạn tại điểm P và rời khỏi vùng giới hạn tại điểm Q. Hỏi khoảng cách PQ bằng bao nhiêu đơn vị thiên văn (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)?

Hướng dẫn giải. Vì 4 ngôi sao tạo thành một "vùng giới hạn" trong không gian nên 4 điểm A, B, C, D tạo thành một tứ diện $ABCD$.

Vì P, Q là giao điểm của đường thẳng MN với 2 trong 4 mặt phẳng của tứ diện $ABCD$ nên ta sẽ xét lần lượt giao giữa MN với 4 mặt phẳng $(ABC), (BCD), (ABD), (ACD)$.

Ta có $\overrightarrow{MN} = (-6;4;2) = 2(-3;2;1)$.

Chọn $\vec{u}_{MN} = (-3;2;1)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng MN.

Đường thẳng MN đi qua điểm $M(10;3;1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}_{MN} = (-3;2;1)$ có phương trình tham số là:

$$\begin{cases} x = 10 - 3t \\ y = 3 + 2t \\ z = 1 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-4;16;-8) = -4(1;-4;2)$,
$\overrightarrow{AC} = (-20;12;-4) = -4(5;-3;1)$.

Chọn $\vec{u}_1 = (1;-4;2)$, $\vec{u}_2 = (5;-3;1)$ là cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng (ABC). Suy ra một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) là:

$\vec{n}_{ABC} = [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (2;9;17)$.

Mặt phẳng (ABC) có phương trình:

$$\begin{aligned} &2(x-0) + 9(y-20) + 17(z-0) = 0 \\ \Leftrightarrow &2x + 9y - 180 + 17z = 0 \\ \Leftrightarrow &2x + 9y + 17z - 180 = 0. \end{aligned}$$

Vectơ chỉ phương của MN và vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) lần lượt là $\vec{u}_{MN} = (-3;2;1)$, $\vec{n}_{ABC} = (2;9;17)$.

$\vec{u}_{MN} \cdot \vec{n}_{ABC} = -3 \cdot 2 + 2 \cdot 9 + 1 \cdot 17 \neq 0$ nên MN và (ABC) cắt nhau.

Thay $\begin{cases} x = 10 - 3t \\ y = 3 + 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$ vào phương trình mặt phẳng (ABC) ta được: $2(10-3t) + 9(3+2t) + 17(1+t) - 180 = 0 \Leftrightarrow 20 - 6t + 27 + 18t + 17 + 17t - 180 = 0$

$\Leftrightarrow 29t - 116 = 0 \Leftrightarrow 29t = 116 \Leftrightarrow t = 4$Suy ra $MN \cap (ABC) = (-2;11;5)$.

Tương tự, ta có mặt phẳng (BCD) có cặp vectơ chỉ phương là $\vec{u}_3 = (4;1;-1)$, $\vec{u}_4 = (2;2;-3)$.

Suy ra một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (BCD) là: $\vec{n}_{BCD} = [\vec{u}_3, \vec{u}_4] = (-1;10;6)$.

$\vec{u}_{MN} \cdot \vec{n}_{BCD} = -3 \cdot (-1) + 2 \cdot 10 + 1 \cdot 6 = 29 \neq 0$ nên MN và (BCD) cắt nhau.

Mặt phẳng (BCD) đi qua điểm $B(0;20;0)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_{BCD} = (-1;10;6)$ có phương trình là:

$$\begin{aligned} &-1(x-0) + 10(y-20) + 6(z-0) = 0 \\ \Leftrightarrow &-x + 10y - 200 + 6z = 0 \\ \Leftrightarrow &-x + 10y + 6z - 200 = 0. \end{aligned}$$

Thay $\begin{cases} x = 10 - 3t \\ y = 3 + 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$ vào phương trình mặt phẳng (BCD) ta được:

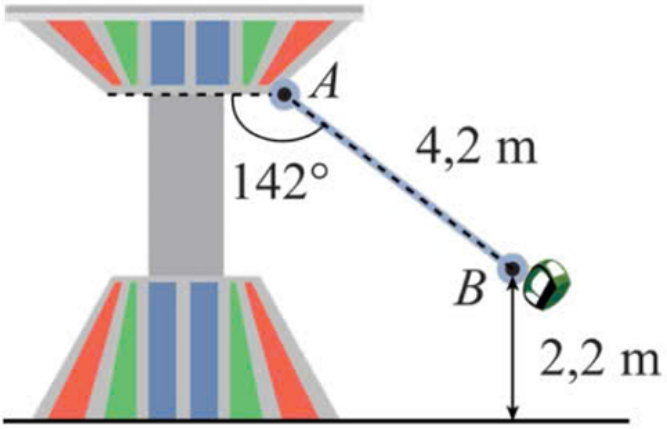
$$\begin{aligned} &-(10-3t) + 10(3+2t) + 6(1+t) - 200 = 0 \\ \Leftrightarrow &-10 + 3t + 30 + 20t + 6 + 6t - 200 = 0 \\ \Leftrightarrow &29t - 174 = 0 \Leftrightarrow 29t = 174 \\ \Leftrightarrow &t = 6. \end{aligned}$$

Suy ra $MN \cap (BCD) = (-8;15;7)$.

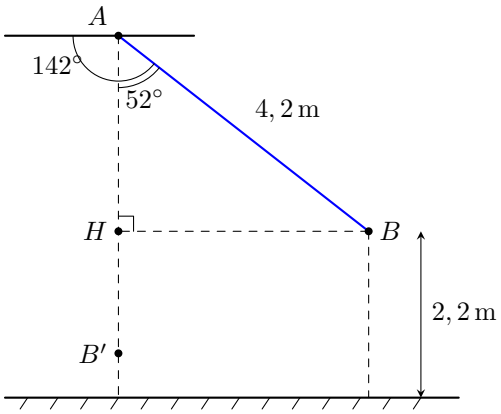
Suy ra hai giao điểm giữa MN và khối tứ diện $ABCD$ là $(-2;11;5)$ và $(-8;15;7)$ (vì 1 đường thẳng sẽ chỉ cắt được đúng 2 mặt phẳng của khối tứ diện).

Vậy khoảng cách: $PQ = \sqrt{(-2+8)^2 + (11-15)^2 + (5-7)^2} \approx 7,5$ (đơn vị thiên văn) .

Bài 107. Một thanh kim loại giữ ghế ngồi tại điểm B của vòng quay vui chơi được gắn vào khung tại điểm A. Khi vòng quay quay với tốc độ tối đa, thanh chống tạo với khung một góc $142°$ và khi đó ghế ngồi ở độ cao $2,2$ m so với mặt đất (xem hình vẽ). Khi vòng không quay thanh AB thẳng đứng vuông góc với mặt đất. Biết chiều dài của thanh chống là $4,2$ m. Vậy khi vòng quay không quay thì khoảng cách giữa điểm B và mặt đất bao nhiêu centimet (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?



✍ *Hướng dẫn giải.* Đặt vị trí các đỉnh tương ứng như hình vẽ mô phỏng hình học dưới đây:



Dựng H là hình chiếu của B lên phương thẳng đứng đi qua A. Gọi B' là vị trí của ghế khi vòng quay không quay (AB' thẳng đứng).

Vì khung nằm ngang vuông góc với phương thẳng đứng nên góc tạo bởi thanh AB và phương thẳng đứng là:

$$\widehat{BAH} = 142^\circ - 90^\circ = 52^\circ$$

Xét tam giác ABH vuông tại H, ta có:

$$\cos\widehat{BAH} = \frac{AH}{AB} \Rightarrow AH = AB \cdot \cos 52^\circ = 4,2 \cdot \cos 52^\circ \text{ (m)}$$

Khoảng cách từ điểm A đến mặt đất (ký hiệu là h_A) là:

$$h_A = 2,2 + AH = 2,2 + 4,2 \cdot \cos 52^\circ \text{ (m)}$$

Khi vòng quay không quay, thanh AB ở vị trí thẳng đứng AB'. Khi đó, khoảng cách từ điểm B (tương ứng điểm B') đến mặt đất là h_B:

$$h_B = h_A - AB' = h_A - 4,2$$

$$h_B = (2,2 + 4,2 \cdot \cos 52^\circ) - 4,2 = 4,2 \cdot \cos 52^\circ - 2$$

Tính toán giá trị:

$$h_B \approx 4,2 \cdot 0,61566 - 2 \approx 2,58578 - 2 = 0,58578 \text{ (m)}$$

Đổi đơn vị sang centimet và làm tròn đến hàng đơn vị:

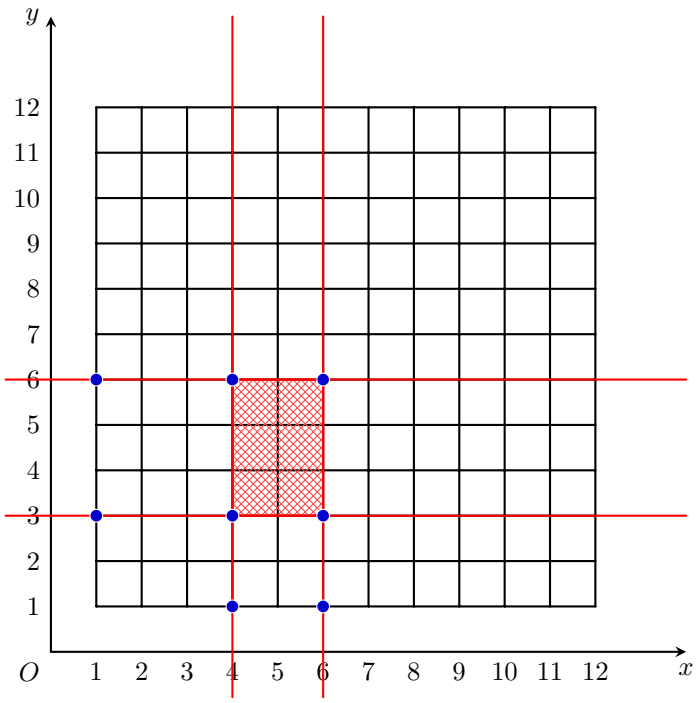
$$h_B \approx 58,578 \text{ cm} \approx 59 \text{ cm}$$

Vậy khi vòng quay không quay thì khoảng cách giữa điểm B và mặt đất là 59 cm.

Bài 108. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, gọi S là tập hợp các điểm $(x;y)$ sao cho x, y là các số nguyên thuộc đoạn $[1;12]$. Chọn ra 4 điểm bất kì thuộc tập hợp S sao cho 4 điểm đó tạo thành một hình chữ nhật có các cạnh song song với trục tọa độ nhưng không phải hình vuông. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách như vậy?

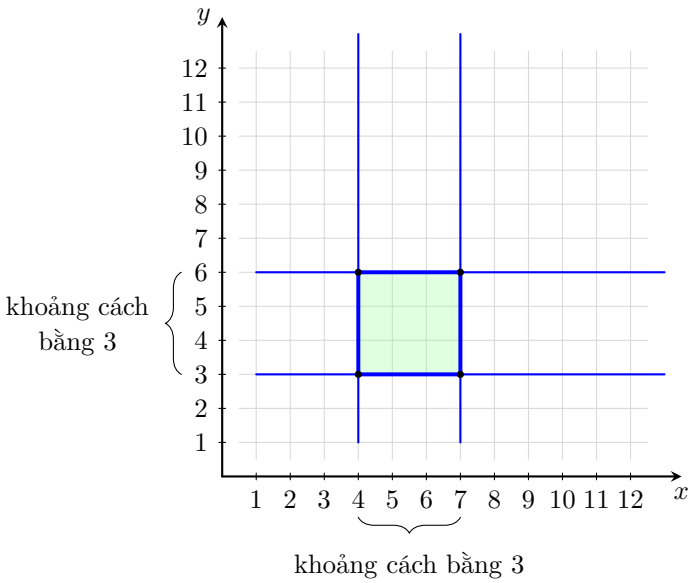
Hướng dẫn giải.

- Để tạo thành một hình chữ nhật có các cạnh song song với các trục tọa độ, ta cần chọn ra 2 hoành độ khác nhau từ tập $\{1;2;\ldots;12\}$ và 2 tung độ khác nhau từ tập $\{1;2;\ldots;12\}$.
- Số cách chọn 2 hoành độ từ 12 điểm là: $C_{12}^2 = \frac{12!}{2!(12-2)!} = 66$ (cách).
- Số cách chọn 2 tung độ từ 12 điểm là: $C_{12}^2 = \frac{12!}{2!(12-2)!} = 66$ (cách).
- Vậy tổng số hình chữ nhật được tạo thành là: $66 \times 66 = 4356$ (hình chữ nhật).



Hình chữ nhật là hình vuông khi khoảng cách giữa hai hoành độ bằng khoảng cách giữa hai tung độ. Gọi độ dài cạnh hình vuông là k $(1 \le k \le 11)$.

- Với $k = 1$: Có 11 cách chọn cặp hoành độ có khoảng cách là 1 và 11 cách chọn cặp tung độ. Số hình vuông là: $11 \times 11 = 11^2$.
- Với $k = 2$: Có 10 cách chọn cặp hoành độ có khoảng cách là 2 và 10 cách chọn cặp tung độ. Số hình vuông là: $10 \times 10 = 10^2$.
- ...
- Với $k = 11$: Có 1 cách chọn cặp hoành độ và 1 cách chọn cặp tung độ. Số hình vuông là: $1 \times 1 = 1^2$.



Tổng số hình vuông là:

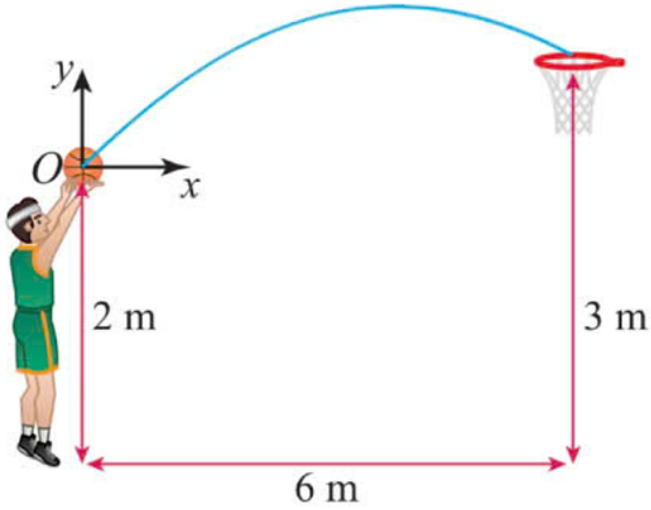
$$\sum_{k=1}^{11} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 11^2 = 506 \text{ (hình vuông)}$$

Số hình chữ nhật thỏa mãn yêu cầu (không phải hình vuông) là:

$$C_{12}^2 \cdot C_{12}^2 - 506 = 4356 - 506 = 3850 \text{ (cách).}$$

Vậy có tất cả 3850 cách chọn.

Bài 109. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, đơn vị mỗi trục là mét, mặt sân là mặt phẳng (Oxy), trục Oz hướng lên, một người thực hiện ném bóng, quả bóng được ném tại điểm có tọa độ $A(4;22;2)$, bóng bay qua điểm $B(7;26;4)$ sau đó bay vào tâm của rổ. Biết quỹ đạo của quả bóng là một Parabol nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt sân, khoảng cách từ vị trí ném đến rổ theo phương ngang là 6 mét và tâm của rổ cao 3 mét so với sân. Gọi H là điểm mà tại đó, quả bóng đạt độ cao lớn nhất, tìm tung độ của H (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).



Hướng dẫn giải. Gọi A', B', H' lần lượt là hình chiếu của A, B, H xuống mặt phẳng (Oxy). Vì quỹ đạo bóng bay nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt sân nên A', B', H' thẳng hàng.

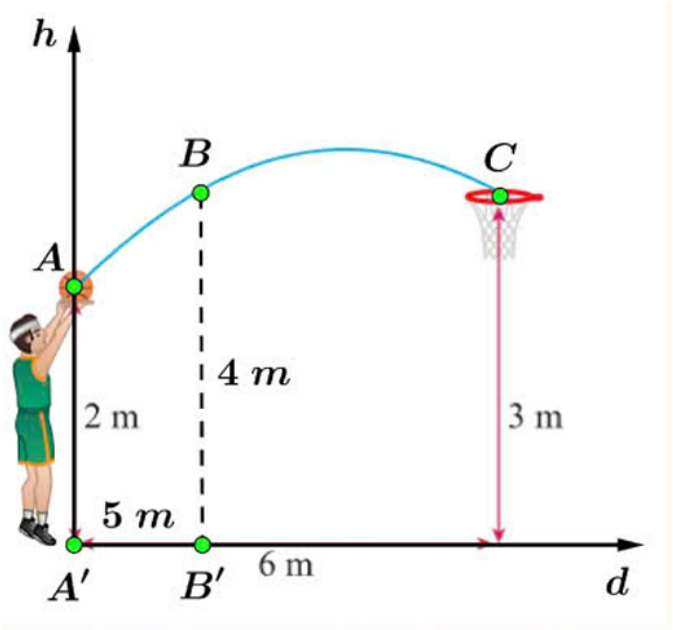
Vì A', B' lần lượt là hình chiếu vuông góc của $A(4;22;2)$, $B(7;26;4)$, $H(x;y;z)$ xuống mặt phẳng

(Oxy) nên $A'(4;22;0), B'(7;26;0), H'(x;y;0)$. Suy ra

$$A'B' = \sqrt{(7-4)^2+(26-22)^2} = 5;$$

$$BB' = 4.$$

Xét các dữ kiện trên trong hệ trục (Odh), đơn vị mỗi trục là mét, với trục Oh là độ cao của quả bóng so với mặt đất, trục Od là khoảng cách theo phương ngang của quả bóng so với gốc $A' \equiv O(0;0;0)$.



Giả sử quỹ đạo parabol của bóng có dạng $f(d) = ad^2+bd+c$. Từ hình vẽ, ta suy ra đồ thị hàm số đi qua các điểm $A(0;2), B(5;4), C(6;3)$ (với C là tâm của rổ). Ta có hệ phương trình $\begin{cases} f(0)=2 \\ f(5)=4 \\ f(6)=3 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a.0^2+b.0+c=2 \\ a.5^2+b.5+c=4 \\ a.6^2+b.6+c=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=2 \\ 25a+5b+2=4 \\ 36a+6b+2=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=2 \\ 25a+5b=2 \\ 36a+6b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=2 \\ a=-\dfrac{7}{30} \\ b=\dfrac{47}{30} \end{cases}$$

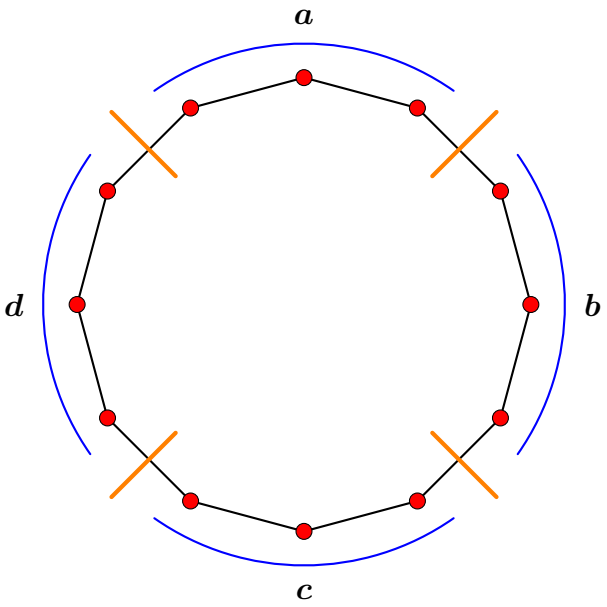
Hoành độ của đỉnh H là $d_H = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{47}{14}$.

Ta có $A'B' = 5, A'H' = \dfrac{47}{14}$ suy ra $\dfrac{A'H'}{A'B'} = \dfrac{\frac{47}{14}}{5} = \dfrac{47}{70} \Rightarrow A'H' = \dfrac{47}{70}A'B'$. Mà H', A', B' thẳng hàng nên ta có $\overrightarrow{A'H'} = \dfrac{47}{70}\overrightarrow{A'B'} \Leftrightarrow \begin{cases} x-4=\dfrac{47}{70}.3 \\ y-22=\dfrac{47}{70}.4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{421}{70} \\ y=\dfrac{864}{35} \end{cases}$ (với $\overrightarrow{A'H'} = (x-4; y-22; 0)$; $\overrightarrow{A'B'} = (3;4;0)$). Suy ra tung độ của điểm H là $24,7$.

~~Bài 110.~~ Cho 32 viên bi giống nhau được đặt vào các đỉnh của hình đa giác đều có 32 cạnh nội tiếp đường tròn (O), mỗi đỉnh chỉ có một viên bi. Tính số các cách đặt 4 chiếc thẻ giống nhau vào trung điểm các cạnh của đa giác đã cho thỏa mãn tại mỗi trung điểm chỉ có nhiều nhất một chiếc thẻ và các viên bi đã cho được chia thành 4 phần, mà mỗi phần có ít nhất 6 viên bi. Biết hai cách đặt thẻ được coi là như nhau nếu tồn tại một phép quay quanh O biến cách chia này thành cách chia kia.

✍ *Hướng dẫn giải.* Bài toán chia kẹo Euler: Số cách chia n chiếc kẹo giống nhau cho m em bé sao cho mỗi em bé có ít nhất một chiếc kẹo (hay tương đương với bài toán tìm số nghiệm nguyên dương của phương trình $x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n$ với $x_i \in \mathbb{N}^*$) là C_{n-1}^{m-1} cách.

4 chiếc thẻ giống nhau đặt vào trung điểm các cạnh chia 32 viên bi thành 4 phần. Gọi $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ lần lượt là số viên bi ở trong 4 phần đó. Tham khảo hình vẽ minh họa:



Số cách đặt thẻ sẽ bằng số bộ $(a; b; c; d)$ thỏa mãn điều kiện, trừ đi các trường hợp lặp lại do phép quay.

Bước 1: Xác định tổng số bộ $(a; b; c; d)$ thỏa mãn điều kiện (tính cả hoán vị).

Từ giả thiết ta có: $\begin{cases} a+b+c+d = 32 \\ a, b, c, d \geq 6 \end{cases}$ $(*)$

Để áp dụng bài toán chia kẹo Euler, ta đặt: $\begin{cases} x_1 = a-5 \geq 1 \\ x_2 = b-5 \geq 1 \\ x_3 = c-5 \geq 1 \\ x_4 = d-5 \geq 1 \end{cases} \Rightarrow (x_1+5)+(x_2+5)+(x_3+5)+(x_4+5) = 32 \Leftrightarrow x_1+x_2+x_3+x_4 = 12$ với $x_i \in \mathbb{N}^*$.

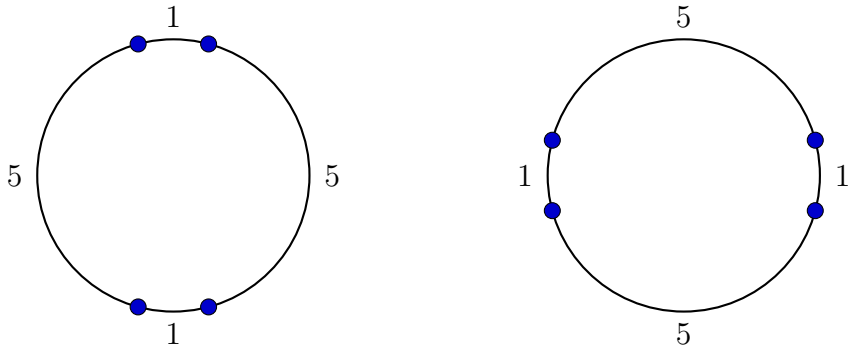
Số bộ (x_1, x_2, x_3, x_4) nguyên dương là: $C_{12-1}^{4-1} = C_{11}^{3} = 165$ (bộ).

Bước 2: Xác định số bộ thỏa mãn (trừ đi các bộ như nhau). *Lưu ý:* Từ cách đặt, ta có mỗi bộ x_1, x_2, x_3, x_4 sẽ tương ứng với một bộ $a+b+c+d$. Quan sát phép quay đa giác đều 32 cạnh, thì 165 bộ trên sẽ được chia vào 3 TH sau: **TH1:** $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$ Khi đó $x_1+x_2+x_3+x_4 = 4x_1 = 12 \Rightarrow x_1 = 3 = x_2 = x_3 = x_4$. Suy ra có duy nhất 1 bộ $(3; 3; 3; 3)$ thỏa mãn.

TH2: $\begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_4 \\ x_1 \neq x_2 \end{cases}$ Khi đó $x_1+x_2+x_3+x_4 = 12 \Leftrightarrow x_1+x_2+x_1+x_2 = 12 \Leftrightarrow 2x_1+2x_2 =$

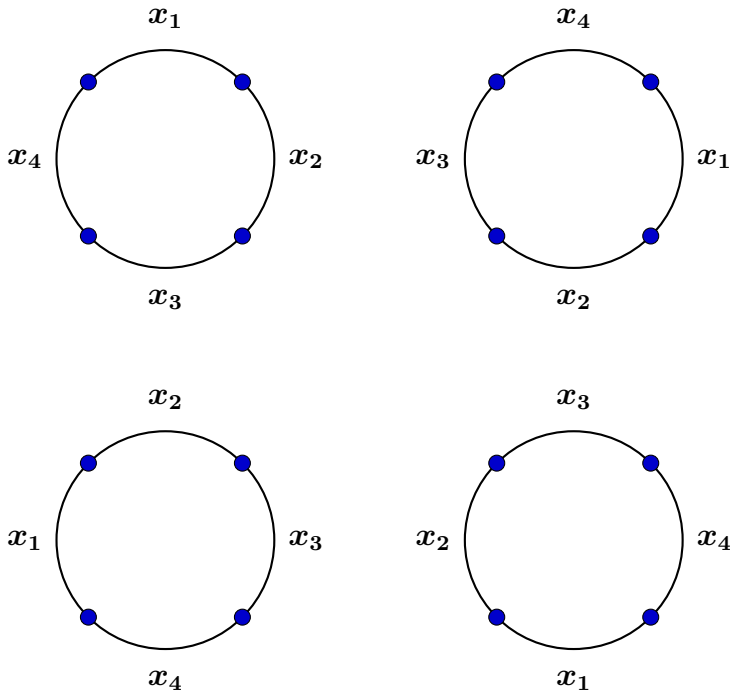
$12 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1 = x_3 = 5 \\ x_2 = x_4 = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x_1 = x_3 = 1 \\ x_2 = x_4 = 5 \end{cases} \\ \begin{cases} x_1 = x_3 = 2 \\ x_2 = x_4 = 4 \end{cases} \\ \begin{cases} x_1 = x_3 = 4 \\ x_2 = x_4 = 2 \end{cases} \end{array}\right.$ suy ra TH2 có tất cả 4 bộ (tính cả các bộ như nhau).

Mà hai bộ $(5;1;5;1)$ và $(1;5;1;5)$ là như nhau; $(2;4;2;4)$ và $(4;2;4;2)$ là như nhau nên số bộ *khác nhau* ở TH2 là 2 bộ (tham khảo hình vẽ).



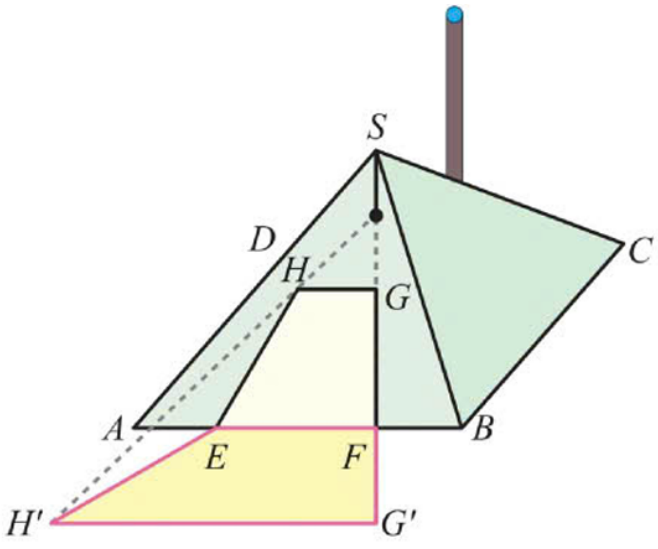
(Dưới phép quay 90 độ, hai hình này cho ra cùng 1 kết quả)

TH3: Các trường hợp còn lại Số bộ còn lại (tính cả các bộ như nhau) trong TH3 là $165-1-4 = 160$. Khi thực hiện phép quay, ta thấy trong 160 bộ là gồm $4n$ bộ (với n là số bộ khác nhau, vì mỗi bộ sẽ có 3 bộ trùng với nó) (tham khảo hình vẽ minh họa trường hợp tổng quát).



Suy ra số bộ khác nhau thỏa mãn TH3 bằng $\dfrac{160}{4} = 40$ bộ. Kết hợp 3 TH trên, suy ra số bộ khác nhau hay số cách đặt thẻ thỏa mãn bài toán là $40 + 1 + 2 = 43$.

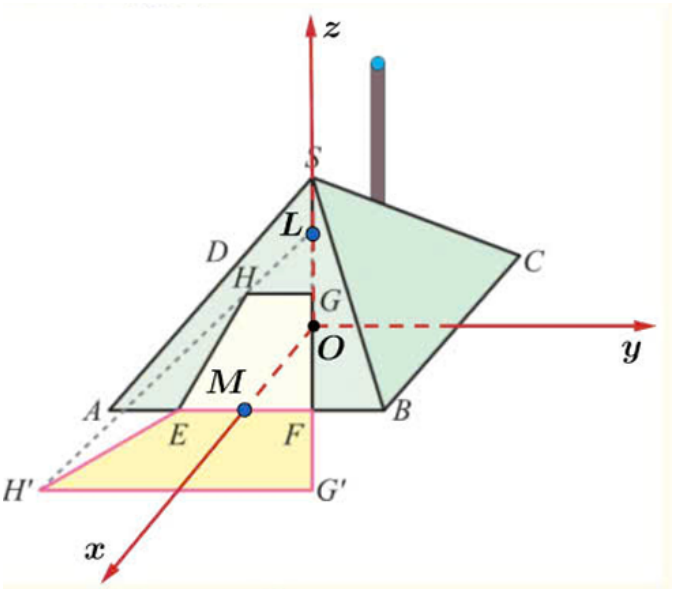
Bài 111. Một chiếc lều có hình dạng là một hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ với cạnh đáy 8 m và chiều cao 3 m, $(ABCD)$ nằm trên mặt đất. Lối vào nằm trong mặt phẳng (SAB) có dạng hình thang $EFGH$ với độ dài đáy lớn $EF = 4$ m được đặt chính giữa cạnh AB, đồng thời H và G là trung điểm của các đoạn thẳng SE và SF. Một chiếc đèn được thả thẳng đứng từ điểm S, bóng đèn cách mặt đất 2 mét, ánh sáng xuyên qua lối vào, chiếu ra ngoài và tạo ra một vùng được chiếu sáng (tham khảo như hình vẽ).



Hỏi diện tích vùng được chiếu sáng đó là bao nhiêu mét vuông?

Hướng dẫn giải.

Gắn hệ trục tọa độ $Oxyz$, với gốc tọa độ O (là tâm của đáy $ABCD$), $Ox//BC$ (hay Ox đi qua trung điểm của AB), $Oy//AB$ (hay Oy đi qua trung điểm của BC), $Oz \equiv SO$ (tham khảo hình vẽ). Gọi L là vị trí của bóng đèn, M là trung điểm của AB.



Suy ra $O(0;0;0)$,
$S(0;0;3)$ (vì $S \in Oz$ và S cách mặt đất 3 mét);
$L(0;0;2)$ (vì $L \in Oz$ và L cách mặt đất 2 mét);
Dựa vào giả thiết $EF = 4$ m được đặt chính giữa cạnh AB, nên M cũng là trung điểm của

$EF \Rightarrow E(4;-2;0), \Rightarrow F(4;2;0)$.

H là trung điểm của $SE \Rightarrow H\left(2;-1;\dfrac{3}{2}\right)$;

Tương tự, G là trung điểm của $SF \Rightarrow G\left(2;1;\dfrac{3}{2}\right)$.

Gợi ý: $\begin{cases} H' \in (Oxy) \cap LH \\ G' \in (Oxy) \cap LG \end{cases}$.

Vì $H' \in (Oxy)$ nên giả sử $H'(a;b;0)$.

Ta có $\overrightarrow{LH} = \left(2;-1;\dfrac{3}{2}-2\right) = \left(2;-1;-\dfrac{1}{2}\right)$.

Suy ra phương trình đường thẳng $LH : \begin{cases} x = 2t \\ y = -t \\ z = 2 - \dfrac{1}{2}t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

$H' \in LH \Rightarrow \begin{cases} a = 2t \\ b = -t \\ 0 = 2 - \dfrac{1}{2}t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2t = 8 \\ b = -t = -4 \\ 2 = \dfrac{1}{2}t \Rightarrow t = 4 \end{cases} \Rightarrow H'(8;-4;0)$.

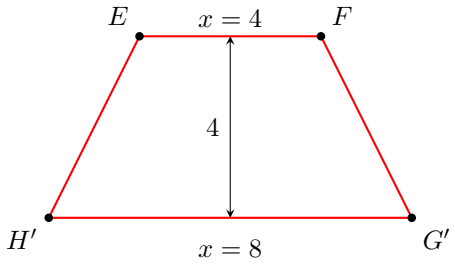
Tương tự, các em sẽ tính được $G'(8;4;0)$.

Vì $\begin{cases} Oy // EF \\ MO = 4 \end{cases}$ nên phương trình đường thẳng $EF : x = 4$.

Ta có $\overrightarrow{G'H'} = (0;-8;0) // \vec{j}\,(0;1;0)$ ($\vec{j}$ là vectơ chỉ phương của trục Oy).

Suy ra $G'H' // Oy$, dễ dàng viết được phương trình đường thẳng $G'H' : x = 8$.

Mà $EF // Oy$ nên $EF // G'H'$ hay $EFG'H'$ là hình thang.



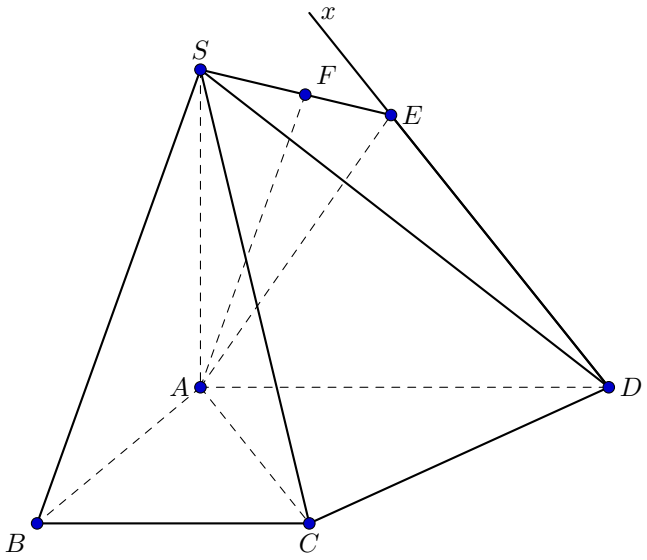
Ta có $d(EF, G'H') = 8 - 4 = 4$, $EF = 4$, $G'H' = 8$.

Vậy diện tích vùng chiếu sáng là:

$$S_{EFG'H'} = \frac{(EF + G'H') \cdot d(EF, G'H')}{2} = \frac{(4+8)\cdot 4}{2} = 24\,(\text{m})^2.$$

Bài 112. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B với $AB = BC = 1$, $AD = 2$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 1$. Tính khoảng cách giữa hai đường

thẳng AC và SD (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



✍ *Hướng dẫn giải.* Kẻ đường thẳng Dx qua D sao cho $Dx // AC$ và $Dx \subset (ABCD)$.

Khi đó ta có:

$$\begin{cases} AC // Dx \\ Dx \subset (SDx) \end{cases} \Rightarrow AC // (SDx).$$

Do đó:

$$d(AC, SD) = d(AC, (SDx)) = d(A, (SDx)).$$

(Vì $AC // (SDx)$ nên khoảng cách từ đường thẳng AC tới mặt phẳng (SDx) bằng khoảng cách từ điểm A bất kì trên AC tới mặt phẳng đó).

Trong mặt phẳng đáy $(ABCD)$, kẻ $AE \perp Dx$ tại E. Trong mặt phẳng (SAE), kẻ $AF \perp SE$ tại F. Ta có:

$$\begin{cases} Dx \perp AE \\ Dx \perp SA \text{ (do } SA \perp (ABCD)) \end{cases} \Rightarrow Dx \perp (SAE) \Rightarrow Dx \perp AF.$$

Mà $AF \perp SE$, suy ra $AF \perp (SDx)$. Vậy $d(A, (SDx)) = AF$.

Xét mặt phẳng đáy $ABCD$: Kẻ $CH \perp AD$ $(H \in AD)$. Tứ giác $AHCB$ là hình vuông cạnh 1 nên $AH = 1$, $CH = 1$. Vì $AD = 2$ nên $HD = AD - AH = 1$.

Xét tam giác ADC có trung tuyến $CH = AH = HD = 1$ nên tam giác ADC vuông tại C.

Khi đó $AC = \sqrt{AH^2 + CH^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ và $CD = \sqrt{CH^2 + HD^2} = \sqrt{2}$.

Tứ giác $ACDE$ có $AE \perp Dx$, $CD \perp AC$ (do tam giác ADC vuông tại C) và $Dx // AC$ nên $AEDC$ là hình vuông cạnh $\sqrt{2}$. Suy ra $AE = AC = \sqrt{2}$.

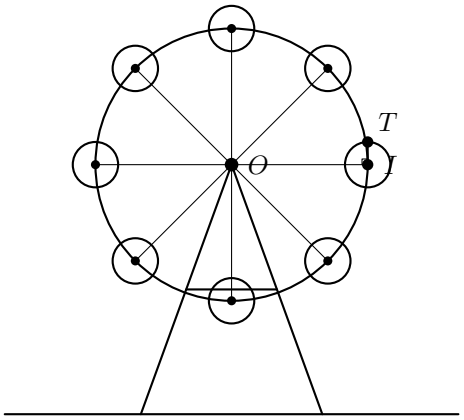
Xét tam giác SAE vuông tại A, đường cao AF:

$$\frac{1}{AF^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AE^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{(\sqrt{2})^2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

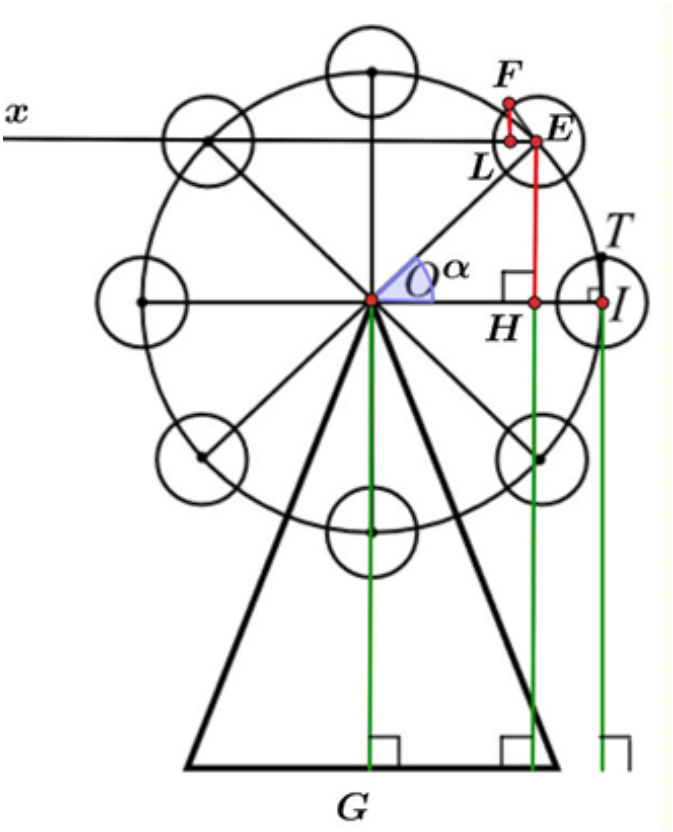
$$\Rightarrow AF^2 = \frac{2}{3} \Rightarrow AF = \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0,82.$$

Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SD xấp xỉ $0,82$.

Bài 113. Một trò chơi vòng đu quay được thể hiện như hình vẽ, trò chơi gồm một bánh xe lớn tâm O có bán kính 12 m và các bánh xe nhỏ có bán kính 2 m. Các ghế ngồi được bố trí xung quanh bánh xe nhỏ. Tại thời điểm ban đầu, bạn Dũng đang ngồi ở vị trí T trên đường tròn tâm I và hai điểm O, I cùng cách mặt đất 20 m. Biết rằng bánh xe lớn quay quanh tâm O còn bánh xe nhỏ quay quanh tâm của nó nhưng luôn thoả mãn góc $\widehat{TIO} = 90°$. Tìm chiều cao tối đa của bạn Dũng so với mặt đất trong quá trình chơi (kết quả làm tròn đến hàng phần mười của mét).



Hướng dẫn giải. Giả sử tại một thời điểm, tâm bánh xe nhỏ ở vị trí E sao cho tia OE hợp với phương nằm ngang OI một góc α. Khi đó, vị trí bạn Dũng là điểm F nằm trên đường tròn tâm E. Kẻ $Ex // OI$. Kẻ $FL \perp Ex$ và $EH \perp OI$. Gọi G là hình chiếu của O lên mặt đất.



Khi đó chiều cao của bạn Dũng so với mặt đất là:

$$h = FL + EH + OG = FL + EH + 20 \text{ m (vì } O, I \text{ cùng cách mặt đất 20 m).}$$

Xét các tam giác vuông:

◈ Trong tam giác vuông OEH tại H, ta có: $EH = OE \cdot \sin\alpha = 12 \cdot \sin\alpha$.

◈ Vì $Ex//OI$ nên $\widehat{OEL} = \widehat{EOH} = \alpha$ (góc so le trong).

◈ Theo giả thiết góc $\widehat{FEO} = 90^\circ$ nên $\widehat{FEL} = 90^\circ - \widehat{OEL} = 90^\circ - \alpha$.

◈ Trong tam giác vuông FEL tại L, ta có:

$$FL = FE \cdot \sin\widehat{FEL} = 2 \cdot \sin(90^\circ - \alpha) = 2 \cdot \cos\alpha.$$

Chiều cao của Dũng là: $h = 12\sin\alpha + 2\cos\alpha + 20$.

Để tìm chiều cao tối đa, ta tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 12\sin\alpha + 2\cos\alpha$. Theo bất đẳng thức Bunyakovsky (hoặc công thức cộng biến đổi):

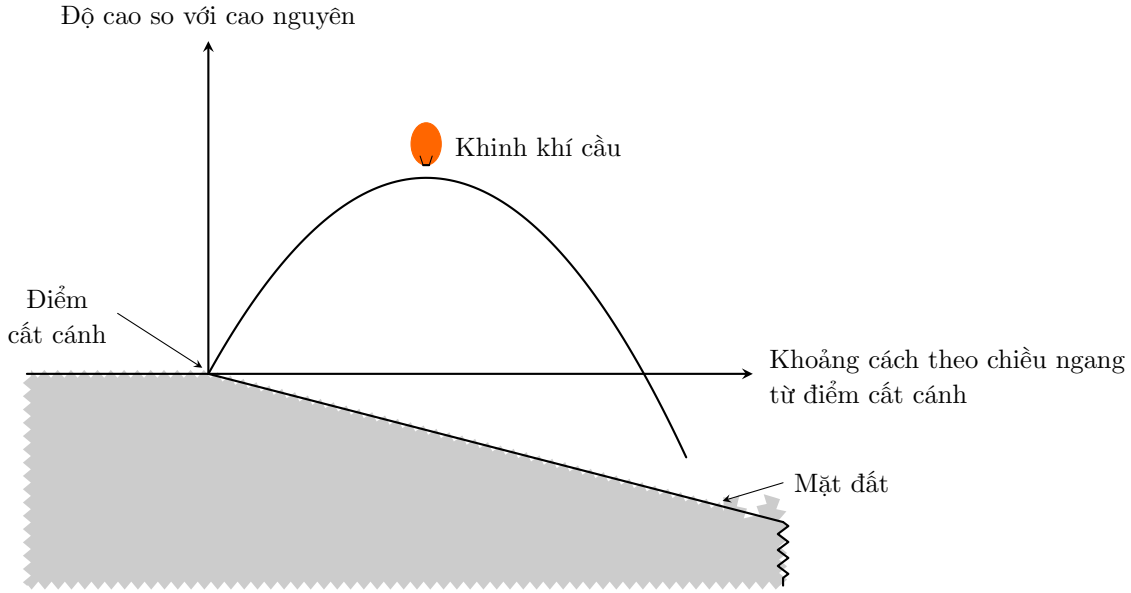
$$P = 12\sin\alpha + 2\cos\alpha \le \sqrt{12^2 + 2^2} = \sqrt{148} = 2\sqrt{37}.$$

Khi đó $h \le 2\sqrt{37} + 20 \approx 12,165 + 20 = 32,165$ m.

Làm tròn đến hàng phần mười, ta được chiều cao tối đa là $32,2$ m.

Công thức sử dụng $-\sqrt{a^2+b^2} \le a\cos\alpha + b\sin\alpha \le \sqrt{a^2+b^2}$

Bài 114. Một khinh khí cầu cất cánh từ rìa của một cao nguyên (mặt phẳng nằm ngang). Xét trên hệ tọa độ Oxy, đơn vị trên mỗi trục tính bằng mét, đường đi của khinh khí cầu được mô hình hóa qua đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{-1}{375}x^2 + \frac{4}{5}x$. Mặt đất (dưới cao nguyên) dốc xuống một góc không đổi và bề mặt của nó tạo với phương thẳng đứng một góc α thỏa mãn $\tan\alpha = -0,1$ (tham khảo như hình vẽ). Biết rằng tại vị trí A và B, khinh khí cầu sẽ ở độ cao 30 mét theo phương thẳng đứng với mặt đất. Tính khoảng cách AB (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị theo mét).



Hướng dẫn giải. Phương trình mặt đất là $y = -0,1x$

Khinh khí cầu đang ở độ cao 30 m so với mặt đất nên hoành độ 2 điểm A, B thoả mãn phương trình:

$$\frac{\left|\frac{-1}{375}x^2 + \frac{4}{5}x - (-0,1x)\right|}{\sqrt{0,1^2+1}} = 30$$

$$\Rightarrow \frac{\left|\frac{-1}{375}x^2 + 0,9x\right|}{\sqrt{1,01}} = 30$$

$$\Rightarrow \left|\frac{-1}{375}x^2 + 0,9x\right| = 30\sqrt{1,01}$$

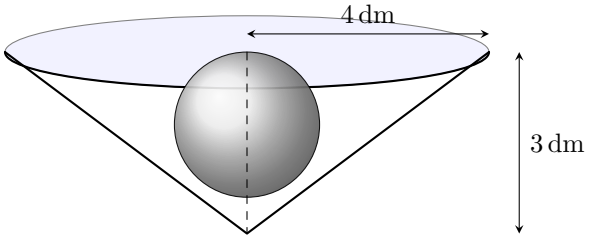
$$\Rightarrow \frac{-1}{375}x^2 + 0,9x = 30\sqrt{1,01}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \approx 299,79 \\ x \approx 37,71 \end{array}\right.$$

$\Rightarrow A(299,79; 0,17)$, $B(37,71; 26,36)$

$\Rightarrow AB \approx 262$

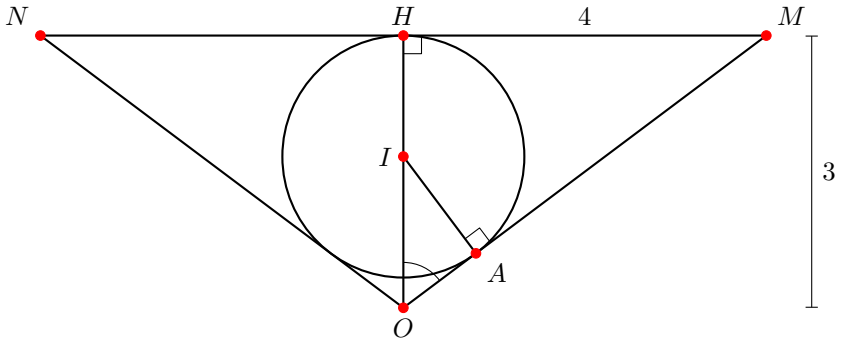
Bài 115. Một cái cốc thủy tinh dạng hình nón úp ngược có chiều cao $a = 3\,\text{dm}$. Bán kính đáy của nón là $R = 4\,\text{dm}$. Ban đầu, cốc được đổ đầy nước. Người ta thả một quả cầu bằng sắt đặc làm bằng vật liệu không thấm nước vào cốc. Quả cầu được thả vào sao cho nó tiếp xúc với mặt bên trong của cốc nước (tham khảo hình vẽ) và thể tích nước tràn ra ngoài là lớn nhất (xem hình vẽ).



Hỏi thể tích nước lớn nhất đó là bao nhiêu lít (làm tròn đến hàng phần mười)?

Hướng dẫn giải. TH1: Quả cầu nằm hoàn toàn dưới mặt nước.

Phần thể tích nước tràn ra ngoài bằng thể tích của quả cầu. Thể tích quả cầu lớn nhất khi quả cầu tiếp xúc với mặt bên của cốc nước. Kí hiệu các điểm như hình vẽ, gọi R là bán kính quả cầu ($R = IA = IH$).



Áp dụng định lý Py-tha-go, ta có $OM = \sqrt{OH^2 + HM^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

Ta có $\sin\widehat{HOM} = \sin\widehat{IOA} = \frac{HM}{OM} = \frac{4}{5}$.

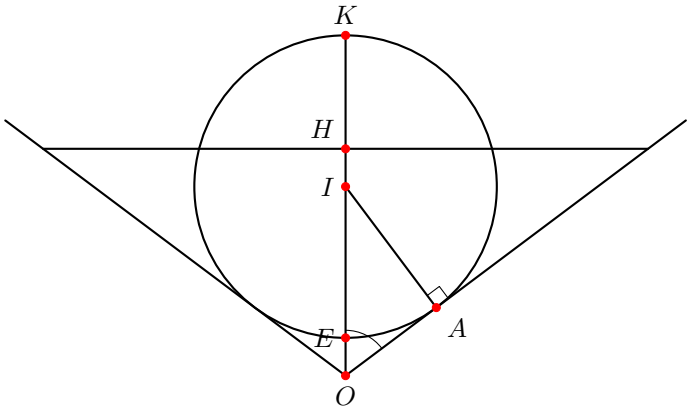
Lại có $\sin\widehat{IOA} = \frac{IA}{OI} \Leftrightarrow \frac{4}{5} = \frac{R}{OI} \Leftrightarrow OI = \frac{5R}{4}$. $\Rightarrow OH = OI + IH = \frac{5R}{4} + R = \frac{9R}{4}$.

Mà $OH = 3 \Leftrightarrow \frac{9R}{4} = 3 \Leftrightarrow 9R = 12 \Leftrightarrow R = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$.

Vậy thể tích nước tràn lớn nhất ở TH1 là: $V_1 = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{4}{3}\right)^3 \approx 9,9\,(\text{dm}^3) \approx 9,9\text{l}$.

TH2: Quả cầu chìm một phần. Phần thể tích nước tràn ra ngoài bằng thể tích chỏm cầu.

Nhắc lại: Công thức tính thể tích chỏm cầu: $V = \pi h^2\left(R - \frac{h}{3}\right)$ với h là chiều cao chỏm cầu.



Tương tự như TH1, ta cũng tính được $OI = \frac{5R}{4}$.

Ta có $EH = EK - HK = 2R - HK = 2R - (OK - OH) = 2R - [(OI + IK) - 3] = 2R - \left[\left(\frac{5R}{4} + R\right) - 3\right] = 2R - \left(\frac{9R}{4} - 3\right) = -\frac{R}{4} + 3$.

Điều kiện: $EH > 0 \Leftrightarrow -\frac{R}{4} + 3 > 0 \Leftrightarrow R < 12$.

Thể tích khối chỏm cầu là $V_2 = \pi h^2\left(R - \frac{h}{3}\right)$ với $h = -\frac{R}{4} + 3$: $V_2 = \pi\left(-\frac{R}{4} + 3\right)^2\left(R - \frac{-\frac{R}{4}+3}{3}\right) = \frac{\pi}{192}(12 - R)^2(13R - 12)$.

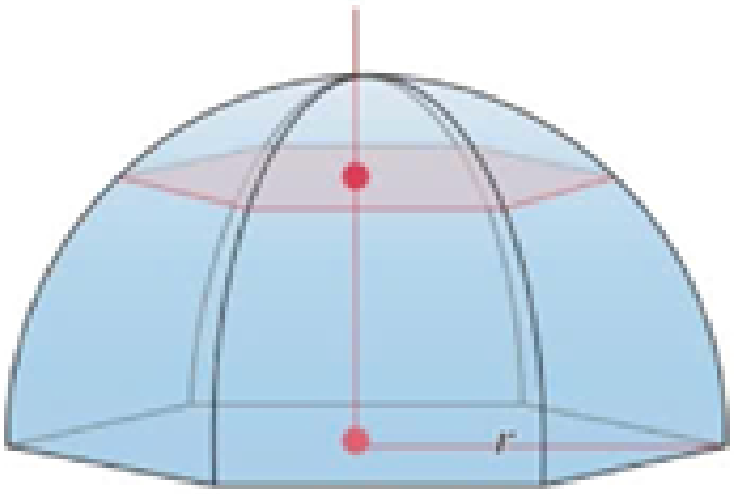
Xét hàm số $f(R) = \frac{\pi}{192}(12-R)^2(13R-12)$ trên khoảng $(0; 12)$. $f'(R) = \frac{\pi}{192}(12-R)(-39R+180)$.

$$f'(R) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} R = 12 \notin (0; 12) \\ R = \frac{180}{39} = \frac{60}{13} \in (0; 12) \end{array}\right.$$

Lập bảng biến thiên ta thấy $V_2\max = f\left(\frac{180}{39}\right) \approx 42,8$.

Vậy thể tích nước tràn ra lớn nhất là $42,8$ lít.

Bài 116. Một mái vòm nhà thờ có thể tích là 200 mét khối được thiết kế với ba giá đỡ hình parabol có hình dạng giống nhau sao cho mỗi mặt cắt ngang (theo phương nằm ngang) đều là một lục giác đều (tham khảo như hình vẽ). Ba parabol có cùng đỉnh và chiều cao, đáy vòm là một hình lục giác đều có độ dài đường chéo bằng 10 mét. Chiều cao của mái vòm bằng bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)? Biết mái vòm cao không quá 10 mét.



✍ *Hướng dẫn giải.* Phương trình parabol đi qua 3 điểm $B(5;0)$, $E(-5;0)$, $D(0,H)$ có dạng:

$$y = a(x-5)(x+5) = ax^2 - 25a$$

Tại đỉnh $D(0;H)$, ta có $H = -25a \Rightarrow a = \frac{-H}{25}$.

Vậy phương trình quỹ đạo giá đỡ là: $y = \frac{-H}{25}x^2 + H$.

Đặt $OA = h$ là độ cao của mặt cắt ngang bất kỳ.

Hoành độ của điểm C trên mặt cắt là nghiệm của phương trình:

$$\frac{-H}{25}x^2 + H = h \Rightarrow x^2 = \frac{25(H-h)}{H} \Rightarrow x = 5\sqrt{\frac{H-h}{H}}.$$

Diện tích mặt cắt ngang tại độ cao h là diện tích hình lục giác đều cạnh x:

$$S(h) = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot \sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{25(H-h)}{H} = \frac{75\sqrt{3}}{2}\frac{(H-h)}{H}.$$

Thể tích của mái vòm bằng 200 mét khối nên ta có:

$$\int_0^H \frac{75\sqrt{3}}{2}\frac{(H-h)}{H}dh = 200$$

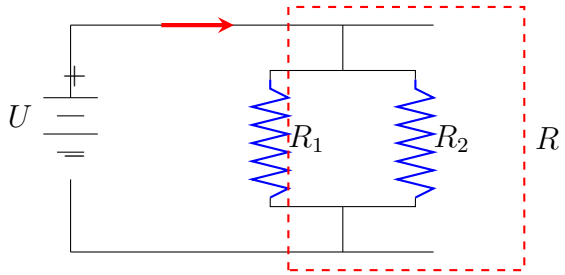
$$\Leftrightarrow \frac{75\sqrt{3}}{2H}\left[Hh - \frac{h^2}{2}\right]_0^H = 200$$

$$\Leftrightarrow \frac{75\sqrt{3}}{2H} \cdot \frac{H^2}{2} = 200 \Leftrightarrow \frac{75\sqrt{3}}{4}H = 200$$

$$\Rightarrow H = \frac{32\sqrt{3}}{9} \approx 6,16 \text{ m}.$$

Vậy chiều cao của mái vòm xấp xỉ 6,16 mét.

Bài 11. Hai điện trở R_1 và R_2 được mắc song song trong mạch điện để tạo thành một nguồn có tổng trở R. Khi đó giá trị R được xác định thông qua phương trình $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$. Biết rằng ban đầu $R_1 = 120\,(\Omega)$ và đang giảm với tốc độ không đổi $a\,\Omega/s$; $R_2 = b\,(\Omega)$ và đang tăng với tốc độ không đổi $0,5\,\Omega/s$; $R = 40\,(\Omega)$ và đang tăng với tốc độ bằng $\frac{1}{9}\,\Omega/s$ (trong đó $a, b \in \mathbb{R}$). Tổng trở lớn nhất trong mạch điện trên bằng bao nhiêu Ω (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?



✍ *Hướng dẫn giải.* Ta có:

+) $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$
$\Rightarrow \frac{1}{40} = \frac{1}{120} + \frac{1}{R_2} \Rightarrow R_2 = b = 60.$

+) Đạo hàm hai vế phương trình $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ theo thời gian t:
$\Rightarrow \frac{-v_R}{R^2} = \frac{-v_{R_1}}{R_1^2} + \frac{-v_{R_2}}{R_2^2}$
$\Rightarrow \frac{-\frac{1}{9}}{40^2} = \frac{a}{120^2} + \frac{-0,5}{b^2} \Rightarrow a = 1.$

+) Biểu diễn R_1, R_2 theo thời gian t:
$\frac{1}{R(t)} = \frac{1}{R_1(t)} + \frac{1}{R_2(t)}$

$\Rightarrow \frac{1}{R(t)} = \frac{1}{120-t} + \frac{1}{60+0,5t}$

Xét hàm số $f(t) = \frac{1}{120-t} + \frac{1}{60+0,5t}$

$\Rightarrow f'(t) = \frac{1}{(120-t)^2} - \frac{0,5}{(60+0,5t)^2} = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{(120-t)^2} = \frac{1}{2(60+0,5t)^2} \Rightarrow (120-t)^2 = 2(60+0,5t)^2$

$\Rightarrow 120 - t = \sqrt{2}(60+0,5t)$ (do $R_1, R_2 > 0$)

$\Rightarrow t = 360 - 240\sqrt{2}$ là điểm cực tiểu của hàm số $f(t)$.

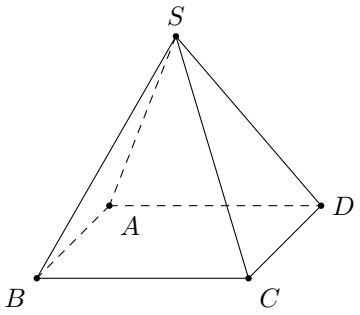
$\Rightarrow f(t)_{\min}$ tại $t = 360 - 240\sqrt{2}$.

Vì $R(t) = \frac{1}{f(t)}$ nên $R(t)$ đạt giá trị lớn nhất khi $f(t)$ đạt giá trị nhỏ nhất:

$\Rightarrow R(t)_{\max} = \frac{1}{f(360-240\sqrt{2})} \approx 41,2\,\Omega$.

Vậy tổng trở lớn nhất trong mạch điện trên bằng khoảng $41,2\,\Omega$.

Bài 118. Một con kiến di chuyển dọc theo các cạnh của một hình chóp tứ giác. Nó bắt đầu cuộc đi dạo của mình ở đỉnh A, mỗi lần nó đi đúng một cạnh của hình chóp và nó đi tối đa 3 lần. Tại mỗi đỉnh, con kiến quyết định ngẫu nhiên đi theo một trong ba hướng (đối với đỉnh A, B, C) hoặc bốn hướng (đối với đỉnh S trên cùng), trong đó nó cũng được phép chọn hướng mà nó vừa đi đến. Tại đỉnh B có một con thú ăn kiến đang rình rập. Xác suất để con kiến không bị bắt bởi thú ở B là bao nhiêu phần trăm (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



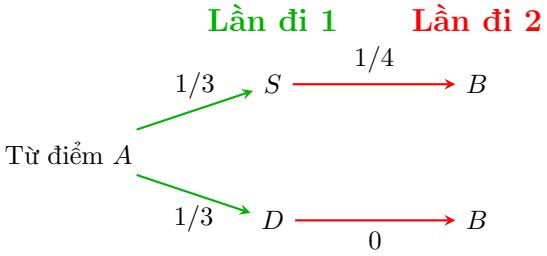
Hướng dẫn giải. Gọi A là biến cố "Con kiến không bị bắt"

Suy ra $\overline{A}$ là biến cố "Con kiến bị bắt".

Khi đó yêu cầu bài toán: Tính $P(A)$ và $P(A) = 1 - P(\overline{A})$.

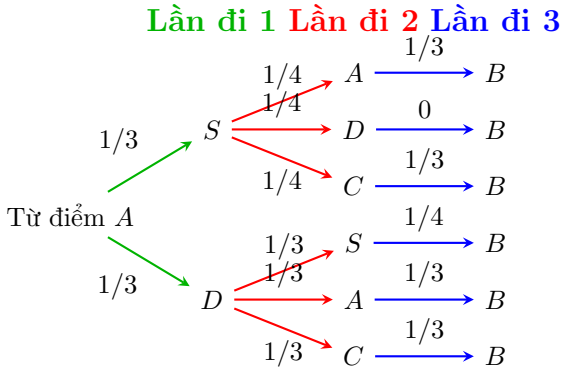
Vì con kiến đi tối đa 3 lần nên con kiến có thể bị bắt sau lần đi 1, 2 hoặc 3. Ta xét các trường hợp sau:

- **TH1:** Con kiến bị bắt sau lần di chuyển 1.
  Xác suất con kiến bị bắt sau lần di chuyển 1 là $P(A_1) = \dfrac{1}{3}$.
- **TH2:** Con kiến bị bắt sau lần di chuyển 2.
  Ta có sơ đồ cây:



  Suy ra xác suất con kiến bị bắt sau lần di chuyển 2 là $P(A_2) = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{12}$.
- **TH3:** Con kiến bị bắt sau lần di chuyển 3.

Ta có sơ đồ cây:



Suy ra xác suất con kiến bị bắt sau lần di chuyển 3 là:

$$P(A_3)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{17}{108}$$

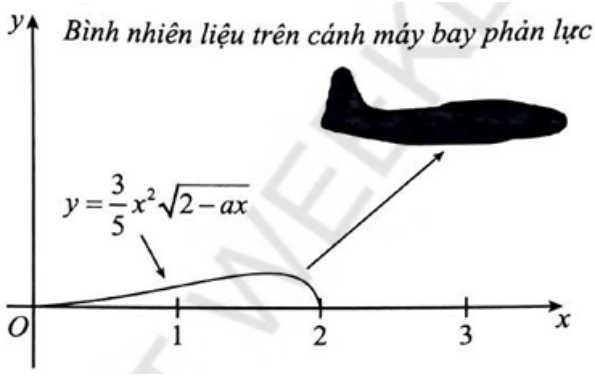
Kết hợp 3 TH trên, ta có

$$P(\overline{A})=\frac{1}{3}+\frac{1}{12}+\frac{17}{108}=\frac{31}{54}$$

Vậy xác suất cần tính là:

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{31}{54}=0,4(259)\approx 42,6\%$$

Bài 119. Một bình nhiên liệu trên cánh máy bay phản lực được mô hình hóa bằng cách quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)=\frac{3}{5}x^2\sqrt{2-ax}$ $(a\in\mathbb{R})$ và trục Ox quanh trục hoành, trong đó x và y được đo bằng mét (xem hình vẽ). Biết rằng chiếc máy bay đó có 4 bình chứa nhiên liệu như nhau và được đổ đầy trước khi bay. Giả sử tốc độ tiêu hao nhiên liệu trên máy bay được mô phỏng bằng hàm số $h'(t)=-3t^2+120t+2000$ lít/giờ (t tính theo giờ, $0\le t\le 6$). Máy bay đó sẽ tiêu hao hết 90% nhiên liệu sau bao nhiêu giờ bay (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?



Hướng dẫn giải. Quan sát hình vẽ, ta thấy đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt trục hoành tại hai điểm hay phương trình $f(x)=0$ có hai nghiệm $x=0$ và $x=2$.

Suy ra $f(2)=0\Leftrightarrow\frac{3}{5}\cdot 2^2\sqrt{2-a\cdot 2}=0\Leftrightarrow\sqrt{2-2a}=0\Leftrightarrow a=1.\Rightarrow y=f(x)=\frac{3}{5}x^2\sqrt{2-x}$.

Khi đó thể tích của một bình nhiên liệu là: $V=\pi\int\limits_0^2 f^2(x)\mathrm{d}x=\pi\int\limits_0^2\left(\frac{3}{5}x^2\sqrt{2-x}\right)^2\mathrm{d}x=\frac{96\pi}{125}$ (m^3).

Vậy thể tích 4 bình chứa nhiên liệu trên máy bay bằng $4\cdot\frac{96\pi}{125}=\frac{384\pi}{125}$ (m^3).

Đổi đơn vị: $1\ \mathrm{m}^3=1000$ lít nên $\frac{384\pi}{125}$ $(\mathrm{m}^3)=3072\pi$ (lít).

Vì tốc độ tiêu hao nhiên liệu trên máy bay được mô phỏng bằng hàm số $h'(t) = -3t^2+120t+2000$ lít/giờ nên tổng nhiên liệu tiêu thụ sau t (giờ) bằng: $h(t) = \int\limits_0^t h'(t)\mathrm{d}t = \int\limits_0^t (-3t^2+120t+2000)\mathrm{d}t$

$= (-t^3+60t^2+2000t)\Big|_0^t = -t^3+60t^2+2000t$ (lít).

90% nhiên liệu của máy bay bằng $0,9 \cdot 3072\pi = 2764,8\pi$ (lít).

Do đó máy bay tiêu hao hết 90% nhiên liệu $\Leftrightarrow h(t) = 2764,8\pi \Leftrightarrow -t^3+60t^2+2000t = 2764,8\pi$ $\Leftrightarrow -t^3+60t^2+2000t-2764,8\pi = 0$.

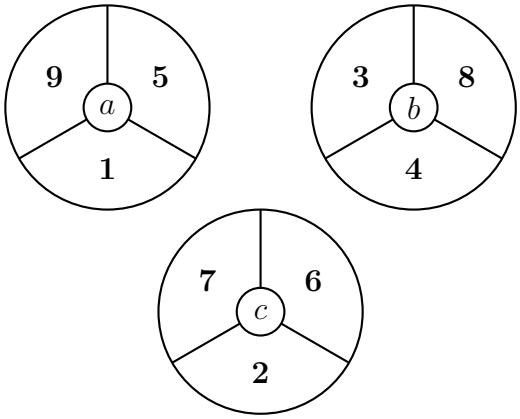
Bấm máy tính, ta thu được các nghiệm: $\left[\begin{array}{l} t \approx 82,87 \notin [0;6] \text{ (Loại)} \\ t \approx 3,91 \in [0;6] \text{ (Thỏa mãn)} \end{array}\right.$

Vậy sau $3,91$ giờ thì máy bay tiêu hao hết 90% nhiên liệu.

Bài 120. Bạn Quỳnh và bạn Hà tham gia chơi trò chơi sau:

- Quỳnh chọn trước một trong ba vòng quay được cho trong hình.
- Sau đó, Hà chọn một trong hai vòng còn lại.
- Cả hai quay vòng của mình. Người có số lớn hơn là người thắng.

Biết rằng mỗi vùng trên vòng quay đều có xác suất như nhau. Tính xác suất mà Quỳnh chiến thắng. Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.



Hướng dẫn giải. Quỳnh chọn trước có 3 cách chọn vòng quay.
Hà chọn sau có 2 cách chọn vòng quay.
Mỗi người quay vòng của mình có $3 \times 3 = 9$ kết quả cho mỗi cặp vòng quay.
$\Rightarrow$ Tổng số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 3 \times 2 \times 9 = 54$.
Các trường hợp Quỳnh quay được số x và thắng Hà (số cách Hà thua):

- Số 9: Hà có 6 cách thua (thua mọi số ở các vòng quay còn lại).
- Số 5: Hà có 3 cách thua (số 3, 4 ở vòng b và số 2 ở vòng c).
- Số 3: Hà có 2 cách thua (số 1 ở vòng a và số 2 ở vòng c).
- Số 4: Hà có 2 cách thua (số 1 ở vòng a và số 2 ở vòng c).
- Số 8: Hà có 5 cách thua (số 1, 5 ở vòng a và số 7, 6, 2 ở vòng c).
- Số 7: Hà có 4 cách thua (số 1, 5 ở vòng a và số 3, 4 ở vòng b).
- Số 6: Hà có 4 cách thua (số 1, 5 ở vòng a và số 3, 4 ở vòng b).
- Số 2: Hà có 1 cách thua (số 1 ở vòng a).

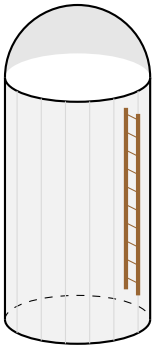
◈ Số 1: Hà có 0 cách thua.

$\Rightarrow$ Tổng cộng có $6+3+2+2+5+4+4+1=27$ cách để Quỳnh chiến thắng.

Xác suất cần tìm là $P=\dfrac{27}{54}=0,5$.

Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm: **0,50**.

Bài 121. **Silo** là một cấu trúc cao, hình trụ, thường được sử dụng để lưu trữ ngũ cốc. Một silo (không có đáy) được xây dựng dưới dạng một hình trụ có nắp là một nửa hình cầu ở phía trên. Chi phí xây dựng của nửa hình cầu là 100 nghìn đồng mỗi m^2, chi phí xây dựng của hình trụ là 75 nghìn đồng mỗi m^2. Người ta muốn xây dựng một silo để có thể chứa được 24 tấn gạo. Bỏ qua độ dày của silo và lượng vật liệu thừa trong quá trình xây dựng, gạo được chứa trong phần hình trụ. Số tiền tối thiểu mà người ta bỏ ra để xây dựng silo trên là bao nhiêu triệu đồng (làm tròn đến hàng phần trăm)? Biết rằng trong toán học khối lượng của một vật chất bằng tích của thể tích và khối lượng riêng của nó, gạo có khối lượng riêng là $D=1200\ \text{kg/m}^3$.



Hướng dẫn giải. Ta có: $m=24$ tấn $=24000$ kg.

$D=1200\ \text{kg/m}^3 \Rightarrow V=\dfrac{m}{D}=\dfrac{24000}{1200}=20\ \text{m}^3$.

Gọi R là bán kính đáy của silo, h là chiều cao của hình trụ $(R,h>0)$.

Ta có thể tích chứa gạo là thể tích khối trụ (do khối cầu phía trên là nắp) nên: $\pi R^2h=20 \Rightarrow \pi Rh=\dfrac{20}{R}$.

Hàm chi phí xây dựng (đơn vị nghìn đồng) là: $C(R)=100\cdot(2\pi R^2)+75\cdot(2\pi Rh)$

$C(R)=200\pi R^2+150\cdot(\pi Rh)$

Thay $\pi Rh=\dfrac{20}{R}$ vào, ta được: $C(R)=200\pi R^2+150\cdot\dfrac{20}{R}=200\pi R^2+\dfrac{3000}{R}$.

Xét hàm số $C(R)$ trên $(0;+\infty)$: $\Rightarrow C'(R)=400\pi R-\dfrac{3000}{R^2}$.

Cho $C'(R)=0 \Leftrightarrow 400\pi R^3=3000 \Leftrightarrow R^3=\dfrac{3000}{400\pi}=\dfrac{15}{2\pi} \Rightarrow R=\sqrt[3]{\dfrac{15}{2\pi}}\approx 1,3365$.

Bảng biến thiên cho thấy $C(R)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $R\approx 1,3365$.

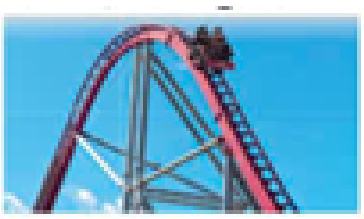
$\Rightarrow C_{\min}\approx C(1,3365)\approx 3366,99$ nghìn đồng $=3,36699$ triệu đồng.

Làm tròn đến hàng phần trăm, ta được số tiền tối thiểu là **3,37 triệu đồng**.

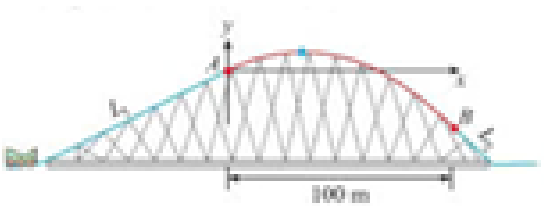
Bài 122. Một kĩ sư thiết kế một đường ray tàu lượn, mà mặt cắt của nó gồm một cung đường cong có dạng parabol (hình a), đoạn dốc lên L_1 và đoạn dốc xuống L_2 là những phần đường thẳng có hệ số góc lần lượt là $0,5$ và -1.

Để tàu lượn chạy êm và không bị đổi hướng đột ngột, L_1 và L_2 phải là những tiếp tuyến của cung parabol tại các điểm chuyển tiếp A và B (hình b). Giả sử gốc tọa độ đặt tại A và phương

trình của parabol là $y = ax^2 + bx + c$, trong đó x tính bằng mét. Biết khoảng cách theo phương ngang giữa A và B là 100 (mét). Tìm chênh lệch độ cao giữa hai điểm chuyển tiếp A và B (viết theo đơn vị mét).



Hình a



Hình b

✍ *Hướng dẫn giải.* Chênh lệch độ cao giữa hai điểm chuyển tiếp A và B chính bằng giá trị tuyệt đối tung độ của điểm B.

Vì khoảng cách theo phương ngang giữa A và B (với $A \equiv O$) là 100 (mét) nên hoành độ của điểm B bằng 100. Parabol đi qua điểm $A(0;0)$ nên $c = 0$, suy ra phương trình có dạng $y = ax^2 + bx$.

Ta có đạo hàm: $y' = 2ax + b$.

Từ giả thiết: "L_1 và L_2 phải là những tiếp tuyến của cung parabol tại các điểm chuyển tiếp A và B" và "đoạn dốc lên L_1 và đoạn dốc xuống L_2 là những phần đường thẳng có hệ số góc lần lượt là $0,5$ và -1" nên hệ số góc của tiếp tuyến tại A và B lần lượt là $0,5$ và -1. Hay ta có hệ phương trình: $\begin{cases} y'(0) = 0,5 \\ y'(100) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a \cdot 0 + b = 0,5 \\ 2a \cdot 100 + b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0,5 \\ 200a + 0,5 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0,5 \\ a = \dfrac{-1,5}{200} \end{cases}$.

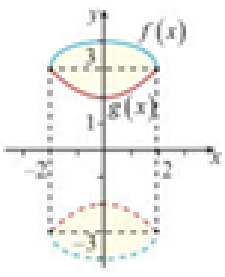
Suy ra phương trình parabol là $y = \dfrac{-1,5}{200}x^2 + 0,5x$.

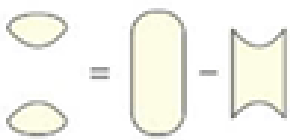
Điểm $B(100; y_B)$ thuộc vào parabol nên ta có: $y_B = \dfrac{-1,5}{200} \cdot 100^2 + 0,5 \cdot 100 = -75 + 50 = -25$.

Vậy chênh lệch độ cao giữa hai điểm chuyển tiếp A và B bằng $|-25| = 25$ (mét).

Bài 123. Khoang không khí của một chiếc lốp xe có thể được xem là một vật thể được tạo thành bằng cách xoay mặt cắt ngang của lốp quanh trục bánh xe. Một chiếc bánh xe có đường kính bằng 8 dm, đường kính phần rỗng bên trong bằng 4 dm và chiều cao bằng 4 dm. Chiếc bánh xe được thiết kế khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ quanh trục hoành. Biết rằng đồ thị hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx + c$ $(a, b, c \in \mathbb{R})$ và parabol $y = g(x)$ đều nhận trục Oy là trục đối xứng. Thể tích phần không khí của chiếc lốp xe trên bằng bao nhiêu lít (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?







✍ *Hướng dẫn giải.* Thể tích phần không khí của chiếc lốp xe là $V = V_1 - V_2$ (dm^3), với V_1 là thể tích khối tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi $y = f(x)$, trục hoành và các đường

$x=-2, x=2$; V_2 là thể tích khối tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi $y=g(x)$, trục hoành và các đường $x=-2, x=2$. $\Rightarrow V=\pi\int\limits_{-2}^{2} f^2(x)\mathrm{d}x-\pi\int\limits_{-2}^{2} g^2(x)\mathrm{d}x$ (dm^3).

Từ cách gắn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ, ta có đồ thị hàm số $y=f(x)$ đi qua các điểm $(-2;3),(2;3),(0;4)$. Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} f(-2)=3 \\ f(2)=3 \\ f(0)=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\cdot(-2)^4+b\cdot(-2)+c=3 \\ a\cdot 2^4+b\cdot 2+c=3 \\ a\cdot 0^4+b\cdot 0+c=4 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 16a-2b+4=3 \\ 16a+2b+4=3 \\ c=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16a-2b=-1 \\ 16a+2b=-1 \\ c=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\frac{1}{16} \\ b=0 \\ c=4 \end{cases}$. $\Rightarrow y=f(x)=-\frac{1}{16}x^4+4$.

Vì parabol $y=g(x)$ đối xứng qua trục Oy nên $y=g(x)=ax^2+c$ $(a\neq 0)$. Từ hình vẽ, ta thấy đồ thị hàm số $y=g(x)$ đi qua các điểm $(-2;3),(0;2)$ (vì đường kính phần rỗng bên trong ngắn nhất bằng 4 dm ứng với bán kính bằng 2 dm) suy ra hệ phương trình: $\begin{cases} g(-2)=3 \\ g(0)=2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} a\cdot(-2)^2+c=3 \\ a\cdot 0^2+c=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a+2=3 \\ c=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{4} \\ c=2 \end{cases}$. $\Rightarrow y=g(x)=\frac{1}{4}x^2+2$.

$V=\pi\int\limits_{-2}^{2} f^2(x)\mathrm{d}x-\pi\int\limits_{-2}^{2} g^2(x)\mathrm{d}x=\pi\int\limits_{-2}^{2}\left[-\frac{1}{16}x^4+4\right]^2\mathrm{d}x-\pi\int\limits_{-2}^{2}\left[\frac{1}{4}x^2+2\right]^2\mathrm{d}x=\frac{1616}{45}\pi\approx 113$ (dm^3).
Đổi đơn vị: $1\ \mathrm{dm}^3=1$ lít, vậy thể tích cần tìm xấp xỉ **113 lít**.

Bài 124. Vương đưa ra cho con trai của anh ấy một câu đố như sau: trong một ma trận 3×3, điền 9 số tự nhiên từ 1 đến 9 thỏa mãn hai điều kiện:

- Tổng của mỗi hàng, mỗi cột và tổng của 3 ô chéo nhau là bằng nhau.
- Các số điền vào là các số đôi một khác nhau.

Số cách mà con trai anh Vương điền vào ma trận bằng bao nhiêu?

Hướng dẫn giải.

x_1	x_2	x_3
x_4	x_5	x_6
x_7	x_8	x_9

Ta có: $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8+x_9=45$. (1)

Tổng mỗi hàng, mỗi cột, mỗi đường chéo bằng nhau nên tổng mỗi hàng, mỗi cột, mỗi đường chéo bằng $45:3=15$. $\Rightarrow x_1+x_5+x_9=x_2+x_5+x_8=x_3+x_5+x_7=x_4+x_5+x_6=15$. $\Rightarrow (x_1+x_2+x_3+x_4+x_6+x_7+x_8+x_9)+4x_5=60$. $\Leftrightarrow (x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8+x_9)+3x_5=60$. (2) Từ (1) và (2) suy ra $45+3x_5=60\Rightarrow x_5=5$.

Giả sử các ô ở góc x_1, x_3, x_7, x_9 đều là số lẻ. Mà $x_1 + x_2 + x_3 = 15$ là số lẻ $\Rightarrow x_2$ phải là số lẻ (vì tổng hai số lẻ x_1, x_3 là số chẵn). Lập luận tương tự cho các ô cạnh khác, ta thấy tất cả 9 ô đều phải là số lẻ, điều này vô lý vì chỉ có 5 số lẻ từ 1 đến 9. $\Rightarrow x_1, x_3, x_7, x_9$ phải là các số chẵn từ tập $\{2, 4, 6, 8\}$.

- Chọn vị trí cho số 2 ở các góc: có 4 cách chọn. Khi đó số đối diện qua tâm với nó phải là $15 - 5 - 2 = 8$ (có 1 cách).
- Chọn vị trí cho số 4 ở các góc còn lại: có 2 cách chọn. Khi đó số đối diện qua tâm với nó phải là $15 - 5 - 4 = 6$ (có 1 cách).
- Với mỗi cách sắp xếp các góc này, các số còn lại ở các cạnh đều được xác định duy nhất để tổng hàng/cột bằng 15.

$\Rightarrow$ Có tất cả $4 \cdot 2 = 8$ cách sắp xếp thỏa mãn.

Bài 125. Trong một cuộc thi pha chế, mỗi đội chơi được sử dụng tối đa 15 gam hương liệu hòa tan, 10 lít nước và 450 gam đường để pha chế hai loại nước A và B. Để pha chế 1 lít nước loại A cần 50 gam đường, 1 lít nước và 0,6 gam hương liệu. Để pha chế 1 lít nước loại B cần 20 gam đường, 1 lít nước và 1,5 gam hương liệu. Mỗi lít nước loại A nhận được 70 điểm thưởng, mỗi lít nước loại B nhận được 90 điểm thưởng. Để đội chơi được số điểm thưởng là lớn nhất thì cần pha chế a lít nước loại A và b lít nước loại B. Tính tổng $a + b$.

Hướng dẫn giải.

Gọi x, y lần lượt là số lít nước loại A và nước loại B mà đội chơi cần pha chế $(x, y \geq 0)$.

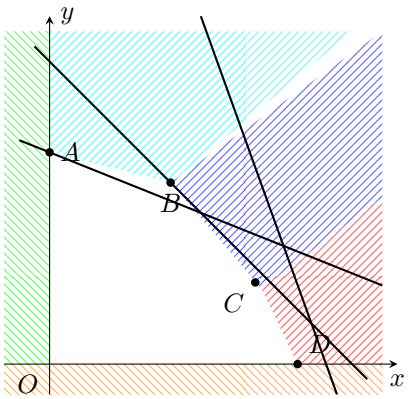
Vì mỗi đội chơi được sử dụng tối đa 15 gam hương liệu hòa tan nên ta có: $0,6x + 1,5y \leq 15$.

Mỗi đội chơi được sử dụng tối đa 10 lít nước nên ta có: $x + y \leq 10$.

Mỗi đội được sử dụng tối đa 450 gam đường nên ta có bất phương trình: $50x + 20y \leq 450 \Leftrightarrow 5x + 2y \leq 45$.

Từ đó ta có hệ bất phương trình: $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 0,6x + 1,5y \leq 15 \\ x + y \leq 10 \\ 5x + 2y \leq 45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 3x + 7,5y \leq 75 \\ x + y \leq 10 \\ 5x + 2y \leq 45 \end{cases}$ (1)

Số điểm thưởng thu được là hàm số: $f(x; y) = 70x + 90y$.



Miền nghiệm của hệ bất phương trình (1) là ngũ giác $OABCD$ với $A(0; 7), O(0; 0), B(4; 6), C(6; 4), D(8; 0$

(theo số liệu trong hình vẽ giải định).

Vì giá trị lớn nhất của $f(x;y)=70x+90y$ đạt được tại một trong các đỉnh của miền nghiệm. Ta có: $f(0;0)=0$; $f(0;7)=630$; $f(4;6)=70\cdot 4+90\cdot 6=820$; $f(6;4)=70\cdot 6+90\cdot 4=780$; $f(8;0)=560$.

Suy ra $f(x;y)$ đạt giá trị lớn nhất tại $B(4;6)$ (hoặc theo văn bản hình ảnh là $A(0;7)$ tùy theo cách giải của đề bài gốc). Dựa vào đáp án cho sẵn là 8, nếu điểm tối ưu là $(x;y)=(4;4)$ hoặc tương tự để $a+b=8$, tuy nhiên theo các bước giải trên: Nếu chọn đỉnh $A(0;7)$ thì $a+b=7$. Nếu chọn đỉnh $B(4;6)$ thì $a+b=10$.

Vậy để đạt số điểm thưởng lớn nhất đội chơi cần pha chế lượng nước tương ứng các giá trị a,b tìm được.